В. Г. ЛЕВИЧ

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том I

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ВЕЩЕСТВЕ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов физико-технических вузов и факультетов



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

530.1
Л 37
УДК 530.1

2-3-2
22-68

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ЧАСТЬ II

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ЧАСТЬ III

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание книги «Курс теоретической физики» (1962 г.) использовалось в ряде высших учебных заведений в качестве учебного пособия.

Полученные многочисленные замечания и пожелания ряда коллег, преподавателей и учащихся, были, по возможности, учтены в процессе подготовки книги к переизданию.

Быстрое развитие физики и широкий интерес, который приобрели в физике неравновесные и нестационарные процессы, побудили существенно расширить раздел физической кинетики. При этом казалось целесообразным перенести раздел физической кинетики в конец второго тома. Излагать физическую кинетику, не опираясь на сведения из квантовой механики, практически невозможно.

Существенной переработке подверглась часть IV — «Электромагнитные процессы в веществе». В самые последние годы в физике повысился интерес к электромагнитным процессам в веществе главным образом в связи с исследованиями плазмы и плазмоподобных сред. Мы сочли необходимым включить в книгу соответствующие разделы.

Методы расчета электростатических полей, полей постоянных токов и другие задачи классической электродинамики в среде изложены более чем кратко. Хотя их практическая важность очевидна, мы полагали, что учащиеся имеют возможность ознакомиться более подробно с этими вопросами в курсах общей физики, электро- и радиотехники и в курсе методов математической физики. Кроме того, этот круг проблем достаточно подробно освещен в монографической и учебной литературе.

Среди других изменений и добавлений следует особо указать на введение тензорных обозначений и понятий в теорию относительности и теорию электромагнитного поля; расширение введения в теорию вероятностей; краткое изложение метода коррелятивных функций в статистической физике; изложение термодинамической теории ферромагнетизма и теории распространения электромагнитных волн в плазме.

Ряд параграфов переписан заново. При этом мы стремились, по возможности, приблизить содержание книги к интересам современной теоретической физики.

Общий уровень книги во втором издании сохранен. Она попрежнему предназначена для первоначального ознакомления с теоретической физикой. Поэтому те вопросы, которые требуют использования громоздкого или специального математического аппарата, в курс не были включены. В виде примера можно привести теорию фазовых переходов в модели Изинга. Наиболее сложные параграфы отмечены звездочкой. Они могут быть при желании опущены, поскольку в дальнейшем тексте ссылок на них не имеется.

Автор

Май 1968 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Непрерывное развитие теоретической физики и постоянное расширение области ее приложений предъявляет все новые и новые требования к соответствующим учебникам и руководствам.

Развитие и усложнение новейших экспериментальных методов физического исследования, с одной стороны, и такое же развитие и необычайное расширение расчетного аппарата теоретической физики, с другой стороны, привели к тому, что, как правило, один человек не может совмещать в своей деятельности оба метода исследования. Отсюда — возникшее в конце XIX века и особенно в XX веке разделение физиков на «экспериментаторов», непосредственно осуществляющих опытные исследования в лабораториях, и «теоретиков», изучающих физические закономерности с помощью расчетных методов теоретической физики.

Ясно, однако, что определенный круг сведений по теоретической физике является основой физического образования как теоретиков, так и экспериментаторов.

Методы физического исследования — экспериментальные и теоретические, проникли в целый ряд смежных с физикой научных дисциплин (физическая химия, биофизика, геофизика, астрофизика и т. д.) и в технику (металлофизика и металловедение, теплофизика, электро- и радиотехника, вычислительная техника, приборостроение и т. д.). Лицам, работающим в этих областях науки и техники, также необходим некоторый минимум сведений по теоретической физике.

Составление современного руководства по теоретической физике неизбежно связано с известными логическими и методическими трудностями. В настоящее время невозможно разделить теоретическую физику на классическую и квантовую части и даже последовательно разбить ее на отдельные главы и разделы. Например, изложение статистической физики без учета квантовых свойств атомных систем не представляется возможным, так как это означало бы, что общая теория осталась без практических приложений; в теории электромагнитных процессов в веществе неизбежно приходится пользоваться понятиями

статистической физики и т. д. Возможно, что предельно логическая последовательность построения была бы достигнута, если бы в основу книги была положена квантовая механика. Однако это представляется совершенно недопустимым в книге, предназначенной для первоначального знакомства с предметом. Первоначальное изучение квантовой механики невозможно без некоторой «моральной» подготовки. Учащийся должен быть убежден в необходимости отказа от наглядных классических представлений. Поэтому неизбежны некоторые компромиссные решения, которые оправдали себя в многолетней практике преподавания теоретической физики в Московском инженерно-физическом институте.

Книга разбита на следующие части:

1. Теория электромагнитного поля.
2. Теория относительности.
3. Статистическая физика.
4. Теория электромагнитного поля в веществе.
5. Квантовая механика.

При изложении этих разделов мы исходили из следующих общих принципов:

1) Книга предназначена для систематического изучения предмета и представляет единое целое. Все сведения, необходимые для понимания последующих разделов, содержатся в предшествующих им главах.

2) Было бы невозможно наряду с вопросами, относящимися собственно к теоретической физике, освещать и соответствующие опытные факты. С другой стороны, физика является единой наукой и попытка изложить теоретическую физику вне связи с экспериментом была бы глубоко ошибочной. Предполагается, однако, что читатель знаком с основными опытными фактами из вузовских курсов общей физики и атомной физики. Поэтому мы ограничивались лишь ссылками и в сравнительно немногих случаях — схематическим описанием основных экспериментов.

3) Предполагаемое знакомство с общим курсом физики и атомной физикой позволили в изложении статистической физики опираться на некоторые (хотя и весьма ограниченные) сведения из квантовой теории.

4) Поскольку обычно классическая механика является отдельным курсом, в книге нет соответствующего раздела, но имеются детальные ссылки на известные курсы механики.

5) По этой же причине в книгу не включено изложение гидро- и аэродинамики и теории теплопередачи, а также вопросы, смежные с электро- и радиотехникой.

6) В книге даны детальные ссылки на математические руководства. Используемый математический аппарат, кроме параграфов, отмеченных звездочкой, находится в соответствии с

обычной программой курса анализа в инженерно-физических вузах. В случае квантовой механики математический аппарат дан в самой книге, поскольку он имеет специфический характер и не излагается в традиционных курсах математики. Однако и здесь математический аппарат излагается отдельно от основного текста.

7) Поскольку книга предназначена для систематического изучения теоретической физики, то нет необходимости стремиться к единому уровню доступности различных разделов. Курс теоретической физики обычно излагается в течение двух лет, на третьем и четвертом курсах физических вузов. Преподавателям теоретической физики хорошо известно, как повышаются за это время возможности восприятия и усвоения более трудных вопросов курса. Существенно расширяется также математический аппарат. Вместе с тем, следует иметь в виду, что физикам-экспериментаторам постоянно приходится сталкиваться с новейшими вопросами квантовой механики, последовательное освещение которых требует использования сравнительно сложных расчетных методов. Поэтому в квантовой механике (ч. V книги) изложены некоторые вопросы, более сложные, чем в остальных разделах книги. По той же причине сравнительно широко представлен в книге разбор различных применений кинетического уравнения, связанный с выполнением громоздких вычислений.

Целевая направленность книги отразилась на содержании отдельных разделов.

В книгу включены те вопросы, которые связаны с актуальными задачами современной физики, и сознательно сокращено при этом изложение некоторых традиционных проблем.

Первая часть содержит основы теории электромагнитного поля в вакууме. В основу изложения положена система уравнений Максвелла — Лоренца. Предполагается, что читатель знаком с основными фактами из области электромагнетизма по курсу общей физики. Основное внимание уделено теории излучения и движению заряженных частиц во внешних полях.

В части II, посвященной теории относительности, принята четырехмерная форма изложения, которая не только отвечает духу теории, но и преобладает в современной литературе. Более полно изложены вопросы динамики теории относительности. Освещен ряд новейших приложений теории относительности, в частности к вопросам ядерной физики. Некоторые из этих приложений еще не вошли в учебную литературу.

В части III, которая представляет переработанный вариант книги В. Г. Левича «Введение в статистическую физику», излагаются как вопросы статистической физики, так и основы статистической термодинамики. Классическое изложение термоди-

намики потребовало бы слишком много места и не представлялось нам необходимым.

Рассмотрены некоторые основные положения физической кинетики, которые в физических вузах излагаются обычно не в общем курсе теоретической физики, а в специальном курсе.

Том второй содержит теорию электромагнитных процессов в веществе (ч. IV) и квантовую механику (ч. V).

В четвертой части курса вопросам, смежным с теоретической электротехникой и радиотехникой (специальные задачи электростатики, теория цепей переменного тока с сосредоточенными и распределенными постоянными, излучение антенн и т. п.), уделено сравнительно мало внимания. Более подробно разобрана феноменологическая теория электропроводности, а также дано представление о физике плазменного состояния вещества. В квантовую механику кроме традиционных вопросов нерелятивистской теории включены основные представления современной релятивистской квантовой механики. Относительно подробно представлены приложения квантовой механики к теории твердого тела.

Опыт преподавания теоретической физики показывает, что при первоначальном знакомстве с предметом часто наибольшие трудности вызывает не восприятие новых физических идей, а проведение соответствующих вычислений. Поэтому все выкладки и расчеты приведены в возможно более полном виде.

Звездочкой отмечены параграфы, посвященные более сложным вопросам и основанные на разделах математики, выходящих за рамки программы III курса, а также параграфы, не имеющие самодовлеющего интереса, но необходимые для дальнейших разделов книги. Их при первом чтении можно пропустить.

Мы привели для удобства краткий вывод встречающихся формул векторного анализа, а также необходимые сведения по интегралам Фурье и теории δ-функции, которой мы широко пользовались.

Нумерация формул и параграфов проведена по каждой из частей. Ссылки на приложения снабжены римской нумерацией. Включение в книгу задач повлекло бы за собой непомерное увеличение ее объема.

Авторы надеются, что после ознакомления с основами теоретической физики, изложенными в данной книге, читатели сумеют перейти к более глубокому ее изучению по фундаментальному многотомному курсу Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица. Научные и педагогические идеи этого курса оказали большое влияние на авторов, которые являются учениками Л. Д. Ландау первого (В. Г. Левич) и второго (Ю. А. Вдовин, В. А. Мямлин) научных поколений.

Мы предполагаем, что с опытными фактами из области атомной и, частично, ядерной физики читатель может познакомиться по курсу Э. В. Шпольского «Атомная физика», методические и педагогические идеи которого также оказали влияние на содержание данной книги.

Том I (части I—IV) написан В. Г. Левичем, кроме части § 22 ч. II и приложения III, написанных Ю. А. Вдовиным.

В основу книги были положены программа и курс теоретической физики, в течение ряда лет читавшийся в Московском инженерно-физическом институте.

Авторы благодарят своих коллег — членов кафедры теоретической физики Московского инженерно-физического института, педагогический опыт которых способствовал появлению книги.

Особая благодарность выражается товарищам, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд ценных замечаний: Б. М. Графову, Р. Р. Догонадзе, В. А. Кирьянову, В. С. Крылову, В. П. Смилге, Ю. А. Чизмаджеву, Ю. И. Яламову, а также редакторам книги А. И. Алексееву и Б. Л. Лившицу.

Мы ясно представляем, что сделанная нами попытка создания курса теоретической физики, одновременно достаточно полного по содержанию и доступного по форме изложения, является весьма сложной задачей. Несомненно, что в ряде случаев наше изложение не свободно от недостатков и промахов. Поэтому авторы заранее благодарны читателям и коллегам за возможные критические замечания, которые будут учтены в дальнейшей работе над книгой.

ЧАСТЬ I

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1. Задачи теоретической физики

Физика — наука, в первую очередь экспериментальная. Однако уже в работах Ньютона и других основоположников современной физики для получения количественных формулировок физических — на первых порах главным образом механических — закономерностей успешно применялись математические приемы и методы.

В последнее столетие применение математических методов в физике настолько расширилось и углубилось, что возникла особая отрасль физики — теоретическая физика. Перед теоретической физикой стоят задачи двоякого рода:

1. Выражение физических закономерностей в виде количественных соотношений и установление внутренних взаимосвязей между наблюдающимися опытными фактами.

2. Применение математических методов исследования к нахождению новых физических закономерностей; предсказание новых, еще не обнаруженных на опыте взаимосвязей между физическими явлениями.

Таким образом, теоретическая физика является по своим методам математической, а по содержанию — физической наукой.

Из сказанного ясно, что именно в теоретической физике содержатся и окончательно отшлифовываются общие теоретические воззрения относительно сущности разнообразных физических процессов.

Сказанное лучше всего пояснить на простом примере. Исследователи, опытным путем установившие планетарную модель атома, наличие у атомов дискретных допустимых значений энергии и т. п. факты, внесли важнейший вклад в физическую теорию. Однако теоретическая физика не могла ограничиться качественными, модельными представлениями о строении атома.

Из этого вытекает, что теоретическая физика стремится сформулировать наиболее общие количественные физические

законы, отражающие существо возможно более широкого круга явлений. Примерами подобных законов могут служить законы механики (законы Ньютона), законы электромагнитного поля (уравнения Максвелла — Лоренца), законы квантовой механики и т. п.

Основой общих физических законов не могут служить логические рассуждения. Этой основой могут быть только опытные факты. Поэтому наиболее общие количественные соотношения теоретической физики не «выводятся», но представляют обобщенную формулировку наблюдавшихся физических закономерностей. С другой стороны, как мы увидим на конкретных примерах, в ряде случаев количественные выражения физических законов явились результатом научного предвидения.

Располагая количественной формулировкой общих физических законов, теоретическая физика может перейти к выполнению второй части своей программы — установлению новых закономерностей и связей с помощью математических методов исследования. На этом пути теоретическая физика добилась таких успехов, по сравнению с которыми бледнеют даже такие примеры научного предвидения, как открытие астрономом Леверье планеты Нептун в XIX веке.

В виде примеров можно указать открытие Максвеллом тока смещения и установление на этой основе электромагнитной природы света; создание Эйнштейном теории относительности и, в частности, установление связи между массой и энергией; предсказание квантовой механикой (созданной де Бройлем, Шредингером и Гейзенбергом) существования волновых свойств у микрочастиц — электронов, протонов и др.; предсказание теорией Дирака существования и свойств позитрона и других античастиц и т. д. Роль теоретической физики в новейшем развитии ядерной физики и использовании атомной энергии общеизвестна.

Необходимо подчеркнуть, что математические расчетные методы теоретической физики имеют очень своеобразный характер.

Теоретическая физика не является разделом математики. В теоретической физике не пытаются найти точные физические законы, определяющие поведение даже сравнительно простых систем. Точный учет всех возможных влияний и взаимосвязей сделал бы неразрешимыми уже самые простые задачи. Ни на одном этапе исследования в теоретической физике не упускают из виду необходимость учета главных, определяющих связей и пренебрежения побочными, несущественными обстоятельствами.

Соотношения и уравнения теоретической физики столь сложны, что практически всегда приходится идти по пути приближенных расчетов. Для того чтобы уяснить, какие приближения возможны и целесообразны, а какие незаконны и не имеют физического смысла, очень часто приходится исходить из имеющихся

опытных данных. Вместе с тем, формулы и соотношения, которые принципиально не могут быть проверены на опыте, вообще не рассматриваются в теоретической физике. Все усилия теоретической физики, как и физики экспериментальной, направлены на выяснение объективно существующих связей, физических закономерностей природы.

Физическая теория, объясняющая известные, но не способная предсказать новые факты, всегда считается неудовлетворительной. С другой стороны, высшей оценкой правильности физической теории является экспериментальное подтверждение предсказанных ею фактов.

В свою очередь выяснение новых явлений, обнаруженных опытным путем, служит стимулом для дальнейшего развития теоретической физики. Таким образом, экспериментальная и теоретическая физика составляют единое и неразрывное целое.

§ 2. Нахождение векторного поля по его дифференциальным характеристикам

Мы увидим в дальнейшем, что состояние электромагнитного поля характеризуется заданием его векторных характеристик, — напряженностей электрического и магнитного полей. По этой причине при изложении общей теории и при решении конкретных задач в теории электромагнитного поля широко используется специфический математический аппарат, так называемый векторный анализ.

Описание электромагнитного поля, не опирающееся на аппарат векторного анализа, возможное в принципе, потребовало бы весьма громоздких выкладок и сложных преобразований. Поэтому дальнейшее изложение ведется исключительно на основе векторного анализа. Хотя мы предполагаем, что его основы известны читателю, в приложении I дан краткий вывод всех встречающихся формул и преобразований.

Мы разберем здесь один важный вопрос математической теории произвольного векторного поля. Значение этого вопроса для теории электромагнитного поля заключается в том, что общая расчетная схема теории поля строится по образу и подобию приводимого ниже расчета произвольного векторного поля.

Пусть во всем пространстве имеется векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Относительно поведения вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ в бесконечно удаленных точках пространства будут сделаны некоторые допущения, о которых будет сказано ниже.

Предположим, что заданы интегральные характеристики поля — поток вектора $\oint \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}$ и циркуляция вектора $\oint \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{l}$ в каждой точке пространства. Мы увидим в дальнейшем, что в случае

электромагнитных полей именно эти характеристики векторного поля содержат величины, непосредственно измеряемые на опыте. Покажем, что если заданы указанные характеристики поля, то может быть найдено и само векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Если $\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int f(\boldsymbol{r})\, dV$, где $f(\boldsymbol{r})$ — известная функция координат, то на основании теоремы Гаусса — Остроградского

$$\oint \boldsymbol{a}\, dS = \int \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dV = \int f(\boldsymbol{r})\, dV, \tag{2,1}$$

откуда, ввиду произвольного характера области интегрирования с объемом V, имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = f(\boldsymbol{r}). \tag{2,2}$$

Таким образом, задание потока вектора через замкнутую поверхность в каждой точке пространства эквивалентно заданию дивергенции этого вектора.

Далее, на основании теоремы Стокса,

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l} = \int \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{S}, \tag{2,3}$$

где $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$ — известная векторная функция координат. Отсюда

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}). \tag{2,4}$$

Задание циркуляции вектора эквивалентно заданию его ротора.

Покажем, как можно найти векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, если известны дивергенция и ротор вектора $\boldsymbol{a}$ во всем пространстве.

Разложим поле $\boldsymbol{a}$ на два поля: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, так, чтобы имели место соотношения:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}_1 = f(\boldsymbol{r}), \tag{2,5}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}_1 = 0, \tag{2,5'}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}_2 = 0, \tag{2,6}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}). \tag{2,6'}$$

Векторное поле $\boldsymbol{a}_1$ является безвихревым; линии векторного поля $\boldsymbol{a}_1$ начинаются и заканчиваются в источниках и стоках, интенсивность которых определяется функцией $f(\boldsymbol{r})$. Векторное поле $\boldsymbol{a}_2$ не имеет источников и стоков и является соленоидальным полем.

Начнем с рассмотрения поля $\boldsymbol{a}_1$. Поскольку поле $\boldsymbol{a}_1$ не имеет вихрей, вектор $\boldsymbol{a}_1$ можно представить в виде градиента некоторой вспомогательной скалярной функции

$$\boldsymbol{a}_1 = \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}), \tag{2,7}$$

где $\varphi(\boldsymbol{r})$ — функция, именуемая скалярным потенциалом.

Подставляя уравнение (2,7) в (2,5), находим:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = f(\boldsymbol{r}),$$

или

$$\Delta\varphi = f(\boldsymbol{r}), \tag{2,8}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Уравнение в частных производных второго порядка (2,8) называется уравнением Пуассона. Его общее решение мы получим в § 24.

Здесь мы приведем лишь конечный результат и убедимся в том, что написанное решение удовлетворяет уравнению (2,8). Оказывается, что решение уравнения Пуассона имеет вид

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f(\boldsymbol{r}_0)\,dV_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f(x_0,\,y_0,\,z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \tag{2,9}$$

где (x, y, z) — координаты точки наблюдения, т. е. той точки, в которой ищется значение функции φ, а x_0, y_0, z_0 — переменные интегрирования. Величина $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ представляет расстояние от точки $\boldsymbol{r}_0$ до точки наблюдения $\boldsymbol{r}$.

Подставляя (2,9) в (2,8), можно легко убедиться, что написанное выражение действительно удовлетворяет исходному уравнению

$$\Delta\varphi = -\Delta\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(x_0,\,y_0,\,z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int f(x_0,\,y_0,\,z_0)\,dV_0\,\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} =$$

$$= \int f(x_0,\,y_0,\,z_0)\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0 = f(x,\,y,\,z).$$

При этом мы воспользовались свойствами δ-функции и функции $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$ (см. приложение III). Оператор Δ означает дифференцирование по координатам $\boldsymbol{r}$ и может быть внесен под знак интегрирования по координатам $\boldsymbol{r}_0$.

Если интегрирование ведется по всему пространству, для существования и сходимости интеграла (2,9) необходимо, чтобы подынтегральная функция $f(\boldsymbol{r}_0)$ удовлетворяла очевидному требованию

$$|f(\boldsymbol{r}_0)\cdot r_0^{2+\lambda}| < A \quad \text{при} \quad r_0 \to \infty, \tag{2,10}$$

где A — конечная величина и $\lambda > 0$. Иными словами, функция $f(\boldsymbol{r}_0)$ должна убывать при $r_0 \to \infty$ быстрее, чем функция $\frac{1}{r_0^2}$.

При выполнении этого условия интеграл (2,9) сходится, а функция $\varphi(r)$ убывает при неограниченном возрастании своего аргумента по закону

$$|\varphi(r)| < \frac{1}{r}. \qquad (2,11)$$

Если выполняется условие (2,10), мы можем утверждать, что (2,9) представляет решение уравнения (2,8).

Зная функцию $\varphi(\boldsymbol{r})$ и воспользовавшись определением (2,7), находим $\boldsymbol{a}_1$:

$$\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{f(\boldsymbol{r}_0)\, dV_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}. \qquad (2,12)$$

Перейдем теперь к определению вектора $\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r})$. Векторное поле $\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r})$ имеет соленоидальный характер и, следовательно, вектор $\boldsymbol{a}_2$ может быть представлен в виде ротора некоторого вспомогательного вектора $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{a}_2 = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}). \qquad (2,13)$$

Векторная функция $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ получила название векторного потенциала, или вектора-потенциала.

Из определения (2,13) ясно, что уравнение (2,6) удовлетворено автоматически:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

Для полного определения вектора-потенциала $\boldsymbol{A}$ нужно еще задать значение его дивергенции $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$, которая пока остается произвольной. Положим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \qquad (2,14)$$

Несколько ниже мы убедимся, что последнее допущение не ограничивает общности наших рассуждений. Подставляя (2,13) в (2,6′), имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - \Delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}).$$

Учитывая условие (2,14), находим

$$\Delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) \qquad (2,15)$$

или в скалярном виде

$$\Delta A_x = -\omega_x(\boldsymbol{r}),$$
$$\Delta A_y = -\omega_y(\boldsymbol{r}),$$
$$\Delta A_z = -\omega_z(\boldsymbol{r}).$$

Компоненты вектора-потенциала удовлетворяют тем же уравнениям, что и скалярный потенциал φ. Их решения гласят:

$$A_x = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega_x(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0, \tag{2,16}$$

$$A_y = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega_y(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0, \tag{2,16$'$}$$

$$A_z = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega_z(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0. \tag{2,16$''$}$$

Если функции ω_x, ω_y и ω_z удовлетворяют тем же условиям поведения на бесконечности, каким должна удовлетворять функция $f(\boldsymbol{r}_0)$ в (2,9), интегралы в выражениях (2,16)—(2,16″) сходятся. При этом формулы (2,16)—(2,16″) определяют вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$. Зная вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$, можно найти вектор $\boldsymbol{a}_2$ простым дифференцированием:

$$\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0. \tag{2,17}$$

Также путем дифференцирования можно убедиться, что найденный вектор-потенциал удовлетворяет условию (2,14).

Таким образом, векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ полностью определяется по заданным во всем пространстве значениям его дивергенции $f(\boldsymbol{r}_0)$ и ротора $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_0)$:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\boldsymbol{A} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{f(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0 + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0. \tag{2,18}$$

Поскольку дивергенция и ротор вектора $\boldsymbol{a}$ однозначно связаны с потоком и циркуляцией этого вектора, можно также утверждать, что векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ полностью определено потоком и циркуляцией этого вектора.

Остановимся еще на важном вопросе о возможности выбора $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ в виде (2,14). Определением (2,13) вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ задан неоднозначно. К нему можно прибавить градиент произвольной функции ψ, т. е. положить

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\psi. \tag{2,19}$$

Имеем, очевидно,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}' = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

Таким образом, прибавление к $\boldsymbol{A}$ градиента произвольной функции ψ приводит к прежнему значению вектора $\boldsymbol{a}$.

Пусть, в отличие от условия (2,14), $\operatorname{div}\boldsymbol{A} \neq 0$. Тогда всегда можно перейти к новому вектору-потенциалу $\boldsymbol{A}'$ по формуле (2,19). Для него имеем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}' = \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \Delta\psi.$$

Не ограничивая общности рассуждений, всегда можно выбрать произвольную функцию ψ так, чтобы при любом $\operatorname{div} A \neq 0$ имело место равенство

$$\Delta\psi = -\operatorname{div} A.$$

Это значит, что всегда можно считать

$$\operatorname{div} A' = 0$$

и, следовательно, условие (2,14) имеет совершенно общий характер.

Легко показать, наконец, что найденное выражение для $\boldsymbol{a}$ является единственным решением уравнений (2,2)—(2,4)[1].

Найденное нами выражение для векторного поля a, в зависимости от значений его дивергенции $f(\boldsymbol{r})$ и ротора $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$, не связано с какими-либо допущениями о физическом смысле и характере рассматриваемых величин. Оно, вместе с тем, является прототипом тех вычислений, которые обычно приходится проделывать в теории электромагнитного поля для нахождения электрического и магнитного полей.

§ 3. Заряды и частицы

Согласно современным представлениям, в природе существуют так называемые элементарные частицы и системы, имеющие сложную структуру, и построенные из элементарных частиц — атомы и молекулы. Элементарные частицы и системы, состоящие из сравнительно небольшого числа элементарных частиц — отдельные атомы или молекулы, принято называть микрочастицами и микросистемами, тела, состоящие из большого числа атомов — макросистемами.

В настоящее время известно достаточно большое число элементарных частиц, более трех десятков. Взаимоотношения между элементарными частицами весьма далеки от простой схемы, принимавшейся в физике еще сравнительно недавно, когда были известны лишь две элементарные частицы — протон и электрон.

С основными свойствами микрочастиц и микросистем мы познакомимся в дальнейшем и главным образом в пятой части курса. Наиболее глубокие вопросы, касающиеся строения и свойств элементарных частиц, еще не выяснены в современной физике, а ряд установленных положений настолько сложен, что их изложение не может быть проведено в рамках этой книги.

В первой части книги будут рассмотрены некоторые свойства микрочастиц и микросистем в приближении классической

---

[1]) См., например, Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, 1951, стр. 213.

физики. В чем оно заключается и каковы границы его применимости, будет видно из дальнейшего

Важнейшей характеристикой всех микрочастиц является закон взаимодействия между ними. Микрочастицы могут взаимодействовать, находясь на некотором расстоянии друг от друга

В настоящее время известно, что между микрочастицами существует несколько различных видов взаимодействия — электромагнитное, гравитационное, ядерное. Каждый вид взаимодействия связывается с определенной характеристикой частицы. В первой части курса, включенной в эту книгу, мы будем интересоваться только электромагнитным взаимодействием. Под электромагнитным взаимодействием понимают определенный вид силового взаимодействия между некоторыми частицами, характер которого будет рассмотрен ниже.

Электромагнитное взаимодействие не зависит от масс частиц, которые определяют их гравитационное взаимодействие. Оказывается, что в простейшем случае неподвижных относительно друг друга и притом одинаковых частиц, сила взаимодействия определяется только расстоянием между ними и единственной характеристикой частиц, именуемой их зарядом.

Закон взаимодействия неподвижных относительно друг друга частиц выражается известной формулой:

$$\boldsymbol{F} = \frac{e_1 e_2}{r^3} \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{F}$ — сила, $\boldsymbol{r}$ — расстояние между частицами и e_i — их заряд. Это — так называемый закон Кулона.

Заряд частицы данного типа является одной из основных, первичных ее характеристик. Сила взаимодействия между частицами одного типа — электронами, протонами и т. д. — всегда сила отталкивания. Взаимодействие между частицами разных типов может иметь характер как отталкивания, так и притяжения. Условно принято считать электроны заряженными отрицательно, протоны — положительно. Знак заряда остальных заряженных элементарных частиц — μ- и π-мезонов, K-мезонов и гиперонов определяется по отношению к электронам и протонам так, чтобы он отвечал правилу — одноименно заряженные частицы отталкиваются, разноименно заряженные частицы притягиваются друг к другу

Нейтроны, нейтрино, нейтриальные π-мезоны могут служить примерами нейтральных частиц. Нейтральным частицам нельзя приписать какой-либо отличный от нуля заряд.

Удивительной особенностью заряда является то, что у всех элементарных частиц он имеет одно и то же абсолютное значение.

В системе CGSE, которой мы будем пользоваться в дальнейшем, элементарный заряд равен $|e| = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ $г^{1/2} \cdot см^{3/2} \cdot сек^{-1}$.

Второй особенностью заряда, выражающей его фундаментальное значение как характеристики частиц, является свойство сохранения. Во всех процессах, происходящих в природе, алгебраическая сумма зарядов не изменяется (закон сохранения заряда). Закон сохранения заряда является одним из самых важных законов природы.

Большинство тел в земных условиях построено из атомов и молекул — квазинейтральных систем, у которых положительный заряд ядра равен отрицательному заряду электронной оболочки. При ионизации, т. е. при переходе в заряженное состояние, атом теряет один или несколько электронов. В силу закона сохранения заряда при ионизации возникает положительный ион с зарядом $N|e|$ и N электронов с зарядом $-|e|$, где N — целое число. При присоединении к атому лишнего электрона он может превращаться в отрицательный ион с зарядом $-|e|$. Таким образом, заряд всякой системы является целочисленным, кратным элементарному заряду e.

В микроскопической классической теории поля мы будем изучать поведение систем, состоящих из сравнительно небольшого числа частиц, например, отдельных электронов или протонов, ионов и т. д. Будем считать отдельные элементарные частицы не имеющими протяженности и движущимися по законам классической механики. Внутренней структурой элементарных частиц мы интересоваться не будем. Такая идеализация, как это будет ясно из дальнейшего, в ряде случаев является чрезмерно грубой. Законы классической физики имеют ограниченную применимость к микросистемам, а иногда и вовсе не применимы к ним. В частности, они непригодны для рассмотрения явлений, происходящих в весьма малой области пространства вблизи заряда. Поэтому в ряде случаев, которые будут обсуждаться ниже, наши упрощающие предположения приведут к трудностям и противоречиям.

В квантовой механике (часть пятая курса) представления о законах, определяющих движение и свойства микроскопических частиц, будут существенно развиты и усовершенствованы.

Поскольку нас пока будут интересовать только свойства частиц, связанные с их электромагнитным взаимодействием, мы будем просто говорить о взаимодействии зарядов.

§ 4. Поле неподвижных зарядов

Пусть в некоторых точках пространства $\mathbf{r}_i$ закреплены заряды e_i. Поместим в область пространства вблизи этой совокупности зарядов некоторый заряд ε, настолько малый, что изме-

нением свойств системы, вызываемым внесением в него заряда ε, можно пренебречь. Такой заряд мы будем называть пробным. Наблюдая за пробным зарядом, мы обнаружим, что в каждой точке пространства $\boldsymbol{r}$ на него действует сила $\boldsymbol{F}$, пропорциональная величине заряда ε, т. е.

$$\boldsymbol{F}=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}). \qquad (4,1)$$

Строго говоря, сила $\boldsymbol{F}$ действует на пробный заряд, расположенный на любом расстоянии от фиксированных зарядов. Однако, поскольку величина силы быстро уменьшается (см. ниже) с расстоянием, практически лишь вблизи зарядов проявляется действие силы $\boldsymbol{F}$. Ту область пространства, в которой на пробный заряд действует сила $\boldsymbol{F}$, мы будем называть электрическим полем неподвижных зарядов или электростатическим полем. Достаточно удаленные области пространства, в которых сила $\boldsymbol{F}$ становится пренебрежимо малой, мы будем приближенно считать бесконечно удаленными и считать, что в них поле отсутствует.

Поскольку пробный заряд не влияет на свойства поля системы зарядов, вектор $\boldsymbol{E}$ характеризует свойства этого поля. Мы впредь будем именовать $\boldsymbol{E}$ напряженностью электрического поля или, для краткости, электрическим полем.

Исследуя силу $\boldsymbol{F}$, действующую на пробный заряд, можно определить значение вектора $\boldsymbol{E}$ в каждой точке поля и тем самым установить свойства электрического поля неподвижных зарядов. При этом оказывается возможным найти некоторые общие свойства полей неподвижных зарядов, не зависящие от конкретного характера расположения и величин зарядов, создающих поле.

Опыт показывает, что электрическое поле системы неподвижных зарядов обладает аддитивными свойствами: напряженность суммарного электрического поля, образованного несколькими зарядами, равна векторной сумме полей $\boldsymbol{E}_i$, созданных каждым зарядом, т. е.

$$\boldsymbol{E}=\sum \boldsymbol{E}_i. \qquad (4,2)$$

Это важнейшее свойство электрических полей именуется обычно свойством суперпозиции.

Изучая движение пробного заряда, можно найти векторные линии электростатического поля $\boldsymbol{E}$.

Зная распределение поля $\boldsymbol{E}$ в пространстве, можно определить распределение и взаимодействие создающих его зарядов. Естественно, может показаться, что введение поля есть некоторый математический прием, удобный способ описания взаимодействия. Ниже мы увидим, что в действительности это не так и что поле обладает той же степенью реальности, что и частицы.

Полю можно приписать те же характеристики, что и частицам — энергию, импульс, массу и т. д. Более того, мы покажем, что пространственно разделенные частицы не могут действовать друг на друга непосредственно (нет так называемого дальнодействия). Частица изменяет состояние поля в непосредственной близости от себя. Это изменение состояния поля — возмущение — движется в пространстве от точки к точке и доходит до другой частицы. Такова концепция полевого взаимодействия, или теория близкодействия. Более подробно теория близкодействия будет рассмотрена в § 24 ч. I и § 8 ч. II.

Оказывается, что работа, совершаемая электростатическим полем над пробным зарядом при перемещении его из точки r_1 в точку r_2, не зависит от пути, по которому происходило это перемещение. Это означает, что работа перемещения заряда по замкнутому контуру равна нулю, т. е.

$$W = e \oint E\,dl = 0.$$

Таким образом, для линий электростатического поля всегда имеет место равенство

$$\oint E\,dl = 0 \tag{4,3}$$

при интегрировании по произвольному замкнутому контуру.

В соответствии со сказанным выше мы должны от равенства (4,3) перейти к дифференциальной характеристике поля. Для этого воспользуемся теоремой Стокса, которая дает

$$\oint E\,dl = \int \operatorname{rot} E\,dS = 0. \tag{4,4}$$

Поскольку поверхность интегрирования в (4,4) является произвольной, из (4,4) следует

$$\operatorname{rot} E = 0. \tag{4,5}$$

Формула (4,5) показывает, что электростатическое поле является безвихревым. В электростатическом поле не существует замкнутых линий. Следовательно, должны существовать источники и стоки, на которых начинаются и заканчиваются линии поля.

Опыт показывает, что в электростатическом поле источниками и стоками линий напряженности поля служат электрические заряды. Условно считают, что линии поля начинаются на положительных и оканчиваются на отрицательных зарядах. Поскольку заряды являются источниками и стоками, поток вектора E по любой замкнутой поверхности, окружающей каждый заряд, отличен от нуля. Если внутрь поверхности интегрирова-

ния S попадает некоторый заряд $\sum e_i$, где суммирование означает алгебраическое суммирование по всем зарядам, то поток вектора $\boldsymbol{E}$ должен быть пропорционален этой сумме, т. е.

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = \text{const} \sum e_i. \tag{4,6}$$

Это утверждение носит название теоремы Гаусса.

Мы подчеркиваем, что в рамках нашего приближения заряды имеют точечный харатер, а величина заряда любой системы кратна элементарному заряду.

Для упрощения математических выкладок нам необходимо сделать важный шаг и перейти от дискретного, прерывного распределения зарядов к непрерывному.

Пусть в некотором малом объеме δV находится достаточно большое число зарядов. Поскольку заряды находятся на малых расстояниях друг от друга, для математического описания зарядов удобно заменить истинное распределение точечных дискретных зарядов фиктивным непрерывным распределением. Именно, заменяя объем δV бесконечно малым объемом dV и полагая, что в бесконечно малом обьеме заключен бесконечно малый заряд de, можно написать

$$de = \rho\, dV,$$

где $\rho = \frac{de}{dV}$ — плотность заряда, т. е. заряд в данной точке пространства, отнесенный к единице объема. В случае неподвижных зарядов ρ является непрерывной функцией точки $\rho(\boldsymbol{r})$.

Подчеркнем, что переход к непрерывной плотности имеет чисто математический характер. Его не следует смешивать с аналогичной операцией, с которой мы познакомимся в ч. IV, посвященной электромагнитным процессам в веществе.

Связь между математическим описанием дискретного распределения точечных зарядов и непрерывной функцией $\rho(\boldsymbol{r})$ можно установить с помощью аппарата δ-функции (см. приложение III). Именно, поскольку полный заряд в произвольном объеме может быть выражен в виде

$$e = \int \rho(\boldsymbol{r})\, dV = \sum e_i,$$

где суммирование ведется по всем зарядам, находящимся в объеме V, мы можем написать

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i e_i\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i),$$

где $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор i-го заряда. Действительно, подставляя это значение $\rho(\boldsymbol{r})$, имеем

$$\int \rho(\boldsymbol{r})\, dV = \sum_i e_i \int \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\, dV = \sum e_i.$$

В частности, плотность заряда, отвечающая одному заряду, находящемуся в точке $\boldsymbol{r}_0$, может быть представлена в виде

$$\rho(\boldsymbol{r}) = e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0).$$

Важно отметить, что введение непрерывной плотности заряда позволяет как само поле, так и распределение зарядов описать непрерывными функциями точки.

Пользуясь определением плотности заряда, можем представить (4,6) в виде

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = \mathrm{const} \int \rho\, dV, \qquad (4{,}7)$$

где интеграл справа берется по объему, охватываемому поверхностью S. По теореме Гаусса—Остроградского

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = \int \mathrm{div}\, \boldsymbol{E}\, dV. \qquad (4{,}8)$$

Поэтому из формул (4.7) и (4.8) получаем

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{E} = \mathrm{const}\cdot\rho. \qquad (4{,}9)$$

Формула (4,9) определяет дивергенцию поля в каждой точке пространства. Значение коэффициента пропорциональности в формуле (4,9) может быть определено только из опытных данных (наример, при опытной проверке закона Кулона).

В системе CGSE эта постоянная равна 4π, так что

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \qquad (4{,}10)$$

По причинам, которые будут пояснены ниже, уравнения (4,5) и (4,10) мы будем именовать уравнениями Максвелла для электростатического поля или, кратко, уравнениями электростатики.

Поскольку электростатическое поле является безвихревым, в соответствии с общими приемами описания векторного поля, можно ввести скаляр φ, именуемый электростатическим потенциалом и определяемый соотношением

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\, \varphi. \qquad (4{,}11)$$

Знак минус означает, что вектор $\boldsymbol{E}$ направлен в сторону быстрейшего убывания потенциала φ. Выбор такого направления является условным.

Величина

$$\int_1^2 \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\int_1^2 \operatorname{grad}\varphi\,d\boldsymbol{l} = \varphi_1 - \varphi_2, \qquad (4,12)$$

называемая электродвижущей силой или, кратко, э. д. с., будет часто встречаться в дальнейшем. (Подчеркнем, что электродвижущая сила не является силой ни по своей природе, ни по размерности. Название э. д. с. имеет характер исторической традиции.)

В электростатическом поле электродвижущая сила равна разности электростатических потенциалов в соответствующих точках.

Подставляя определение (4,11) в уравнения электростатического поля (4,5) и (4,10), мы видим, что первое из них удовлетворяется тождественно, тогда как второе дает

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -4\pi\rho,$$

или, на основании формулы (I, 49),

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \qquad (4,13)$$

Полученное нами уравнение Пуассона будет обсуждаться в § 14.

§ 5. Уравнение непрерывности

В дальнейшем нам надо будет перейти к рассмотрению более сложного случая полей движущихся зарядов. Движение электрических зарядов в пространстве приводит к переносу заряда, именуемому электрическим током, или, для краткости, просто током. Электрический ток мы будем характеризовать вектором плотности тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$, определяемым равенством

$$\boldsymbol{j} = \sum e_i \boldsymbol{v}_i,$$

где e_i — величина заряда, а $\boldsymbol{v}_i$ — вектор скорости i-го заряда. Суммирование ведется по всем зарядам, находящимся в момент времени t в единичном объеме, окружающем точку $\boldsymbol{r}$.

При непрерывном распределении заряда плотность тока можно представить в виде

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}. \qquad (5,1)$$

Вектор плотности тока представляет, очевидно, величину заряда, пересекающего за 1 *сек* воображаемую единичную площадку, находящуюся в момент времени t в точке $\boldsymbol{r}$.

Значения функции ρ и $\boldsymbol{v}$, т. е. плотности заряда и скорости его перемещения, не могут быть произвольными, но должны удовлетворять требованиям закона сохранения заряда.

Рассмотрим замкнутую поверхность, внутри которой помещен некоторый заряд $e=\int \rho\, dV$, и найдем производную $-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV$. Здесь интегрирование ведется по объему V, заключенному внутри поверхности S. Величина производной (взятая со знаком минус) представляет убыль заряда, заключенного внутри поверхности S, в единицу времени. Поскольку электрические заряды не исчезают и не возникают вновь, убыль заряда в объеме V равна потоку заряда, выходящему за 1 *сек* через поверхность S, охватывающую этот объем. Следовательно, имеет место равенство

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV=\oint \rho \boldsymbol{v}\, dS. \qquad (5,2)$$

Переходя в последнем интеграле к интегрированию по объему, получаем

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV=\int \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})\, dV.$$

Изменяя порядок независимых операций интегрирования по объему и дифференцирования по времени, имеем

$$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV=\int \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})\, dV.$$

Ввиду произвольности объема интегрирования, последнее равенство дает

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})=0, \\ \text{или}\quad &\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5,3)$$

Формулы (5,3), представляющие математическое выражение закона сохранения заряда, носят название уравнения непрерывности.

При стационарных процессах, когда распределение плотности заряда не изменяется во времени, уравнение непрерывности гласит:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})=0, \\ \text{или}\quad &\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5,4)$$

Равенства (5,4) показывают, что при стационарных процессах векторное поле плотности тока имеет соленоидальный характер.

Траектории движущихся зарядов являются замкнутыми, а векторные линии вектора j образуют замкнутые, не пересекающиеся между собой трубки тока[1]).

В дальнейшем мы будем пользоваться понятием полного тока I через поверхность S. По определению,

$$I = \int \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S} = \int j_n\, dS,$$

где интегрирование ведется по поверхности S. Ток I дает величину полного заряда, проходящего за 1 *сек* через поверхность S.

§ 6. Электромагнитное поле зарядов, движущихся с постоянной скоростью

Мы перейдем теперь к изучению поля движущихся зарядов. Поле движущихся зарядов мы будем именовать электромагнитным полем. Свойства электромагнитного поля существенно сложнее свойств электростатического поля. Установление основных закономерностей, определяющих поведение электромагнитных полей, явилось частично результатом экспериментального изучения электромагнитных явлений (Эрстед, Ампер, Ом и Фарадей), частично результатом теоретического предвидения (Максвелл), которое лишь позднее было подтверждено на опыте (Герц).

Изложение истории развития электромагнетизма выходит за рамки этой книги. Подчеркнем, однако, что поскольку атомистический характер заряда был открыт лишь в конце XIX — начале XX века, все опыты и теоретическая их интерпретация относились к явлениям в материальных средах. Мы изложим результаты этих опытов на языке микроскопической физики, имеющей дело с зарядами, движущимися в пустоте. Иными словами, не останавливаясь на постановке самих опытов, мы представим их результат в некоторой обобщенной форме, в которой исключено влияние среды и конкретных условий проведения экспериментов.

Основные законы электромагнитного поля, которые будут изложены ниже, в настоящее время опираются не только на многочисленные и разнообразные опытные данные, но составляют основу современной электро- и радиотехники.

Рассмотрим прежде всего движение некоторой совокупности зарядов вдоль трубки или контура l, происходящее с постоянной скоростью. Иными словами, предположим, что в некотором контуре идет электрический ток, плотность которого j не

---

[1]) В частном случае системы растекающихся зарядов трубки тока не замкнуты, а уходят одним концом на бесконечность

зависит от времени. На практике электрический ток проще всего осуществить с помощью металлических проводников. Однако, поскольку в этой главе мы не будем касаться движения зарядов в материальных средах, под контуром с током будем понимать не металлический проводник, но некоторую воображаемую поверхность — трубку, охватывающую совокупность кривых — траекторий заряженных частиц, движущихся в пустоте.

Поместим вблизи контура с постоянным током пробный заряд. Мы не будем интересоваться воздействием контура с током на неподвижный пробный заряд ε. Новые факты обнаруживаются, если пробный заряд движется по отношению к контуру тока с некоторой скоростью $\boldsymbol{v}$. Именно, оказывается, что движущийся пробный заряд позволяет обнаружить поле, неразрывно связанное с зарядами, движущимися в контуре с током, и отличное по своему характеру от электростатического поля. Это поле получило название магнитного поля. Название это связано с тем, что совершенно такое же поле создают постоянные магниты.

Магнитное поле, как и электростатическое, имеет векторный характер. Оно характеризуется некоторым вектором $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$, именуемым напряженностью магнитного поля или, кратко, магнитным полем.

Опыт показывает, что на пробный заряд действует сила

$$\boldsymbol{F}_M = \frac{\varepsilon}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]. \tag{6,1}$$

Эта сила получила название силы Лоренца[1]).

Как видно из формулы (6,1), сила Лоренца перпендикулярна к скорости пробного заряда $\boldsymbol{v}$ и вектору $\boldsymbol{H}$, образуя с ними правовинтовую систему.

Числовой множитель пропорциональности определится на опыте, если потребовать, чтобы вектор $\boldsymbol{H}$ имел ту же размерность, что и вектор $\boldsymbol{E}$. В системе CGSE числовой коэффициент c равен $3 \cdot 10^{10}$ *см/сек* и численно совпадает со значением мировой постоянной — скоростью света в пустоте.

Как и для всякого векторного поля, введем основную характеристику магнитного поля — интеграл $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}$, называемый магнитодвижущей силой[2]).

---

[1]) Часто мы будем называть силой Лоренца полную силу, действующую на заряженную частицу в электрическом и магнитном полях и равную сумме (6,1) и (4,1).

[2]) По аналогии с электродвижущей силой в электростатике. Подчеркнем, что магнитодвижущая сила, как и электродвижущая, — скаляр и называется силой лишь по традиции.

Исследование магнитных полей постоянных токов показало, что величина магнитодвижущей силы равна

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi I}{c}, \tag{6,2}$$

где $I = \int \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S}_0$ представляет полный ток, проходящий за 1 секунду через сечение S_0 контура (трубки) с током.

Формула (6,2) показывает, что магнитодвижущая сила отлична от нуля только в таком контуре, который охватывает трубку с током. В простейшем случае прямолинейного контура с током (или прямолинейного участка контура) векторные линии магнитного поля образуют систему концентрических окружностей, охватывающих контур (рис. 1). Величина магнитодвижущей силы пропорциональна полному току I в контуре. Формула (6,2) выражает закон Эрстеда, установившего в 1820—26 гг. связь между электрическим током и магнитными явлениями.

Рис. 1.

Как и в электростатике, опыт приводит к интегральному соотношению между характеристикой зарядов (током I) и полем $\boldsymbol{H}$. Для получения дифференциальной характеристики поля заменим в выражении для полного тока поверхность интегрирования S_0 произвольной поверхностью S, которая стягивается контуром с током. Плотность тока j отлична от нуля только при интегрировании по сечению трубки с током S_0. Вне этого сечения плотность тока равна нулю, так что можно написать

$$I = \int \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S}_0 = \int \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S}.$$

Тогда

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} \int \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S}.$$

Пользуясь теоремой Стокса, находим

$$\int \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{S} = \frac{4\pi}{c} \int \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S},$$

откуда, ввиду произвольности поверхности S, следует

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}. \tag{6,3}$$

Мы видим, что магнитное поле имеет вихревой характер. Уравнение (6,3) определяет вихри магнитного поля в каждой точке

пространства в зависимости от значения плотности тока j в этой точке пространства.

Уравнение (6,3) согласуется со стационарным уравнением непрерывности (5,4) и является поэтому внутренне непротиворечивым. Действительно, вычислив дивергенцию от обеих частей (6,3), приходим к равенству

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0. \qquad (6,4)$$

Формула (6,3) показывает, что движение электрических зарядов неразрывно связано с магнитным полем или, как не совсем правильно говорят, движение зарядов порождает магнитное поле.

Для однозначного определения магнитного поля необходимо знать вторую его дифференциальную характеристику — $\operatorname{div}\boldsymbol{H}$. Для ее нахождения рассмотрим поток вектора $\boldsymbol{H}$ через произвольную замкнутую поверхность $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S}$. Экспериментальное изучение распределения магнитных полей постоянных токов показывает, что магнитные поля всегда имеют чисто соленоидальный характер и

$$\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S}=0. \qquad (6,5)$$

Следовательно,

$$\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S}=\int \operatorname{div}\boldsymbol{H}\,dV=0$$

или ввиду произвольности объема интегрирования

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0. \qquad (6,6)$$

Таким образом, источники и стоки у магнитного поля отсутствуют. Линии магнитного поля всегда замкнуты или уходят на бесконечность[1]).

Уравнения (6,3) и (6,6) полностью определяют магнитное поле постоянных токов. Магнитное поле постоянных токов, как и электростатическое поле, обладает аддитивными свойствами. Это следует, в частности, из линейного характера уравнений поля (6,3) и (6,6). Магнитное и электростатическое поля являются независимыми друг от друга. Любое электростатическое поле (при данном распределении движущихся зарядов) не влияет на магнитное поле этих зарядов.

В заключение отметим еще одну весьма важную особенность магнитного поля $\boldsymbol{H}$. В отличие от электростатического поля $\boldsymbol{E}$,

---

[1]) Строго говоря, при сложных конфигурациях токов возможно еще существование линий поля не замкнутых, но плотно заполняющих поверхность. См. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966.

которое характеризуется полярным вектором, вектор напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$ является аксиальным или псевдовектором. Это видно из формулы (6,1) для силы Лоренца Действительно, из определения напряженности по формуле (6,1) видно, что поведение вектора $\boldsymbol{H}$ при отражении в начале координат $\boldsymbol{r} \to (-\boldsymbol{r})$ определяется поведением полярных векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{v}$ и свойствами их векторного произведения. При замене $\boldsymbol{r} \to (-\boldsymbol{r})$ направления векторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{v}$ изменяются на обратные; знак векторного произведения также изменяется на обратный. Следовательно, при замене $\boldsymbol{r} \to (-\boldsymbol{r})$ вектор $\boldsymbol{H}$ должен оставаться неизменным. Это свойство и является признаком аксиального вектора.

§ 7. Электромагнитное поле движущихся зарядов. Общий случай

Новые результаты получаются при рассмотрении нестационарного движения зарядов или, что то же самое, нестационарных токов в некоторых контурах.

Подчеркнем, прежде всего, что уравнение (6,3) не может оставаться справедливым для нестационарных токов (см. (6 4)): при нестационарных процессах закон сохранения заряда выражается формулой (5,3). Таким образом, соотношение (6,3) при нестационарных процессах противоречит закону сохранения заряда.

Важнейшим обстоятельством, принципиально отличающим нестационарные магнитное и электрическое поля от стационарных, является существование взаимосвязи между ними.

Фарадей обнаружил, что изменение во времени магнитного поля влечет за собой возникновение электрического поля (явление электромагнитной индукции). Максвелл теоретически предсказал, что изменение во времени электрического поля приводит к появлению магнитного поля. Это предсказание теории впоследствии нашло свое подтверждение в опытах Герца.

Опытами Фарадея было установлено, что изменение во времени потока вектора магнитного поля через произвольную поверхность S сопровождается появлением электродвижущей силы в контуре, стягивающем эту поверхность, т. е.

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S}. \qquad (7,1)$$

Коэффициент пропорциональности c оказался численно равным $3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, т. е. скорости света в пустоте. На рис. 2 схематически представлена связь между изменением магнитного поля $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$ и электродвижущей силой. Если линии поля вектора

$\frac{\partial H}{\partial t}$ изображаются прямыми линиями, идущими слева направо, то линии электрического поля представляют концентрические окружности, охватывающие соответствующие прямые. Направления векторов электрического поля E и $\frac{\partial H}{\partial t}$ показаны на рис. 2 стрелками.

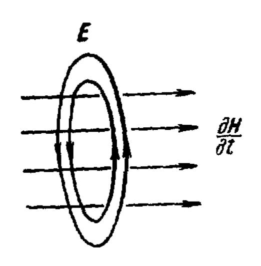


Рис. 2.

Формула (7,1) представляет обобщенный закон индукции Фарадея (1831 г.). Обобщение заключается в следующем: опытные данные Фарадея относились к контуру из проволочного (металлического) проводника. Возникновению в проводнике индуцированного электрического поля отвечает появление тока в контуре, который и измерялся непосредственно. В формуле (7,1) интегрирование ведется по совершенно произвольному контуру, никак не связанному с наличием проводников. Это означает, что первичным фактором является появления поля в контуре. Электрический ток — некоторое вторичное явление, связанное с конкретной природой контура — наличием в нем металлических свойств. Обобщенный закон индукции Фарадея в форме (7,1) устанавливает взаимосвязь между магнитным и электрическим полями. Знак в формуле (7,1) отвечает известному правилу Ленца.

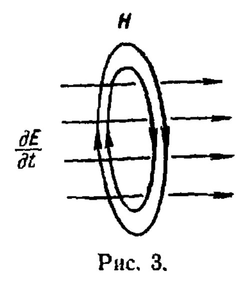


Рис. 3.

Максвеллом была высказана гипотеза, впоследствии подтвердившаяся на опыте, что наряду с законом (7,1) имеет место аналогичное соотношение между изменением электрического поля во времени и магнитным полем.

Именно, при изменении потока электрического поля во времени $\frac{\partial}{\partial t}\int E\,dS$, в контуре, охватывающем поверхность S, возникает магнитодвижущая сила, равная

$$\oint H\,dl = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int E\,dS, \tag{7,2}$$

где коэффициент c имеет то же значение, что и в формуле (7,1). Рис. 3 иллюстрирует связь между изменением электрического поля, характеризуемым вектором $\frac{\partial E}{\partial t}$, и линиями магнитного поля. Если вектор $\frac{\partial E}{\partial t}$ в каждой точке поля представлен семейством прямых, то линии магнитного поля представляют концентрические окружности, охватывающие эти прямые.

Мы отложим обсуждение соображений, которые приводят к установлению связи между изменением электрического поля и циркуляцией магнитного поля, до § 9. Что же касается связи закона (7,2) с опытными данными, то, как мы увидим ниже, оказывается, что с (7,2) связано существование электромагнитных волн.

Если кривая L, по которой вычисляется циркуляция магнитного поля, охватывает контур с электрическим током, то полная магнитодвижущая сила выражается формулой (см. (6,2) и (7,2))

$$\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{S}. \qquad (7,3)$$

От формул (7,1) и (7,3), содержащих интегральные характеристики полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, можно перейти к дифференциальным характеристикам. Именно, с помощью теоремы Стокса можно переписать (7,1) в виде

$$\int \operatorname{rot}\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{S} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\,d\boldsymbol{S}. \qquad (7,4)$$

При этом мы переменили порядок выполнения независимых операций дифференцирования по времени и интегрирования по фиксированной в пространстве поверхности (см., однако, ч. IV, § 23).

Ввиду произвольности поверхности интегрирования в формуле (7,4), из равенства интегралов вытекает равенство подынтегральных выражений:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \qquad (7,5)$$

Мы видим, что переменное во времени электрическое поле, в отличие от электростатического, имеет, вообще говоря, вихревой характер. Значение вихря вектора $\boldsymbol{E}$ в данной точке определяется быстротой изменения во времени магнитного поля в той же точке.

Преобразуя совершенно аналогично интегральное соотношение (7,3), имеем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (7,6)$$

Последнее соотношение показывает, что вихри магнитного поля в каждой точке пространства определяются плотностью тока зарядов $\boldsymbol{j}$ и изменением электрического поля во времени.

Бросается в глаза симметрия уравнений для вихрей электрического и магнитного полей, т. е. уравнений (7,5) и (7,6). Изменение магнитного поля сопровождается появлением вихревого электрического поля. Наоборот, изменение электрического поля связано с появлением вихревого магнитного поля. Однако,

наряду со сходством этих уравнений, между ними имеется и чрезвычайно важное различие; во-первых, уравнения (7,5) и (7,6) отличаются знаками перед производными по времени; во-вторых, в общем случае вихри магнитного поля зависят не только от быстроты изменения электрического поля, но и от плотности тока j. Между тем, не существует «магнитных зарядов», которые могут двигаться в пространстве и создавать «ток магнитных зарядов».

Уравнения (7,3) и (7,5) определяют вихри электрического и магнитного полей. Для однозначного определения полей должны быть заданы еще дивергенции электрического и магнитного полей.

Для определения последних найдем дивергенции от обеих частей уравнений (7,5) и (7,6). Начнем с последнего уравнения. Имеем

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=0=\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{E}\right).$$

С помощью закона сохранения заряда (5,3) последнее уравнение можно легко преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{E}-4\pi\rho)=0,$$

откуда

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho+f(\boldsymbol{r}),$$

где функция $f(\boldsymbol{r})$ — любая функция, зависящая только от координат, но не от времени.

Допустим, что в произвольный момент времени, который можно считать начальным, заряды покоились Тогда в начальный момент должно было удовлетворяться уравнение электростатического поля (4,10), и функция $f(\boldsymbol{r})$ была равна нулю. Поскольку $f(\boldsymbol{r})$ не зависит от времени, это означает, что $f(\boldsymbol{r})$ всегда равна нулю. Дивергенция электрического поля как в нестационарных, так и в стационарных полях определяется формулой

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho. \tag{7,7}$$

Аналогично, беря дивергенцию от (7,5), находим

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0=\operatorname{div}\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

или

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=f_1(\boldsymbol{r}).$$

Снова предполагая, что в начальный момент времени магнитное поле имело стационарный характер, и повторяя только что приведенное рассуждение, приходим к выводу:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0. \tag{7,8}$$

Магнитное поле как в стационарных, так и в нестационарных полях имеет чисто вихревой (соленоидальный) характер. Магнитных зарядов, на которых начинаются и заканчиваются линии магнитного поля, не существует ни в стационарных, ни в переменных полях.

§ 8. Система уравнений Максвелла — Лоренца

Полученная нами система уравнений (7,5)—(7,8) электромагнитного поля в вакууме носит название системы уравнений Максвелла—Лоренца. Она была установлена Максвеллом в 1873 г. для более общего случая электромагнитных полей в материальных средах и Лоренцем в 1895 г. для системы зарядов, движущихся в вакууме. Хочется еще раз подчеркнуть, что уравнения Максвелла—Лоренца не вытекают из каких-либо более общих теоретических положений, но являются обобщенной записью наблюдавшихся на опыте фактов.

Выпишем еще раз уравнения Максвелла, объединив их в две пары:

Дифференциальная форма — Интегральная форма

I пара:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S}; \tag{8,1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \qquad \oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S} = 0. \tag{8,2}$$

II пара:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \boldsymbol{j}}{c}, \qquad \oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{S}; \tag{8,3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \qquad \oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{S} = 4\pi e. \tag{8,4}$$

Считая известными распределения токов и зарядов, можно с помощью уравнений Максвелла найти шесть неизвестных компонент векторов поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Как мы видели в предыдущем параграфе, уравнения для дивергенции $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ следуют из уравнений для ротора и начальных условий. Поэтому в системе из восьми скалярных дифференциальных уравнений Максвелла имеется только шесть независимых уравнений.

Уравнение (8,1), представляющее обобщение закона индукции Фарадея, устанавливает, что изменение во времени магнитного поля порождает вихревое электрическое поле. Уравнение (8,2) показывает, что магнитное поле имеет соленоидальный характер и линии магнитного поля либо замкнуты, либо уходят на бесконечность.

Из уравнения (8,3) следует, что вихревое магнитное поле создается при движении зарядов и при изменении во времени электрического поля. По аналогии с электрическим током величину $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ называют *током смещения*, а сумму

обоих членов — полным током. Тогда можно сказать, что вихревое магнитное поле порождается полным током, в который оба слагаемых входят на равных правах. Наконец, уравнение (8,4) показывает, что источниками электрического поля служат электрические заряды. При заданном распределении плотности зарядов и токов уравнения Максвелла полностью определяют электрическое $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ и магнитное $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ поля.

Уравнения Максвелла представляют систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных. В силу линейности уравнений Максвелла, имеет место принцип суперпозиции электромагнитных полей. Если $\boldsymbol{E}_i$ и $\boldsymbol{H}_i$ являются решениями уравнений Максвелла, то $\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_i$ и $\boldsymbol{H} = \sum \boldsymbol{H}_i$ также решения этих уравнений.

Задача об интегрировании уравнений в частных производных становится определенной только в том случае, когда задана система граничных и начальных условий. Граничные и начальные условия будут разобраны нами ниже, в § 24 этой части.

До сих пор мы ничего не говорили о распределении зарядов и характере их движения в пространстве. Между тем, распределение зарядов и скоростей их движения не может быть задано совершенно произвольно. Плотность заряда и плотность тока (скорость движения зарядов) связаны между собой законом сохранения заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{8,5}$$

На движущиеся в электромагнитном поле заряды действует сила Лоренца. Уравнения движения заряда можно написать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right), \tag{8,6}$$

где $\boldsymbol{p}$ — импульс частицы.

Поле, которое нужно подставлять в (8,6), представляет полное поле, как внешнее, создаваемое другими зарядами, так и поле, создаваемое самим зарядом. Последнее также должно оказывать влияние на движение частицы. Однако в большинстве случаев собственное поле можно считать слабым и не учитывать его (см. § 29). В этом приближении векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в (8,6) означают внешнее поле, действующее на частицу. Закон движения (8,6) можно записать и для непрерывно распределенных зарядов, если под $\boldsymbol{p}_0$ понимать импульс частиц в единице объема, а силу Лоренца заменить плотностью силы (т. е. силой, отнесенной к единице объема). Тогда

$$\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{p}_0 \, dV = \int \rho \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right) dV, \tag{8,7}$$

или

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{p}_0 = \rho \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}] \right). \tag{8,8}$$

Мы упоминали уже, что уравнения поля были первоначально сформулированы Максвеллом для электромагнитных процессов в веществе. Лоренц установил их применимость к системе, состоящей из поля и зарядов, и дополнил уравнением движения последних.

Поэтому полную систему уравнений (8,1)—(8,8) часто называют уравнениями Максвелла — Лоренца. Уравнения Максвелла — Лоренца заключают в себе полное описание поведения системы, состоящей из полей и зарядов. Если задано значение функций ρ и $\boldsymbol{v}$ и начальное значение полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, то интегрирование этих уравнений позволяет найти распределение электрического и магнитного полей в пространстве в любой последующий момент времени. Таким образом, в электродинамике, как и в механике, задание состояния системы в начальный момент времени и закона изменения состояния позволяет однозначно определить ее состояние в последующие моменты времени.

Заметим, что в рамках этой главы сила Лоренца, действующая на движущийся заряд, должна быть принята как эмпирическая формула. В ч. II будет показано, что выражение для силы Лоренца вытекает как следствие из некоторых, более общих законов физики.

Область применимости уравнений Максвелла — Лоренца чрезвычайно широка. Они определяют характер электромагнитных процессов в космических масштабах, составляют основу современной электро- и радиотехники, позволяют исследовать электромагнитные явления, происходящие с отдельными зарядами. Но, тем не менее, как мы увидим в дальнейшем, уравнения Максвелла — Лоренца и основанная на них классическая теория поля не являются выражением универсальных законов природы и имеют свою ограниченную область применимости.

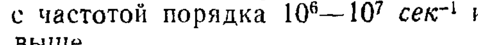
Целый ряд электромагнитных процессов, и прежде всего внутриатомных, лежит по ту сторону границ области применимости уравнений Максвелла — Лоренца. Вопрос об установлении этих границ мы будем неоднократно обсуждать в дальнейшем.

§ 9. Ток смещения

В отличие от электрического тока $\boldsymbol{j}$, имеющего весьма простой и наглядный смысл, ток смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ не связан с движением каких-либо зарядов.

Ток смещения был введен Максвеллом и интерпретирован им в терминах общепринятой в то время, но оставленной сейчас как ошибочной, теории эфира.

Нетрудно понять, почему в середине XIX века для получения формулы (7,6) нельзя было прибегнуть к данным эксперимента. Скорости движения электрических зарядов обычно очень велики. Поэтому ток $\rho\boldsymbol{v}$ всегда велик по сравнению с током смещения $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$, если только электрическое поле не изменяется во времени очень быстро. Оценки показывают, что оба слагаемых в полном токе могут иметь одинаковый порядок величины при периодическом изменении вектора $\boldsymbol{E}$ во времени



с частотой порядка 10^6—10^7 *сек*$^{-1}$ и выше.

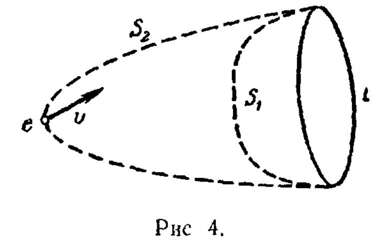


Рис. 4.

Это — область радиочастот, неизвестных физике середины XIX века. Лишь в 1888 г. Г. Герц, впервые экспериментально установивший существование электромагнитных волн, доказал тем самым реальность тока смещения.

То обстоятельство, что ток $\boldsymbol{j}$ не всегда может быть ответственным за появление магнитного поля, очень ясно иллюстрируется следующим рассуждением. Пусть в пространстве движется электричекий заряд e. Будем искать напряженность магнитного поля, создаваемого этим зарядом в некотором контуре L (рис. 4). Согласно теореме Стокса,

$$\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \int \operatorname{rot}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S} = \frac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{S},$$

где поверхностью интегрирования является любая поверхность, опирающаяся на контур L.

Рассмотрим в некоторый момент времени две поверхности S_1 и S_2, опирающиеся на контур L. Совершенно ясно, что с точки зрения проходящего через них электрического тока они неэквивалентны. Через поверхность S_1 никакого тока в данный момент не проходит, поскольку заряд e ее еще не достиг. Наоборот, поверхность S_2 пересекается зарядом, и ток через нее отличен от нуля. Мы приходим, таким образом, к явному противоречию:

$$\int\limits_{S_1} \operatorname{rot}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S}_1 = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{S_2} \operatorname{rot}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S}_2 \neq 0,$$

хотя, согласно теореме Стокса, эти интегралы должны быть равны между собой. В действительности, движущийся заряд создает на поверхности S_1 некоторое электрическое поле, изме-

няющееся во времени. Расчет, который будет выполнен в § 20 этой части, показывает, что производная от этого электрического поля по времени, проинтегрированная по поверхности S_1, даст точно такое же значение для $\oint H\,dl$ в контуре L, как и интеграл $4\pi\int j\,dS$ по поверхности S_2. Таким образом, с неизбежностью необходимо принять эквивалентность (в смысле создания циркуляции магнитного поля в некотором контуре) тока зарядов и изменения электрического поля для любого движущегося заряда.

Введение тока смещения может быть сделано на основе следующих формальных рассуждений: необходимо найти такое обобщение закона (6,3), которое не противоречило бы закону сохранения заряда (5,3) при нестационарном изменении поля. Написав (6,3) в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{C}), \tag{9,1}$$

где $\boldsymbol{C}$ — неизвестный вектор, и взяв дивергенцию от обеих частей (9,1), находим

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0 = \frac{4\pi}{c}(\operatorname{div}\boldsymbol{j} + \operatorname{div}\boldsymbol{C}),$$

или

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{C}) = 0. \tag{9,2}$$

Неизвестный вектор C дополняет плотность тока j так, чтобы суммарная величина $(j + C)$ обладала свойствами соленоидального вектора, имеющего замкнутые линии тока.

Диверенция вектора C может быть найдена из уравнений (9,2), (5,3) и (4,10). Имеем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{C} = -\operatorname{div}\boldsymbol{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},$$

откуда следует, что сам вектор $\boldsymbol{C}$ равен

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}, t),$$

где $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}, t)$ — любой вектор, удовлетворяющий условию

$$\operatorname{div}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}, t) = 0.$$

Нет каких-либо оснований заранее полагать вектор $\boldsymbol{b}$ равным нулю.

Гениальная идея Максвелла заключалась в том, что между электрическим и магнитным полями существует глубокая

симметрия и взаимосвязь. Эта симметрия была подчеркнута нами при рассмотрении свойств уравнений Максвелла. Для получения симметрии между полями необходимо положить $b \equiv 0$. Тогда

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{9,3}$$

и, в частности, в той области пространства, где нет движущихся зарядов, $\boldsymbol{j} = 0$ и уравнения для $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}$ имеет вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Ротор вектора $\boldsymbol{H}$ определяется быстротой изменения вектора $\boldsymbol{E}$, тогда как, согласно закону индукции Фарадея (7,5), ротор вектора $\boldsymbol{E}$ определяется быстротой изменения вектора $\boldsymbol{H}$. Только в тех областях пространства, в которых плотность тока отлична от нуля, симметрия между электрическим и магнитным полем нарушается. Поскольку истинных магнитных зарядов не существует и магнитное поле всегда имеет чисто соленоидальный характер, в уравнении для электромагнитной индукции (7,5) нет члена, аналогичного $\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$ в уравнении (9,3). Наоборот, если бы вектор $\boldsymbol{b}$ был отличен от нуля, никакой симметрии между электрическим и магнитным полями не существовало бы.

В заключение подчеркнем, что поскольку ток смещения в пустоте $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial E}{\partial t}$ не связан с перемещением или изменением состояния каких-либо частиц, ему нельзя сопоставить какую-либо механическую модель, позволяющую наглядно представить себе эту физическую величину. С понятиями «плотность зарядов» или «плотность тока» мы для наглядности сопоставляем покоящиеся или движущиеся частицы — шарики или дробинки. Векторы поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ изображались силовыми линиями или линиями поля, которые раньше было принято наглядно представлять в виде некоторых натяжений в упругой среде — электромагнитном эфире. Такие механические модели были, несомненно, полезны, поскольку они помогали ясному пониманию смысла соответствующих величин. Ток смещения в пустоте — первая из встретившихся нам величин, которую невозможно описать при помощи механической аналогии, придав ей, тем самым, наглядный характер. В дальнейшем нам придется иметь дело с очень большим числом важных физических понятий и величин, не имеющих механических аналогов, которым, как и току смещения в пустоте, нельзя сопоставить какую-либо наглядную модель.

§ 10. Потенциалы электромагнитного поля

В § 2 мы видели, что для нахождения стационарного векторного поля по заданным в каждой точке пространства значениям дивергенции и ротора удобно ввести вспомогательные величины, определенные соотношениями (2,7) и (2,13). Оказывается, что точно таким же образом можно поступить и в более общем случае нестационарной системы векторных полей — электрического и магнитного.

Вектор магнитного поля всегда является соленоидальным и его дивергенция равна нулю. Поэтому, как и в § 2, положим

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \qquad (10,1)$$

где вспомогательный вектор $\boldsymbol{A}$ носит название вектора-потенциала. Вектор-потенциал $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ является функцией точки и времени. При этом уравнение (8,2) будет автоматически удовлетворено, поскольку при любом $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ имеет место

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0.$$

Подстановка соотношения (10,1) в (8,1) дает

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$

или

$$\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Последнее уравнение показывает, что вектор $\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$ является потенциальным вектором, т. е. может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

где φ — функция координат и времени, которую мы будем именовать скалярным потенциалом.

В отличие от случая электростатики, вектор электрического поля, имеющего вихревой характер, уже не может быть представлен в виде градиента какого-либо потенциала. Он выражается через совокупность скалярного и векторного потенциалов по формуле

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad (10,2)$$

причем второе слагаемое, связывающее электрическое поле с магнитными величинами, выражает закон электромагнитной индукции.

Для определения A и φ у нас остаются еще уравнения (8,3) и (8,4). Первое из них дает

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},$$

или, по формуле (I, 50),

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\Delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \qquad (10,3)$$

Уравнение (8,4) в свою очередь дает

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A}. \qquad (10,4)$$

Потенциалы A и φ являются вспомогательными величинами, введенными для упрощения уравнений поля. Мы наложим на них такие условия, которые, не изменяя соотношений (10,1) и (10,2), позволят сделать уравнения (10,3) и (10,4) независимыми. Соотношение (10,1) определяет ротор вектора-потенциала A. Однако сам вектор-потенциал A еще не определен, поскольку его дивергенция не задана. Если задать дивергенцию A соотношением

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \qquad (10,5)$$

именуемым соотношением Лоренца, то (10,3) превратится в

$$\Delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}. \qquad (10,6)$$

Уравнение (10,4) получит совершенно аналогичную форму:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \qquad (10,7)$$

Найденные уравнения для электромагнитных потенциалов совершенно эквивалентны исходным уравнениям Максвелла. Если заданы распределения зарядов $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и токов $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$, удовлетворяющие уравнению непрерывности, то интегрирование уравнений (10,6) и (10,7) позволяет найти векторный и скалярный потенциалы. Векторы поля найдутся при этом путем дифференцирования по формулам (10,1) и (10,2).

Уравнение типа

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \psi(\boldsymbol{r}, t),$$

где $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ — заданная функция координат и времени, носит название уравнения Даламбера. Часто его записывают с помощью так называемого дифференциального оператора Даламбера:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

в более компактном виде:

$$\Box\varphi = \psi(\boldsymbol{r}, t).$$

В частном случае однородного уравнения при $\psi(\boldsymbol{r}, t) = 0$, из уравнения Даламбера получается так называемое волновое уравнение:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

В другом частном случае не зависящих от времени функций $\varphi(\boldsymbol{r})$ и $\psi(\boldsymbol{r})$ уравнение Даламбера превращается в уже известное (ср. (2,8)) из электростатики уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = \psi(\boldsymbol{r}).$$

С математической стороны уравнения второго порядка — уравнение Пуассона, волновое уравнение и уравнение Даламбера — проще, чем исходные уравнения Максвелла в частных производных первого порядка. Как мы увидим в дальнейшем, можно получить общее решение уравнения Даламбера и волнового уравнения в интегральной форме, как это сделано для уравнения Пуассона (ср. (2,9)). Именно по этой причине при исследовании свойств электромагнитных полей, а также и при решении ряда конкретных задач использование потенциалов весьма целесообразно, и метод потенциалов представляет основной расчетный аппарат теории поля.

§ 11. Калибровочная инвариантность потенциалов

Мы подчеркивали уже, что потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ представляют вспомогательные величины, не имеющие непосредственного физического смысла. Реальный смысл имеют напряженности поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в каждой точке поля и в каждый момент времени. Эти величины могут быть определены по тем силам, которые действуют на пробный заряд, движущийся в поле.

Значения $\boldsymbol{A}$ и φ не могут быть измерены и потому сами по себе потенциалы не должны входить в какие-либо окончательные выражения теории поля. Действительно, определение потенциалов $\boldsymbol{A}$ и φ по формулам (10,1) и (10,2) является неоднозначным и допускает известный произвол.

Сейчас мы должны обсудить вопрос о степени произвола, существующей в определении потенциалов в общем случае.

Из определения вектора-потенциала (10,1) следует, что если совершить преобразование

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' + \operatorname{grad} \psi(\boldsymbol{r}, t), \tag{11,1}$$

где $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ — произвольная фукнция кооординат и времени, то мы придем к тому же самому значению напряженности поля $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{A}' + \operatorname{grad} \psi(\boldsymbol{r}, t)) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}' + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}'.$$

Рассмотрим теперь определение скалярного потенциала φ, заданное формулой (10,2). Преобразование (11,1) приводит к значению

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\operatorname{grad}\left(\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t}.$$

Производя замену

$$\varphi \to \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{11,2}$$

мы приходим к прежнему выражению для напряженности электрического поля.

Таким образом, вектор-потенциал опеделен с точностью до вектора, представляющего градиент произвольной функции координат и времени $\psi(\boldsymbol{r}, t)$, скалярный потенциал — с точностью до производной по времени от той же функции. В частиости, в случае электрического поля, не зависящего от времени, к потенциалу φ можно прибавить любую постоянную и прийти к прежнему значению напряженности поля $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}(\varphi + \mathrm{const}) = -\operatorname{grad} \varphi$.

В общем случае можно сказать, что два поля, описываемых системой потенциалов $\boldsymbol{A}'$ и φ' и, соответственно, $\boldsymbol{A}$ и φ, являются физически тождественными, если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}'$, φ и φ' могут быть связаны между собой соотношениями (11,1) и (11,2). То же можно выразить следующими словами: уравнения электромагнитного поля неизменны (инвариантны) по отношению к преобразованиям (11,1) и (11,2).

Различные способы выбора потенциалов $\boldsymbol{A}$ и φ, оставляющие неизменными напряженности поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, называются разными калибровками потенциалов. Инвариантность полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и всех остальных соотношений теории поля по отношению к разным калибровкам именуется калибровочной (или градиентной) инвариантностью. Свойство калибровочной инвариантности позволяет, распоряжаясь до известной степени произвольно выбором электромагнитных потенциалов, подбирать их так, чтобы соотношения теории поля приобретали максимально простой вид.

Одним из примеров такого подбора может служить условие Лоренца, введенное в предыдущем параграфе.

Мы можем теперь показать, что условие Лоренца отвечает определенной калибровке потенциалов (калибровка Лоренца). Действительно, пусть для некоторых A_0 и φ_0 условие Лоренца не выполняется, так что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \chi(\boldsymbol{r}, t) \neq 0.$$

Произведем калибровочное преобразование (11,1) и (11,2):

$$\boldsymbol{A}_0 \to \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\psi,$$
$$\varphi_0 \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Тогда имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \chi(\boldsymbol{r}, t) - \Delta\psi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \tag{11,3}$$

Если потребовать, чтобы функция ψ удовлетворяла уравнению Даламбера

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \chi(\boldsymbol{r}, t), \tag{11,4}$$

то для преобразованных потенциалов A и φ условие Лоренца будет выполняться. Мы упоминали уже, что уравнение Даламбера всегда имеет решение. Поэтому при заданном значении χ всегда можно подобрать функцию ψ, удовлетворяющую (11,4).

Следует подчеркнуть, что произвольная функция $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ не определяется еще полностью уравнением (11,4). К ней можно прибавить функцию $\psi_0(\boldsymbol{r}, t)$, являющуюся решением однородного уравнения

$$\Delta\psi_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} = 0.$$

При этом, совершая преобразования

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' + \operatorname{grad}\psi_0,$$
$$\varphi \to \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_0}{\partial t},$$

мы приходим снова к тем же значениям напряженностей E и H:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}',$$
$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi',$$

а потенциалы A' и φ' будут удовлетворять условию Лоренца:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0.$$

Поэтому, оставаясь в рамках калибровки Лоренца, можно подобрать функцию ψ так, чтобы выполнялось еще одно условие, налагаемое на одну из четырех величин: φ, A_x, A_y, A_z.

Наряду с калибровкой Лоренца, иногда (особенно в квантовой теории поля) пользуются другой, так называемой кулоновской калибровкой, при которой

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0.$$

При этой калибровке уравнение для потенциалов (уравнения (10,3) и (10,4)) приобретают вид

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},$$
$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

При кулоновской калибровке скалярный потенциал φ определяется распределением зарядов так, как будто бы они покоились. Само собой разумеется, напряженности поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, найденные из решений уравнений для потенциалов с кулоновской калибровкой и калибровкой Лоренца, совпадают. В рамках этой книги мы будем пользоваться, как правило, калибровкой Лоренца.

§ 12. Закон сохранения энергии в электромагнитном поле

Первым важным общим следствием, которое вытекает из системы уравнений Максвелла, является существование энергии электромагнитного поля. Для нахождения энергии электромагнитного поля рассмотрим замкнутую систему, состоящую из поля и частиц. Найдем работу W, произведенную силами поля над частицами, находящимися в объеме V. Относя эту работу к единице времени и считая заряды непрерывно распределенными в пространстве, пользуясь (8,8), мы можем написать

$$\frac{dW}{dt} = \int \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\,dV = \int \rho\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)\boldsymbol{v}\,dV =$$
$$= \int \rho\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}\,dV + \frac{1}{c}\int \rho[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\boldsymbol{v}\,dV =$$
$$= \int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV + \frac{1}{c}\int \rho[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}]\boldsymbol{H}\,dV = \int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV. \quad (12,1)$$

Работа силы магнитного поля равна нулю, поскольку эта сила перпендикулярна к скорости частицы.

Преобразуем соотношение (12,1), используя уравнения Максвелла. Выражая плотность тока через векторы поля с помощью (8,3), имеем

$$\frac{dW}{dt} = \int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV = \frac{c}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\,dV - \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\,dV. \quad (12,2)$$

Как мы неоднократно подчеркивали, должна существовать симметрия между электрическим и магнитным полями. Между тем, уравнение (12,2) асимметрично. Мы можем придать ему должный вид, прибавив к правой его части выражение

$$-\frac{c}{4\pi}\int \boldsymbol{H}\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right)dV,$$

равное, в силу уравнения Максвелла (8,1), нулю. Это дает

$$\frac{dW}{dt}=\int \boldsymbol{jE}\,dV=$$

$$=\frac{c}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E})\,dV-\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right)dV. \qquad (12,3)$$

Первый интеграл в правой части уравнения (12,3) может быть преобразован к поверхностному. Именно, по формуле (I, 44) имеем

$$-(\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E})=\operatorname{div}[\boldsymbol{EH}].$$

Поэтому

$$\int(\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E})\,dV=-\int\operatorname{div}[\boldsymbol{EH}]\,dV=-\oint[\boldsymbol{EH}]\,d\boldsymbol{S},$$

и вместо (12,3) можно написать

$$\frac{dW}{dt}=\int\boldsymbol{jE}\,dV=-\frac{c}{4\pi}\oint[\boldsymbol{EH}]\,d\boldsymbol{S}-\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV. \qquad (12,4)$$

Рассмотрим случай, когда объем интегрирования V неограниченно возрастает и охватывает все пространство. Если векторы поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ стремятся к нулю при $r\to\infty$ быстрее, чем по закону $\frac{1}{r}$, то поверхностный интеграл обращается в нуль. Действительно, подынтегральное выражение убывает быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$, а величина поверхности растет, как r^2. Тогда (12,4) превращается в равенство

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{d}{dt}\int u_0\,dV, \qquad (12,5)$$

где обозначено

$$u_0=\frac{E^2+H^2}{8\pi}. \qquad (12,6)$$

Поскольку в левой части (12,5) стоит работа, произведенная за 1 *сек*, правая часть представляет убыль энергии в единицу времени.

В замкнутой системе, состоящей из поля и частиц, работа, произведенная электромагнитным полем над частицами, равна убыли энергии самого поля. При этом электромагнитному полю

необходимо приписать энергию, плотность которой u_0 выражается формулой (12,6). Выражение $u = \int \frac{E^2+H^2}{8\pi} dV$ не может быть сведено к величинам, определяющимся только взаимным расположением и движением зарядов. Поэтому его нельзя считать потенциальной энергией системы взаимодействующих частиц. Плотность энергии поля, в частности, отлична от нуля в той области пространства, которая свободна от частиц.

Наличие у электромагнитного поля энергии наглядно показывает, что оно никоим образом не может рассматриваться как математическая фикция, как нечто, делающее удобным расчет взаимодействия между заряженными частицами. Напротив, поле обладает той же степенью реальности, что и частицы. В реальности электромагнитного поля мы будем неоднократно убеждаться и на основании других фактов. При этом, однако, в рамках классической электродинамики остается не ясным взаимоотношение между полем и зарядами. Только квантовая электродинамика, которая будет кратко изложена в части V этой книги, позволила более глубоко проникнуть в сущность взаимосвязи между полем и частицами.

Рассмотрим теперь область поля, имеющую конечный объем V и ограниченную поверхностью S. Тогда уравнение (12,4), выражающее закон сохранения энергии, показывает, что убыль энергии поля в единицу времени $\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2+H^2}{8\pi} dV$ в некотором объеме V равна работе сил поля $\frac{dW}{dt}$ в единицу времени над зарядами, заключенными в том же объеме, и потоку $\frac{c}{4\pi} \oint [\mathbf{EH}]\, d\mathbf{S}$, вытекающему через замкнутую поверхность S, окружающую объем V. Очевидно, что этот поток должен быть интерпретирован как поток энергии, вытекающей наружу из объема V. Поток энергии является потоком энергии электромагнитного поля, поскольку он отличен от нуля и тогда, когда никакие частицы не пересекают поверхность и не уносят с собой энергии. Поток энергии электромагнитного поля характеризуется вектором $\boldsymbol{\sigma}$, именуемым вектором Пойнтинга и равным

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]. \qquad (12,7)$$

Вектор Пойнтинга $\boldsymbol{\sigma}$ представляет поток энергии поля, вытекающий через 1 *см*² в направлении, перпендикулярном к векторам поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, и образует с ними правовинтовую систему координат.

В дальнейшем мы приведем ряд примеров вычисления вектора Пойнтинга. Здесь мы ограничимся лишь следующим заме-

чанием. Формально вектор σ определен лишь с точностью до ротора некоторого вектора a. Положив $\sigma' = \sigma + \operatorname{rot} a$, имеем

$$\oint \sigma' \, dS = \oint \sigma \, dS + \oint \operatorname{rot} a \, dS = \oint \sigma \, dS,$$

поскольку интеграл от ротора по замкнутой поверхности всегда равен нулю.

В действительности, однако, как будет показано в ч. II, σ следует интерпретировать как плотность потока энергии поля, положив $\operatorname{rot} a = 0$. Иногда в качестве примера, опровергающего такую интерпретацию σ, приводят случай скрещенных статических электрического и магнитного полей. Формально в этом случае $\sigma \neq 0$, хотя никакого потока энергии нет. При этом, однако, забывают, что вектор σ должен входить в закон сохранения энергии, выражаемый формулой (12,4), а последняя теряет смысл в статических полях, если считать $\sigma \neq 0$.

При выводе формулы (12,5) мы считали, что интеграл $\oint \sigma \, dS$ при интегрировании по замкнутой поверхности бесконечно большого радиуса обращается в нуль. Мы увидим, что в проблемах теории излучения встречаются поля, убывающие с расстоянием по закону $|E| \sim |H| \sim \frac{1}{r}$ при $r \to \infty$. При этом интеграл $\oint \sigma \, dS$, взятый по бесконечно удаленной поверхности, будет иметь конечное значение. Физически это означает, что система, теряющая часть своей энергии, излучает.

Записав закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -jE - \operatorname{div} \sigma, \tag{12,8}$$

обращаем внимание на аналогию его с уравнением непрерывности (8,5), выражающим закон сохранения заряда. В левой части формулы (12,8) стоит изменение энергии поля единицы объема (изменение сохраняющейся величины), в правой части — работа, поризведенная над зарядами, находящимися в этом объеме, а также дивергенция потока сохраняющейся величины (плотности энергии).

§ 13. Закон сохранения импульса в электромагнитном поле

Наряду с плотностью энергии электромагнитное поле обладает и плотностью имплуьса.

Рассмотрим изменение импульса частиц, находящихся в объеме V. Вычисления производятся так же, как и при выводе закона сохранения энергии.

В силу уравнения (8,8), имеем

$$\frac{dP_{част}}{dt}=\frac{d}{dt}\int p_0\,dV=\int\rho\left(E+\frac{1}{c}[vH]\right)dV=$$
$$=\int\rho E\,dV+\int\frac{1}{c}[jH]\,dV,\qquad(13,1)$$

где $P_{част}$ — полный импульс частиц. Выражая ρ и j через напряженности поля согласно (8,4) и (8,3), находим

$$\frac{d}{dt}P_{част}=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int E\operatorname{div}E\,dV-\frac{1}{4\pi c}\int\left[\frac{\partial E}{\partial t}H\right]dV+\frac{1}{4\pi}\int[\operatorname{rot}H\cdot H]\,dV.\qquad(13,2)$$

Симметризуем последнее уравнение, прибавив к правой части его равное нулю выражение

$$\frac{1}{4\pi}\left[\left(\operatorname{rot}E+\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\right)E\right]+\frac{1}{4\pi}H\operatorname{div}H.\qquad(13,3)$$

Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}P_{част}=-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int[EH]\,dV+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\{E\operatorname{div}E+H\operatorname{div}H-[E\operatorname{rot}E]-[H\operatorname{rot}H]\}\,dV.\qquad(13,4)$$

Второй интеграл может быть преобразован в поверхностный. Это преобразование мы проведем ниже. Ясно, что поверхностный интеграл, содержащий векторы поля во второй степени, будет стремиться к нулю при неограниченном возрастании поверхности, если только векторы поля убывают быстрее, чем функция $\frac{1}{r}$. Тогда, переходя к бесконечно большому объему и отбрасывая в (13,4) второй интеграл, мы приходим к выражению

$$P_{част}+\frac{1}{4\pi c}\int[EH]\,dV=\mathrm{const}.\qquad(13,5)$$

Формула (13,5) показывает, что суммарный импульс замкнутой системы, состоящий из поля и частиц, сохраняется. Величина

$$g=\frac{1}{4\pi c}[EH]\qquad(13,6)$$

представляет плотность импульса (импульс единицы объема) электромагнитного поля. При взаимодействии поля и частиц наряду с законом сохранения суммарной энергии имеет место закон сохранения суммарного импульса. Передача импульса частицам сопровождается уменьшением импульса поля. Потеря

импульса частицами (например, при излучении) приводит к увеличению импульса поля.

Покажем теперь, что второй интеграл в форме (13,4) можно свести к поверхностному интегралу. Поскольку интеграл

$$\int \{\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{H}-[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]-[\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}]\}\,dV$$

симметричен относительно векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, рассмотрим только интеграл

$$I=\int \{\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]\}\,dV. \qquad (13.7)$$

Воспользовавшись векторными равенствами (I, 53) и (I, 48), можем написать

$$\int (\boldsymbol{E}\operatorname{grad})\boldsymbol{E}\,dV=\oint(\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\boldsymbol{E}\,dS-\int \boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}\,dV, \qquad (13,8)$$

$$\int (\boldsymbol{E}\operatorname{grad})\boldsymbol{E}\,dV=\int \operatorname{grad}\frac{E^2}{2}\cdot dV-\int [\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]\,dV. \qquad (13,9)$$

Вычитая (13,9) из (13,8), находим

$$\int \{\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]\}\,dV=-\int \operatorname{grad}\frac{E^2}{2}\,dV+\int (\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\boldsymbol{E}\,dS.$$

Учитывая (I, 23), получаем

$$I=\oint\left\{(\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{n}\,\frac{E^2}{2}\right\}dS.$$

Аналогичное выражение можно написать для магнитной части интересующего нас интеграла. Таким образом, окончательно

$$\int \{\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]+\boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{H}-[\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}]\}\,dV=$$
$$=\oint\left\{(\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\boldsymbol{E}-\boldsymbol{n}\frac{E^2}{2}+(\boldsymbol{H}\boldsymbol{n})\boldsymbol{H}-\boldsymbol{n}\frac{H^2}{2}\right\}dS. \qquad (13,10)$$

Устремив к бесконечности радиус поверхности интегрирования и считая, что поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ убывают на бесконечности быстрее, чем $\frac{1}{r}$, приходим к высказанному ранее утверждению о равенстве нулю всего поверхностного интеграла.

Мы не будем останавливаться на рассмотрении более сложного случая, когда интегрирование в (13,4) ведется по конечному объему [1]).

---

[1]) См. Р. Беккер, Электронная теория, ОНТИ, 1936; И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966 и, особенно, Я. И. Френкель, Электродинамика, ГТТИ, 1934, стр. 235, где дана более полная интерпретация выражения (13,6).

Укажем лишь результат такого рассмотрения: изменение полного импульса поля в некотором объеме $\int \boldsymbol{g}\, dV$ равно изменению импульса частиц, находящихся в этом объеме, и потоку импульса через поверхность, ограничивающую выделенный объем.

Предсказание теории о существовании импульса поля впервые было обнаружено в 1901 г. П. Н. Лебедевым, наблюдавшим экспериментально световое давление. Импульс электромагнитного поля в обычных условиях мал, и его величина часто лежит за пределами погрешностей измерений. Однако в области атомных явлений импульс электромагнитного поля становится сравнимым с импульсом частиц и играет первостепенную роль во всех процессах взаимодействия излучения с веществом. Давление излучения играет весьма существенную роль в процессах, происходящих внутри звезд и в звездных атмосферах, и других явлениях астрономического масштаба.

Интересно отметить, что между вектором плотности импульса $\boldsymbol{g}$ и вектором Пойнтинга существует соотношение

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{c^2}\,\sigma. \tag{13,11}$$

В главе, посвященной теории относительности, мы увидим, что между энергией и импульсом существует весьма общее соотношение, из которого формула (13,9) получается как следствие.

Наряду с вектором плотности импульса поля $\boldsymbol{g}$ можно ввести в рассмотрение плотности момента импульса:

$$\boldsymbol{k}_0 = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{g}] = \frac{1}{4\pi c}\,[\boldsymbol{r}\,[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]].$$

Момент импульса поля в объеме V равен

$$\boldsymbol{k} = \frac{1}{4\pi c}\int [\boldsymbol{r}\,[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]]\, dV.$$

Можно показать, что для момента импульса, так же как для энергии и импульса, имеет место закон сохранения. Момент импульса электромагнитного поля играет большую роль в процессах атомного масштаба. В явлениях макроскопического масштаба момент импульса был измерен сравнительно недавно[1].

---

[1]) И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966.

ГЛАВА II

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 14. Электростатическое поле

Сформулировав общие уравнения электромагнитного поля и выяснив основные вытекающие из них следствия, можно перейти к обсуждению различных частных случаев электромагнитных полей. При этом мы будем последовательно переходить от простейших к более сложным случаям.

Самым простым примером электромагнитного поля является поле неподвижных зарядов.

Выпишем уравнения Максвелла для этого случая.

Дифференциальная форма		Интегральная форма	
$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho,$	(14,1)	$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = 4\pi \sum e_i,$	(14,1′)
$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0,$	(14,2)	$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = 0,$	(14,2′)
$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$	(14,3)	$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{S} = 0,$	(14,3′)
$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0,$	(14,4)	$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 0.$	(14,4′)

Система уравнений электромагнитного поля в этом случае распадается на систему независимых уравнений для электрического и магнитного полей. Решение системы уравнений для магнитного поля, не зависящего от времени, имеет тривиальный вид:

$$\boldsymbol{H} = 0. \qquad (14,5)$$

Это означает, что неподвижные заряды не окружены магнитным полем. Электрическое поле, связанное с неподвижными зарядами, имеет, как мы уже указывали, безвихревой характер. Его источниками и стоками служат заряды.

На практике чаще всего требуется найти распределение электрического поля, если известно распределение плотности

заряда в пространстве $\rho(\boldsymbol{r})$. Для этого необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (14,1) и (14,2) при заданной функции $\rho(\boldsymbol{r})$. Это — так называемая прямая задача электростатики.

Несравненно более простой, но реже встречающейся, является обратная задача электростатики — нахождение плотности заряда $\rho(\boldsymbol{r})$ по заданному распределению поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. Для решения обратной задачи электростатики, согласно (14,1), достаточно найти дивергенцию заданного поля.

Как мы уже указывали в § 4, для нахождения общего решения уравнений электростатического поля удобно воспользоваться методом электростатического потенциала. Согласно (4,11) или (10,2), можно положить

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{14,6}$$

При этом из (14,1) получаем уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Уравнение (14,2) будет автоматически удовлетворено введением потенциала по формуле (14,6), поскольку при произвольном виде функции $\varphi(\boldsymbol{r})$ имеет место равенство

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

Следовательно, уравнения Максвелла для электростатического поля (14,1) и (14,2) полностью эквивалентны уравнению Пуассона. Зная его решение — скалярный потенциал $\varphi(\boldsymbol{r})$, можно путем дифференцирования определить напряженность поля $\boldsymbol{E}$.

Подчеркнем, что физический смысл имеет только напряженность поля $\boldsymbol{E}$. Скалярный потенциал является лишь вспомогательной величиной, хотя и весьма удобной. Значение потенциала определено в электростатике с точностью до произвольной постоянной: прибавляя к потенциалу φ любую постоянную a, мы приходим к потенциалу $\varphi' = \varphi + a$, который отвечает полю $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi' = -\operatorname{grad} \varphi$. Это преобразование является частным случаем преобразования калибровки, рассмотренного в § 11. В силу неполной определенности потенциала не имеет никакого смысла говорить о численном значении потенциала φ в данной точке поля.

В дальнейшем, рассматривая решения уравнения Пуассона, а также обсуждая другие свойства потенциала, мы будем предполагать определенное поведение потенциала φ на бесконечности. Если считать, что все заряды расположены в конечной области пространства, окружающей точку, условно выбранную за начало координат, то при $r \to \infty$ напряженность поля должна

убывать не медленнее, чем $\frac{1}{r^2}$. Соответственно этому, решения уравнения Пуассона должны удовлетворять требованию:

$$\varphi \to 0 \text{ при } r \to \infty. \tag{14,7}$$

С математической стороны уравнение Пуассона, представляющее уравнение в частных пориѕводных второго порядка, в некотором отношении удобнее и проще для расчета, чем уравнения поля (14,1) и (14,2), представляющие уравнения в частных производных первого порядка. Если потенциал φ на бесконечности удовлетворяет условию (14,7), то решеиие уравнения Пуассона может быть написано в общем виде.

В § 2 было приведено без доказательства (оно будет дано в § 24) общее решение уравнения (14,6):

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,dV'}{R} = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \int \frac{\rho(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}. \tag{14,8}$$

Зная распределение плотности заряда в пространстве $\rho(x', y', z')$ и интегрируя по всему пространству, можно найти значение φ в любой точке (x, y, z).

Фактический расчет поля по формуле (14,8), требующий вычисления трехкратного интеграла, часто оказывается практически невыполнимым. Ниже, в ч. IV, мы кратко обсудим основные методы решения задач электростатики с учетом особенностей физических тел — диэлектриков и металлов. Здесь же мы ограничимся лишь простейшей системой — системой точечных зарядов.

§ 15. Электростатическое поле системы точечных зарядов

«Размазывание» зарядов по пространству и описание свойств системы зарядов при помощи непрерывной функции $\rho(\boldsymbol{r})$ дало нам возможность перейти от интегрального соотношения (14,1′) к дифференциальному уравнению (14,1). Важность такого перехода ясна из того, что он позволил сформулировать дифференциальные уравнения поля. Тем не менее в некоторых случаях недопустимо пренебрегать точечной структурой системы зарядов в реальных условиях. Кроме того, в ряде случаев оказывается удобным производить выкладки для точечных, а не для распределенных систем.

Представим плотность заряда, характеризующую систему точечных зарядов, в виде

$$\rho = \sum e_i \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_i'),$$

где $\boldsymbol{r}_i'$ — радиус-вектор заряда e_i. Подставляя это выражение в (14,8), находим потенциал поля системы точечных зарядов

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \sum e_i \int \frac{\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_i')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i'|} dV' = \sum \frac{e_i}{R_i}, \tag{15,1}$$

где $R_i = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i'|$, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения. При этом мы воспользовались основным свойством дельта-функции (см. III, 3). Таким образом, решением уравнения

$$\Delta\varphi = -4\pi e \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \tag{15,2}$$

служит функция

$$\varphi = \frac{e}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}. \tag{15,3}$$

Формула (15,3) представляет полезное соотношение, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

Рис. 5.

Поле системы точечных зарядов дается формулой

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi = \sum \frac{e_i}{R_i^3} \boldsymbol{R}_i. \tag{15,4}$$

В случае одного заряда формула (15,4) дает

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{R^3} \boldsymbol{R}, \tag{15,5}$$

и для силы, действующей на пробный заряд ε, помещенный в поле одиночного заряда, получается закон Кулона:

$$F = \frac{\varepsilon e}{R^3} \boldsymbol{R}. \tag{15,6}$$

Если число зарядов в системе велико, суммы в формулах (15,1) и (15,4) содержат большое число членов и эти формулы становятся мало пригодными для практических расчетов. Однако формула (15,1) допускает существенное упрощение на таких расстояниях от системы, которые намного превышают ее собственную пространственную протяженность. Расстояния, большие по сравнению с размерами системы, в дальнейшем будем кратко называть большими расстояниями. Если точка наблюдения N находится на больших расстояниях от системы, то имеет место неравенство (рис. 5)

$$|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{r}_i'|.$$

Рассмотрим одно из слагаемых в формуле (15,1). Для того чтобы не загромождать дальнейших формул индексами, мы не будем выписывать знак суммы и напишем расстояние от i-го заряда до точки наблюдения в виде

$$\frac{1}{R_i}=\frac{1}{|r-r_i'|}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_i')^2+(y-y_i')^2+(z-z_i')^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}(x_\alpha-x_{i\alpha}')^2}}, \qquad (15,7)$$

где индексом α отмечены три компоненты соответствующих векторов. Поскольку $|x_{i\alpha}'|\ll|x_\alpha|$, разлагая (15,7) в ряд Тейлора, имеем

$$\frac{1}{R_i}=\frac{1}{|r-r_i'|}=$$

$$=\frac{1}{r}-\sum_\alpha x_{i\alpha}'\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_0+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}x_{i\alpha}'x_{i\beta}'\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_0+\ldots \qquad (15,8)$$

Подставляя разложение (15,8) в формулу (15,1), находим

$$\varphi=\frac{\sum_i e_i}{r}-\sum_\alpha\left(\sum_i e_i x_{i\alpha}'\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_i e_i x_{i\alpha}'x_{i\beta}'\right)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)+\ldots=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\ldots, \qquad (15,9)$$

где обозначено

$$\varphi_0=\frac{\sum_i e_i}{r}=\frac{e}{r}, \qquad (15,10)$$

$$\varphi_1=-\sum_\alpha\left(\sum_i e_i x_{i\alpha}'\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (15,11)$$

$$\varphi_2=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_i e_i x_{i\alpha}'x_{i\beta}'\right)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (15,12)$$

Суммирование по i ведется по всем зарядам системы. Поэтому $\sum_i e_i=e$ представляет полный заряд системы.

Мы видим, что на больших расстояниях отношение двух последовательных членов разложения потенциала по порядку величины равно отношению $\frac{\text{размер системы}}{\text{расстояние до точки наблюдения}}$. Первый

член разложения φ_0 совпадает с потенциалом поля, создаваемым в данной точке N зарядом e, равным суммарному заряду системы. Каждый последующий член разложения содержит возрастающую степень отношения величины, пропорциональной размерам системы ($\sim |x'|$), к расстоянию до точки наблюдедения ($|\boldsymbol{r}|$).

В случае электронейтральной системы ее полный заряд $e = \sum e_i = 0$, и первый член ряда (15,9) исчезает. С такими системами мы будем иметь дело очень часто. Достаточно указать, например, что все атомы и молекулы являются электронейтральными системами. Потенциал поля, создаваемого электронейтральной системой зарядов, дается разложением (15,9), которое начинается со второго члена φ_1. Рассмотрим его более подробно. Запишем φ_1 в векторном виде:

$$\varphi_1 = -\left(\sum_i e_i x'_{i\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) = -\sum_i e_i \left(\nabla \frac{1}{r}\right)\boldsymbol{r}'_i = -\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)\sum_i e_i \boldsymbol{r}'_i, \tag{15,13}$$

где градиент берется по координатам точки наблюдения. Величина

$$\boldsymbol{d} = \sum e_i \boldsymbol{r}'_i = \int \rho \boldsymbol{r}'\, dV' \tag{15,14}$$

носит название дипольного момента системы. В частном случае системы, состоящей из двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов, именуемой диполем, дипольный момент равен

$$\boldsymbol{d} = e_1 \boldsymbol{r}'_1 + e_2 \boldsymbol{r}'_2 = |e|(\boldsymbol{r}'_1 - \boldsymbol{r}'_2),$$

т. е. равен произведению величины заряда на вектор $\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{r}'_1 - \boldsymbol{r}'_2)$.

Поле электронейтральной системы в первом приближении (именуемом дипольным приближением) запишется в виде

$$\varphi \approx \varphi_1 = -\boldsymbol{d}\left(\nabla \frac{1}{r}\right) = \frac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{d\cos\theta}{r^2}, \tag{15,15}$$

где θ — угол между дипольным моментом и радиусом-вектором, проведенным в точку наблюдения. Таким образом, потенциал поля электронейтральной системы убывает (на больших расстояниях от системы) по закону $\varphi \sim \frac{1}{r^2}$.

Подобно тому как от точечных зарядов мы перешли к заряду, непрерывно распределенному в пространстве с плотностью ρ, можно ввести понятие плотности дипольного момента $\boldsymbol{p}$, непрерывно распределенной в пространстве. По определению, $\boldsymbol{p}$ представляет дипольный момент единицы объема. По-

тенциал поля, создаваемого всей системой, можно, очевидно, написать в виде

$$\varphi = -\int p\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dV',$$

где $\left(p\,dV'\nabla\frac{1}{r}\right)$ — потенциал, создаваемый в точке N дипольным моментом, заключенным в объеме dV', и интегрирование ведется по всему объему системы. Заметим еще, что часто вместо дифференцирования по координатам точки наблюдения пользуются дифференцированием по координатам источника. Тогда согласно (I, 18) имеем $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)$ и вместо (15,15) можем написать

$$\varphi = d\nabla'\frac{1}{r} \tag{15,16}$$

или

$$\varphi = \int p\nabla'\frac{1}{r}dV. \tag{15,17}$$

Последняя формула понадобится нам в дальнейшем (см. ч. IV).

Рассмотрим вопрос о зависимости дипольного момента от выбора начала координат. Предположим, что мы сместим начало координат на произвольный постоянный вектор a, т. е. совершим преобразование:

$$r_i' = r_i'' + a.$$

При этом дипольный момент будет равен

$$d = \sum e_i r_i' = \sum e_i r_i'' + \sum e_i a = d' + a\sum e_i,$$

где $d' = \sum e_i r_i''$. Если система в целом электронейтральна, то $\sum e_i = 0$ и $d' = d$. В этом случае величина дипольного момента не изменяется при переносе начала координат. Если, наоборот, система обладает полным зарядом, то $d' \neq d$, следовательно, дипольный момент системы зависит от выбора начала координат. При этом всегда можно найти такое значение a, чтобы дипольный момент обратился в нуль. Таким образом, дипольный момент всякой системы, обладающей полным зарядом, следует считать равным нулю.

Определим теперь поле электронейтральной системы в дипольном приближении:

$$E = -\operatorname{grad}\varphi \approx -\operatorname{grad}\varphi_1 = -\operatorname{grad}\frac{dr}{r^3} =$$
$$= -\frac{1}{r^3}\operatorname{grad}(dr) - (dr)\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}.$$

Вычисление по формулам (I, 47) дает

$$\mathbf{E}=\frac{3\mathbf{r}\,(\mathbf{r}\mathbf{d})-r^2\mathbf{d}}{r^5}. \qquad (15,18)$$

Поле электронейтральной системы на далеких расстояниях убывает по закону $E \sim \frac{1}{r^3}$ и обладает резко выраженной асимметрией. В полярных координатах (r, θ) его слагающие (согласно I, 71) имеют вид

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{2d\cos\theta}{r^3} \text{ — радиальная слагающая,}$$

$$E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{d\sin\theta}{r^3} \text{ — меридиональная слагающая.}$$

§ 16. Квадрупольный момент

Если дипольный момент электронейтральной системы зарядов равен нулю, в разложении потенциала (15,9) следует учитывать член разложения φ_2.

Примером электронейтральной системы с дипольным моментом, равным нулю, может служить система из двух равных по величине диполей, с противоположными направлениями дипольных моментов, находящихся на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Такая система носит название квадруполя.

Потенциал поля, создаваемого квадруполем, имеет вид

$$\varphi \approx \varphi_2=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{\alpha,\beta} e_i x'_{i\alpha}x'_{i\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (16,1)$$

Для получения φ следует вычислить выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{x_\beta}{r^3}=$$

$$=-x_\beta\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r^3}\right)-\frac{1}{r^3}\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}=-\frac{1}{r^3}\delta_{\alpha\beta}+\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, α, β принимают значения 1, 2, 3; x_α, x_β — сокращенная запись координат $x_1=x$; $x_2=y$; $x_3=z$. Тогда имеем

$$\varphi_c=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\sum_i e_i x'_{i\alpha}x'_{i\beta}\left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\right).$$

Совокупность величин $(e_i x'_{i\alpha}x'_{i\beta})$ является тензором второго ранга. Этот тензор называют квадрупольным моментом системы и обозначают $D_{\alpha\beta}$:

$$D_{\alpha\beta}=\sum_i e_i x'_{i\alpha}x'_{i\beta}. \qquad (16,2)$$

Если перейти к непрерывно распределенным зарядам, квадрупольный момент можно записать так:

$$D_{\alpha\beta} = \int \rho x'_\alpha x'_\beta \, dV'. \qquad (16,2')$$

При этом

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} D_{\alpha\beta} \left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} \right). \qquad (16,3)$$

Опуская для краткости индекс суммирования по всем частицам, можем написать выражение для φ_2 в координатном представлении:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sum e \left\{ x'^2 \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + y'^2 \left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + \right.$$
$$\left. + z'^2 \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + 2x'y' \cdot \frac{3xy}{r^5} + 2x'z' \cdot \frac{3xz}{r^5} + 2y'z' \cdot \frac{3yz}{r^5} \right\}.$$

Прибавляя равную нулю величину

$$\frac{(r')^2}{3} \cdot \frac{3}{r^3} \cdot \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} - 1 \right)$$

и перегруппировывая члены, это выражение записывают обычно в виде

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sum e \left\{ \left(x'^2 - \frac{r'^2}{3} \right) \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + \right.$$
$$+ \left(y'^2 - \frac{r'^2}{3} \right) \left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + \left(z'^2 - \frac{r'^2}{3} \right) \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) +$$
$$\left. + 2x'y' \cdot \frac{3xy}{r^5} + 2x'z' \cdot \frac{3xz}{r^5} + 2y'z' \cdot \frac{3yz}{r^5} \right\} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} D_{\alpha\beta} \left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} \right). \qquad (16,4)$$

При этом квадрупольный момент $D_{\alpha\beta}$ определен как

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i e_i \left(x'_{i\alpha} x'_{i\beta} - \frac{r'^2}{3} \delta_{\alpha\beta} \right). \qquad (16,5)$$

Совокупность величин $D_{\alpha\beta}$ легко записать в явном виде:

$$D_{xx} = \sum e_i \left[(x'_i)^2 - \frac{(r'_i)^2}{3} \right], \quad D_{xy} = D_{yx} = \sum e_i x'_i y'_i,$$
$$D_{yy} = \sum e_i \left[(y'_i)^2 - \frac{(r'_i)^2}{3} \right], \quad D_{yz} = D_{zy} = \sum e_i y'_i z'_i,$$
$$D_{zz} = \sum e_i \left[(z'_i)^2 - \frac{(r'_i)^2}{3} \right], \quad D_{zx} = D_{xz} = \sum e_i x'_i z'_i.$$

Все девять величин $D_{\alpha\beta}$, образующих квадрупольный момент, зависят, очевидно, только от расположения и величины зарядов в системе.

Из определения (16,5) ясно, что тензор квадрупольного момента является симметричным, так что

$$D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}.$$

Симметричный тензор второго ранга имеет шесть независимых компонент.

Заметим, далее, что сумма всех диагональных компонент квадрупольного момента равна нулю:

$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0. \qquad (16,6)$$

Это снижает число независимых компонентов квадрупольного момента до пяти.

Как и всякий симметричный тензор, $D_{\alpha\beta}$ можно привести к главным осям. Эта процедура совершенно аналогична приведению к главным осям тензора моментов инерции в механике. Именно, произведем поворот системы координат. При этом координатам x'_i, y'_i, z'_i будут отвечать новые координаты x_i, y_i, z_i. Коэффициенты соответствующего линейного преобразования подберем так, чтобы компоненты $D_{\alpha\beta}$ с разными значениями индексов α и β обратились в нуль. Можно показать, что такой подбор коэффициентов всегда возможен.

В новых координатах:

$$D_1 = \frac{1}{3} \sum e_i \left(2x_{i1}^2 - x_{i2}^2 - x_{i3}^2\right) = D_{11},$$

$$D_2 = \frac{1}{3} \sum e_i \left(2x_{i2}^2 - x_{i1}^2 - x_{i3}^2\right) = D_{22},$$

$$D_3 = -\left(D_1 + D_2\right) = D_{33}.$$

Важным случаем является система зарядов, расположение которых симметрично относительно оси. Пусть осью симметрии служит ось x_3. Условие симметрии относительно оси x_3 позволяет написать

$$\sum e_i x_{i1}^2 = \sum e_i x_{i2}^2,$$

так что квадрупольный момент имеет компоненты:

$$D_1 = \frac{1}{3} \sum e_i \left(x_{i1}^2 - x_{i3}^2\right) = -\frac{D}{2},$$

$$D_2 = \frac{1}{3} \sum e_i \left(x_{i2}^2 - x_{i3}^2\right) = -\frac{D}{2},$$

$$D_3 = D.$$

Знак величины D называют знаком квадрупольного момента. Потенциал поля квадруполя равен согласно (16,4)

$$\varphi_2 = -\frac{3}{4} D \frac{r^2 - 3x_3^2}{r^5} = -\frac{3}{4} D \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3},$$

где θ — угол между осью симметрии x_3 и радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ точки наблюдения. Написанный закон убывания потенциала поля квадруполя с расстоянием r имеет вполне общий характер, так что всегда

$$\varphi_2 \sim \frac{1}{r^3}.$$

Соответственно, поле убывает по закону

$$|E| \sim \frac{1}{r^4}.$$

Если система зарядов как целое не является электронейтральной, то величина дипольного момента зависит, как мы уже указывали в предыдущем параграфе, от выбора начала координат. То же относится и к квадрупольному моменту. Для случая системы с полным зарядом, отличным от нуля, удобно поместить начало координат в точку с координатой

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\sum e_i \boldsymbol{r}_i}{\sum e_i}.$$

Эту точку можно назвать центром заряда системы. Если поместить начало координат в центр заряда, то дипольный момент системы зарядов автоматически обращается в нуль. Это не относится, однако, к ее квадрупольному моменту. Именно, если расположение зарядов в системе не является сферически-симметричным, то все или некоторые компоненты квадрупольного момента отличны от нуля. Поэтому наличие у системы зарядов квадрупольного момента позволяет судить о характере симметрии системы. Так, например, наличие осевой симметрии приводит к написанному выше распределению поля.

В связи с этим обстоятельством важное значение имело обнаружение квадрупольного момента у ряда атомных ядер. Наличие квадрупольного момента ядер показало, что форма их является несферической.

Если расположение зарядов в системе обладает весьма высокой симметрией, ее квадрупольный момент может оказаться равным нулю; как пример укажем на систему из восьми зарядов, расположенных в вершинах бесконечно малого параллелепипеда с правильным чередованием знаков зарядов. Такая система зарядов, носящая название октуполя, не имеет ни дипольного, ни квадрупольного моментов. Потенциал поля

октуполя получается при учете четвертого члена в разложении (15,9).

Если учитывать последующие члены разложения (15,9), можно получить потенциал поля мультиполей любого порядка.

§ 17. Работа и энергия во внешнем электростатическом поле

Согласно сказанному выше, работу перемещения пробного заряда из одной точки поля в другую можно выразить через изменение потенциала в виде

$$W=\int_1^2 \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{l}=\varepsilon\int_1^2 \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=-\varepsilon\int_1^2 \operatorname{grad}\varphi\,d\boldsymbol{l}=\varepsilon[\varphi(\boldsymbol{r}_1)-\varphi(\boldsymbol{r}_2)]=-\varepsilon\Delta\varphi. \tag{17,1}$$

Если происходят перемещения зарядов системы, то работа перемещения на вектор $d\boldsymbol{l}_i$ равна

$$dW=\sum e_i\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}_i.$$

В дальнейшем нам понадобится выражение для работы поля над системой зарядов, отнесенной к единице времени (мощности). Для нее находим

$$\frac{dW}{dt}=\sum e_i\boldsymbol{E}\frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt}=\sum e_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_i. \tag{17,2}$$

В случае распределенных зарядов

$$\frac{dW}{dt}=\int \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}\,dV=\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV. \tag{17,3}$$

Зная работу перемещения пробного заряда, можно записать его потенциальную энергию в электростатическом поле:

$$-\delta U(\boldsymbol{r})=\delta W=-\varepsilon\,\delta\varphi(\boldsymbol{r}),$$

где $U(\boldsymbol{r})$ — потенциальная энергия в точке $\boldsymbol{r}$ и $\varphi(\boldsymbol{r})$ — электростатический потенциал в той же точке. Вид потенциальной энергии не зависит от выбора системы координат. Поэтому соотношение

$$U=\varepsilon\varphi \tag{17,4}$$

справедливо не только в декартовых, но и в любых обобщенных координатах q_i. Обобщенные силы, действующие на пробный заряд, можно написать в виде

$$Q_i=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}. \tag{17,5}$$

Формулы (17,4) и (17,5) легко перенести на случай, когда вместо пробного заряда во внешнее поле помещена произвольная система зарядов. При этом предполагается, что внешнее поле $\boldsymbol{E}$ является сильным по сравнению с полем, создаваемым зарядами системы. Кроме того, считается, что потенциал внешнего поля достаточно медленно изменяется от точки к точке. Потенциальная энергия системы зарядов записывается следующим образом:

$$U = \sum e_i \varphi(\boldsymbol{r}'_i), \tag{17,6}$$

где $\varphi(\boldsymbol{r}'_i)$ — потенциал внешнего поля в точке $\boldsymbol{r}'_i$. Выбрав начало координат внутри системы, можно написать потенциал в виде

$$\varphi(\boldsymbol{r}'_i) = \varphi(x', y', z'),$$

где x', y', z' — расстояния от начала координат до заряда. Воспользуемся теперь медленностью изменения потенциала внешнего поля в области пространства, занятой зарядами. Медленно изменяющуюся функцию φ можно разложить в ряд по величинам x', y', z', характеризующим протяженность системы, и ограничиться первыми членами разложения. Это дает

$$\varphi(\boldsymbol{r}') \approx \varphi(0,\ 0,\ 0) + x'\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'} + z'\frac{\partial\varphi}{\partial z'} =$$
$$= \varphi(0) + \boldsymbol{r}' \operatorname{grad}\varphi = \varphi(0) - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{E}(0).$$

Здесь $\varphi(0)$ и $\boldsymbol{E}(0)$ — соответственно потенциал и напряженность внешнего поля в начале координат. Подставляя последнее выражение для $\varphi(\boldsymbol{r}')$ в (17,6), находим

$$U = \sum e_i\varphi(\boldsymbol{r}'_i) \approx \sum e_i\varphi(0) - \sum e_i\boldsymbol{r}'_i\boldsymbol{E}(0) =$$
$$= \varphi(0)\sum e_i - \boldsymbol{E}(0)\sum e_i\boldsymbol{r}'_i = e\varphi(0) - \boldsymbol{E}(0)\boldsymbol{d}. \tag{17,7}$$

В первом приближении потенциальная энергия системы зарядов во внешнем поле равна энергии одного заряда величиной $e = \sum e_i$, находящегося в начале координат. В случае электронейтральной системы $e = 0$ и

$$U = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{d} = -Ed\cos\theta, \tag{17,8}$$

где θ — угол между дипольным моментом системы и вектором внешнего поля.

Найдем обобщенные силы, действующие на систему (считая последнюю недеформируемой, так что расположение зарядов в системе фиксировано). Обобщенная сила, отвечающая координатам x, y, z, равна

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U = \operatorname{grad}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{d}),$$

или, раскрывая градиент произведения по формуле (I, 47) и учитывая, что $\boldsymbol{d}$ — постоянный вектор, получаем

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{d}\operatorname{grad})\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{d}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}] = (\boldsymbol{d}\operatorname{grad})\boldsymbol{E}. \qquad (17{,}9)$$

В однородном поле ($\boldsymbol{E} = \text{const}$) на электронейтральную систему с дипольным моментом не действуют силы, стремящиеся сместить ее в пространстве. Такие силы имеются лишь в поле, неоднородном в пространстве.

Обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате θ, определяющей ориентацию вектора дипольного момента, согласно известному положению классической механики [1]), представляет момент силы

$$M = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = Ed\sin\theta. \qquad (17{,}10)$$

Вращательный момент стремится повернуть систему так, чтобы ее дипольный момент был ориентирован параллельно полю.

Полученные формулы позволяют без труда найти закон взаимодействия заряд — диполь и диполь — диполь. При этом под $\boldsymbol{E}(0)$ следует понимать поле, создаваемое в точке 0, соответственно, зарядом и диполем.

Для потенциальной энергии взаимодействия заряд — диполь находим

$$U = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{d} = -\frac{e\boldsymbol{r}\boldsymbol{d}}{r^3}, \qquad (17{,}11)$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор, направленный от заряда к системе и равный по величине расстоянию от заряда до системы (пространственными размерами которой в этом приближении мы должны пренебречь).

Потенциальная энергия взаимодействия диполь — диполь равна, согласно (15,18),

$$U = -\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{E}_2 = \frac{(\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_2)r^2 - 3(\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{r})}{r^5} \qquad (17{,}12)$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор, соединяющий оба диполя.

---

[1]) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика, т. I, Механика, «Наука», 1966.

§ 18. Энергия взаимодействия системы зарядов и энергия электростатического поля

Перейдем к вычислению энергии системы взаимодействующих зарядов. Простейшим путем эта энергия может быть вычислена следующим образом. Пусть в некоторой точке пространства закреплен заряд e_1. Заряд e_2, находящийся первоначально на бесконечности, перемещается в некоторую точку, находящуюся на расстоянии r_{12} от первого заряда. При этом внешним источником против сил поля должна быть произведена работа

$$W_{12} = e_2[\varphi_1(r_{12}) - \varphi_1(r \to \infty)] = e_2\varphi_1(r_{12}).$$

Поскольку потенциал поля первого заряда на бесконечности равен нулю, $\varphi_1(r_{12})$ представляет потенциал поля первого заряда в точке r_{12}, равный

$$\varphi_1(r_{12}) = \frac{e_1}{r_{12}}.$$

Поэтому работа перемещения второго заряда

$$W_{12} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}.$$

Поднося к системе из двух зарядов третий заряд, необходимо произвести работу

$$W_{123} = \frac{e_1 e_3}{r_{13}} + \frac{e_2 e_3}{r_{23}}.$$

Продолжая такое построение системы из N зарядов, находим, что для этого необходимо затратить работу

$$W = \frac{e_1}{2}\left[\frac{e_2}{r_{12}} + \frac{e_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{e_N}{r_{1N}}\right] + \\ + \frac{e_2}{2}\left[\frac{e_1}{r_{21}} + \frac{e_3}{r_{23}} + \ldots + \frac{e_N}{r_{2N}}\right] + \ldots = \frac{1}{2}\sum_i \sum_k \frac{e_i e_k}{r_{ik}} \quad (i \neq k). \quad (18,1)$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ введен потому, что в сумме встречаются дважды равные члены, отвечающие каждой паре частиц, например, $\frac{e_1 e_2}{r_{12}}$ и $\frac{e_2 e_1}{r_{21}}$. Чтобы не вводить сложного ограничения на выполнение суммирования, в (18,1) учитываются все члены такого типа, а результат уменьшается в два раза.

Вводя в рассмотрение потенциал φ_i, который создается всеми зарядами, кроме i-го, в месте расположения последнего, (18,1) можно переписать в виде

$$W = \frac{1}{2}\sum e_i \varphi_i.$$

Произведенная работа сближения равна потенциальной энергии, запасенной в системе частиц. Таким образом,

$$U=\frac{1}{2}\sum e_i\varphi_i=\frac{1}{2}\sum\frac{e_ie_k}{r_{ik}}. \qquad (18,2)$$

Переходя от точечных зарядов к непрерывной функции распределения плотности заряда, можно написать (18,2) в виде

$$U=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\,dV=\frac{1}{2}\int\int\frac{\rho(\boldsymbol{r})\,\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV\,dV'. \qquad (18,3)$$

Потенциальная энергия взаимодействия (18,2) определяется мгновенным расположением всех зарядов в системе. Формулы (18,2) и (18,3) можно интерпретировать следующим образом: каждый заряд, входящий в систему, обладает потенциальной энергией $\frac{e_i\varphi_i}{2}$; энергия системы слагается из энергий входящих в нее зарядов.

Преобразуем теперь формулу (18,3), воспользовавшись уравнениями поля. Выражая ρ через $\boldsymbol{E}$ по (14,1), находим с помощью (18,3)

$$U=\frac{1}{8\pi}\int\varphi\,\operatorname{div}\boldsymbol{E}\,dV=\frac{1}{8\pi}\left[\int\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{E})\,dV-\int\boldsymbol{E}\operatorname{grad}\varphi\,dV\right]=$$
$$=\int\frac{E^2}{8\pi}\,dV+\frac{1}{8\pi}\oint\varphi\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{S}.$$

Интеграл по бесконечной поверхности исчезает, поскольку при $r\to\infty$ имеем

$$\varphi<\frac{1}{r};\quad E<\frac{1}{r^2};\quad S\sim r^2.$$

Поэтому находим окончательно

$$U=\int\frac{E^2}{8\pi}\,dV. \qquad (18,4)$$

Формула (18,4) вполне эквивалентна (18,3). Однако она не содержит никаких величин, характеризующих электрические заряды.

Совершенно ясно, что выражение (18,4) является частным случаем общего выражения для энергии электромагнитного поля, а его вывод — частным случаем доказательства, приведенного в § 12. Существенно, однако, то, что в рамках электростатики нельзя отдать преимущество какой-либо из двух альтернативных формул (18,3) и (18,4). Поскольку в формуле (18,3) не содержится никаких характеристик поля, в электростатике поле можно трактовать как вспомогательный, чисто математический прием описания взаимодействия между частицами.

Состояние системы и ее энергия в электростатике определяются исключительно величинами зарядов и их взаимным расположением.

Ранее мы уже подчеркивали, что в общем случае системы движущихся зарядов и переменных во времени полей ситуация коренным образом отличается от электростатической. Электромагнитное поле в общем случае не может трактоваться как математический образ. Оно является физическим объектом, реальность которого является столь же полной, как и реальность заряженных частиц.

Интересно применить формулу (18,4) к одиночному элементарному заряду — электрону или протону. Его энергия равна

$$U = e\varphi(0),$$

где $\varphi(0)$ — потенциал поля в той точке, в которой находится сам заряд. Поскольку рассматриваемое поле является полем самого заряда, его потенциал $\varphi = \frac{e}{r}$ неограниченно возрастает при стремлении r к нулю. Это означает, что точечная частица имела бы бесконечно большую собственную энергию.

Таким образом, представление о частицах как о точечных объектах, не имеющих пространственной протяженности, приводит к физически бессмысленному результату. В связи с этим был сделан ряд попыток построить электродинамическую теорию элементарных частиц, обладающих конечными размерами (теория протяженного электрона), но эта теория, оказалось, противоречила основным положениям теории относительности (см. вторую часть курса).

В вопросе о собственной энергии элементарного заряда классическая электродинамика столкнулась с непреодолимой трудностью. Было ясно, что законы классической электродинамики, находившиеся в прекрасном согласии с опытными фактами в области макроскопической физики, имеют ограниченную область применимости. При переходе к весьма малым расстояниям они должны подвергнуться существенным изменениям. О границах применимости классической электродинамики мы еще будем говорить в следующих параграфах этого раздела.

ГЛАВА III

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 19. Поле системы зарядов, совершающих медленное, квазистационарное движение

Следующим по степени сложности является случай поля зарядов, совершающих медленное, квазистационарное движение.

Медленным движением системы зарядов мы будем называть движение со скоростями $|\boldsymbol{v}|$, малыми по сравнению с величиной c, которая является единственной характерной величиной размерности скорости, содержащейся в уравнениях Максвелла. Мы увидим в дальнейшем, что c — это скорость распространения в пространстве всех электромагнитных взаимодействий.

Таким образом, предположение о медленном движении зарядов означает, что при таком движении можно пренебречь конечностью скорости распространения электромагнитных полей (см. § 23). При медленном движении можно приближенно считать, что поле в каждый момент времени определяется мгновенным расположением зарядов.

Под квазистационарным движением мы будем понимать движение зарядов в некоторой ограниченной области, за пределы которой они не выходят во все время движения. В этой области заряды могут двигаться периодическим или непериодическим образом. В последнем случае, однако, за весьма большое время частицы неизбежно будут проходить если не через те же самые последовательности состояний, как при периодическом движении, то во всяком случае через последовательности близких состояний. Иными словами, движение будет почти периодическим. Ниже будет показано, что в этих условиях в уравнениях Максвелла производные от полей по времени малы по сравнению с пространственными производными. Отсюда термин — квазистационарное (как бы стационарное) движение.

Поскольку частицы не могут выйти за границы области, на ограничивающей ее поверхности S_1 должно выполняться условие:

$$j_n = 0. \qquad (19,1)$$

Здесь j_n — слагающая плотности тока, нормальная к поверхности.

При медленном движении зарядов изменение плотности заряда по времени можно считать малым, т. е. можно положить

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Тогда (5,4) дает

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{19,2}$$

Таким образом, при квазистационарном движении зарядов вектор плотности имеет соленоидальный характер. Иными словами, квазистационарный характер движения зарядов позволяет представить их траектории в виде некоторых замкнутых трубок или нитей. Каждая из таких трубок замыкается сама на себя внутри области движения. Такое представление особенно наглядно в случае макроскопических постоянных токов, идущих, например, по замкнутым проводникам (см. § 17 части IV).

Для каждой замкнутой трубки с током имеет место равенство

$$\boldsymbol{j}\, dV = \boldsymbol{j}\, dS\, dl = j\, dS\, \boldsymbol{dl} = dI\, \boldsymbol{dl}, \tag{19,3}$$

где dS — сечение и $j\,dS$ — постоянный ток, протекающий по сечению трубки; dl — элемент ее длины. Направления векторов $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{dl}$, очевидно, совпадают. Интеграл от плотности тока по всему объему

$$\int \boldsymbol{j}\, dV = \int \oint dI\, \boldsymbol{dl} = \int dI \oint \boldsymbol{dl} = 0,$$

поскольку интеграл по замкнутой трубке $\oint \boldsymbol{dl} = 0$. Смысл этого равенства весьма прост. Рассмотрим, например, его x-ю проекцию. Интеграл $\int j_x\, dy\, dz$ представляет полный ток через плоскость (yz), секущую трубки тока. В квазистационарном состоянии системы полный ток через любое сечение равен нулю. Число зарядов, проходящих по нормали к сечению через все трубки тока в обоих направлениях, дожно быть одинаковым, поскольку заряды совершают движение в ограниченном объеме пространства

Перейдем теперь к формулировке уравнений Максвелла для поля системы зарядов, совершающих медленное, квазистационарное движение. Чтобы выяснить, какие упрощения можно внести в систему уравнений Максвелла для такого движения, оценим (по порядку величины) входящие в них члены. Подобные методы оценок широко применяются в теоретической физике.

Начнем с оценок производных по времени, фигурирующих в уравнениях Максвелла. Поскольку рассматриваемая система совершает периодическое или почти периодическое движение, можно по порядку величины оценить величины $\left|\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right|$ и $\left|\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right|$, написав

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right| \sim \frac{E}{T}, \quad \left|\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right| \sim \frac{H}{T},$$

где T — характерный период движения. Величины E и H означают характерные средние абсолютные значения напряженностей поля в области пространства, занятой системой зарядов. Разумеется, не имеет смысла стремиться к уточнению этих величин, относя их к определенному моменту времени или определенной точке пространства. Написанные соотношения имеют смысл грубых оценок порядка величин.

Найдем, далее, порядок величин $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}$ в той же области пространства. Поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в реальных системах, совершающих квазистационарное движение, изменяются от точки к точке, вообще говоря, достаточно плавно. Если обозначить через L средние размеры системы, то все пространственные производные по порядку величины можно оценить следующим образом:

$$\left|\frac{\partial E}{\partial x}\right| \sim \left|\frac{\partial E}{\partial y}\right| \sim \left|\frac{\partial E}{\partial z}\right| \sim \frac{E}{L}.$$

При этом мы отвлекаемся от распределения поля в системе, его конкретной зависимости от различных координат.

Условие квазистационарности заключается в том, чтобы временны́е изменения полей происходили достаточно медленно, так чтобы в уравнениях Максвелла можно было опустить члены, содержащие производные по времени с соответствующим коэффициентом, как малые по сравнению с членами, характеризующими пространственное изменение полей. Для этого дожны выполняться (по порядку величины) неравенства:

$$\left|\frac{\partial E_i}{\partial x_k}\right| \gg \frac{1}{c}\left|\frac{\partial H_i}{\partial t}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right| \gg \frac{1}{c}\left|\frac{\partial E_i}{\partial t}\right|$$

или

$$\frac{H}{L} \gg \frac{1}{c}\frac{E}{T}, \quad \frac{E}{T} \gg \frac{1}{c}\frac{H}{T}. \tag{19,4}$$

При этом одновременно должны выполняться приближенные равенства

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_k} \approx \frac{\partial E_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \approx \frac{\partial H_k}{\partial x_i},$$

так что разности пространственных производных, входящих в уравнение Максвелла, взаимно компенсируют друг друга, а временные производные (с коэффициентом $1/c$) оказываются величинами старшего порядка малости. Перемножая эти неравенства (19,4), приходим к условию квазистационарности:

$$T \gg \frac{L}{c}. \tag{19,5}$$

Неравенство (19,5) или эквивалентное ему неравенство

$$c \gg \frac{L}{T} \approx v, \tag{19,5'}$$

где величину $v \sim \frac{L}{T}$ можно интерпретировать как характерную скорость движения зарядов в системе, имеют наглядный смысл. При квазистационарном движении зарядов их скорости должны быть малы по сравнению со скоростью распространения поля.

Электромагнитные поля, для которых справедливо неравенство (19,5) и в которых можно пренебречь, как малым, током смещения, носят название квазистационарных полей.

Для квазистационарных полей уравнения Максвелла приобретают следующий вид:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{19,6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{19,7}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{19,8}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{19,9}$$

Таким образом, в приближении квазистационарных полей ток смещения не входит в уравнения поля. Мы видели уже, что отсутствие тока смещения отвечает соленоидальному характеру линий тока. Обратно, если трубки тока являются почти замкнутыми, а движение зарядов — происходящим в ограниченном объеме и почти периодическим, то ток смещения должен быть очень мал по сравнению с током зарядов.

Система уравнений Максвелла оказывается распавшейся на уравнения для независимых полей: магнитного поля токов и электрического поля зарядов.

Плотность заряда ρ в уравнении (19,9) зависит от времени, как от параметра. В приближении медленно движущихся зарядов, решение уравнений для электрического поля приводит к очевидному результату: в каждый момент времени электрическое поле совпадает с электростатическим полем данной конфигурации зарядов.

Магнитное поле системы зарядов, совершающих медленное стационарное движение, будет найдено интегрированием (19,6)—(19,7). Введем вектор-потенциал по формуле (10,1). Поскольку зависимостью плотности зарядов ρ и тока j от времени можно пренебречь, напряженности магнитного и электрического полей, а следовательно, и электромагнитные потенциалы также не зависят от времени. Поэтому уравнение для вектора-потенциала (10,6) и соотношение Лоренца (10,5) приобретают соответственно вид

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{19,10}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{19,11}$$

Уравнение (19,10) представляет совокупность трех скалярных уравнений Пуассона:

$$\Delta A_i = -\frac{4\pi}{c} j_i \qquad (i = x,\ y,\ z).$$

Мы будем предполагать, что все компоненты вектора-потенциала системы зарядов, совершающих медленное и стационарное движение, убывают на бесконечности не медленнее, чем по закону $\frac{1}{r}$:

$$A_i \sim O\left(\frac{1}{r}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{19,12}$$

Здесь символ O означает, что отбрасываемые члены имеют порядок малости выше $\frac{1}{r}$. Решение уравнения (19,10), удовлетворяющее требованию (19,12), может быть написано по формуле (3,16) в виде

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,dV'}{R} = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(x',\ y',\ z')\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}, \tag{19,13}$$

где $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ — плотность тока в точке $\boldsymbol{r}'$, а $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ — расстояние от этой точки до точки наблюдения $\boldsymbol{r}$, в которой ищется значение вектора-потенциала.

Нетрудно видеть, что решение (19,13) уравнения (19,10) удовлетворяет условию (19,11). Действительно,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\operatorname{div}_r \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,dV'}{R} = \frac{1}{c}\int \operatorname{div}_r\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\right)dV',$$

где дивергенция берется по координатам точки наблюдения (текущим координатам). Ввиду независимости операций дифференцирования по координатам $\boldsymbol{r}$ и интегрирования по координатам $\boldsymbol{r}'$ порядок их можно изменить. Плотность тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ можно было бы вынести за знак div_r, но это нецелесообразно.

Замена переменной дифференцироваиия по формуле, аналогичной (I, 18), дает

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c}\int \operatorname{div}_{r'}\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\right) dV' = -\frac{1}{c}\oint \frac{\boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{S}}{R} = -\frac{1}{c}\oint \frac{j_n\,dS}{R} = 0,$$

в силу условия (19,1).

Таким образом, формула (19,13) дает решение задачи, удовлетворяющее всем необходимым условиям. Зная вектор-потенциал, можно найти магнитное поле

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\int \frac{\boldsymbol{j}\,dV'}{R} = \frac{1}{c}\int \operatorname{rot}_r \frac{\boldsymbol{j}\,dV'}{R}. \tag{19,14}$$

При дифференцировании по координатам $\boldsymbol{r}$ плотность тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ должна считаться постоянной. Тогда по формуле (I, 43) находим

$$\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{j}}{R} = \left[\operatorname{grad}\frac{1}{R},\ \boldsymbol{j}\right] = \frac{[\boldsymbol{jR}]}{R^3}.$$

Поэтому окончательно

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\int \frac{[\boldsymbol{jR}]}{R^3}\,dV'. \tag{19,15}$$

Формула (19,15) носит название закона Био и Савара. Она дает принципиальное решение поставленной задачи. Однако вычисление интеграла в формуле (19,15) достаточно сложно и может быть проведено до конца только для некоторых простейших систем.

Для нахождения поля одиночного заряда, движущегося в пустоте, формула (19,15) применена в следующем параграфе. Однако она особенно важна для расчета полей токов, текущих по проводникам. Поэтому дальнейшие примеры расчетов с помощью закона Био и Савара будут разобраны в § 19 ч. IV книги.

Подчеркнем, что все результаты этого параграфа, в частности закон Био и Савара, имеют приближенный характер. Они являются следствием соотношений (19,5). Квазистационарные поля особенно часто встречаются при рассмотрении электромагнитных процессов в материальных средах. Поэтому мы вернемся еще к ним в ч. IV (§ 22), где будет проведено более подробное обсуждение условий, при которых поле можно считать квазистационарным.

В заключение приведем соотношение, которое понадобится нам в дальнейшем. Очень часто размеры той области пространства, в которой рассматривается воздействие магнитного поля на систему, достаточно малы, и в пределах этой области магнитное поле можно считать постоянным и однородным. Тогда

вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ этого постоянного однородного поля можно представить в виде

$$\boldsymbol{A}=\frac{[\boldsymbol{H}\boldsymbol{r}]}{2}. \qquad (19,16)$$

В правильности этого соотношения можно убедиться непосредственным вычислением по формуле (I, 45).

§ 20. Поле одиночного заряда, совершающего медленное равномерное движение

Рассмотрим одиночный заряд e, движущийся с постоянной скоростью v_0. Мы будем предполагать, что $|v_0| \ll c$ (см. ниже, § 23).

Плотность заряда ρ может быть представлена в виде

$$\rho(\boldsymbol{r},\ t)=e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)). \qquad (20,1)$$

Здесь $\boldsymbol{r}_0(t)$ — координата заряда в момент времени t. Формула (20,1) означает, что весь заряд в каждый данный момент времени находится в точке пространства с координатой $\boldsymbol{r}_0(t)$. Уравнения Максвелла для электрического поля имеют вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)).$$

Поскольку поле имеет безвихревой характер, можно ввести потенциал $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$, так что

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi.$$

Потенциал удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi=-4\pi e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)).$$

Решение последнего уравнения согласно (0,0) может быть написано в виде

$$\varphi=\int\frac{\rho\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=e\int\frac{\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0(t))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'=\frac{e}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)|}=\frac{e}{R(t)}. \qquad (20,2)$$

Через $\boldsymbol{R}(t)$ обозначен вектор, соединяющий точку наблюдения с мгновенной координатой заряда $\boldsymbol{r}_0(t)$.

Из формулы (20,2) следует, что электрическое поле движущегося заряда формально совпадает с полем неподвижного заряда, но вместо фиксированного расстояния от данной точки наблюдения до заряда, в (20,2) фигурирует переменное во времени расстояние $R(t)$. Поле заряда дается, очевидно, формулой

$$\boldsymbol{E}=\frac{e\boldsymbol{R}(t)}{R^3(t)}. \qquad (20,3)$$

Поскольку заряд движется равномерно, его положение в пространстве можно написать в виде

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{v}_0 t.$$

Поэтому напряженность электрического поля в точке будет зависеть от времени по закону

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t) = \frac{e(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_0 t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_0 t|^3}. \qquad (20,4)$$

Очевидно, что в некоторой точке $\boldsymbol{r}$ в момент времени t напряженность поля будет такая же, как в точке с координатой $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}_0$ в момент времени $t+1$. Действительно,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_0,\ t+1) = \frac{e[\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_0(t+1)]}{|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_0(t+1)|^3} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t).$$

Это означает, что точка с данным значением напряженности поля равномерно движется в пространстве вместе с зарядом. При этом поле сохраняет сферическую симметрию относительно точки, характеризующей мгновенное положение заряда. В дальнейшем мы сравним формулу (20,4) с соответствующим выражением для поля, создаваемого зарядом, движущимся со скоростью $|v_0| \approx c$.

Перейдем теперь к определению магнитного поля. Оно может быть найдено по формуле (19,15), в которой плотность тока для единичного заряда можно написать в виде

$$\boldsymbol{j} = e\boldsymbol{v}_0 \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0).$$

Подставляя значение $\boldsymbol{j}$ в (19,15), находим

$$\boldsymbol{H} = \frac{e}{c} \int \frac{[\boldsymbol{v}_0,\ \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}']\,\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\, dV' = \frac{e}{c}\frac{[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{R}]}{R_0^3} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}]. \qquad (20,5)$$

Таким образом, магнитное поле оказывается перпендикулярным к электрическому полю и перпендикулярным к скорости заряда. Абсолютная величина $|\boldsymbol{H}| \sim \frac{v_0}{c}|\boldsymbol{E}|$, причем всегда $\frac{v_0}{c} < 1$. Дифференцированием по формуле (I, 45), можно убедиться, что вектор $\boldsymbol{H}$ удовлетворяет уравнению (19,7).

Мы разбирали без вычислений вопрос о нахождении поля движущегося заряда в § 9. При этом было указано, что если поверхность интегрирования S_2 (рис. 4) проходит через точку, в которой находится в данный момент движущийся заряд, магнитное поле связывается с током заряда $\boldsymbol{j}$. Эта картина отвечает произведенному нами расчету.

Формула (20,5) была получена, как результат решения уравнений (19,6) и (19,7), в которых ток смещения отсутствовал.

Можно, однако, найти значение магнитного поля, не пользуясь формулой (19,15), по току смещения на произвольной поверхности S_1.

Напишем уравнения для магнитного поля в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e\boldsymbol{v}_0 \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \tag{20,6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{20,7}$$

Зависимость электрического поля $\boldsymbol{E}$ равномерно движущегося заряда от времени задается формулой (20,4). Дифференцируя по времени, находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z} v_z\right) = -(\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E}.$$

Согласно (I, 45) имеем

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}] = (\boldsymbol{E} \operatorname{grad}) \boldsymbol{v}_0 - (\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{v}_0 = \\ = -(\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E},$$

поскольку $\boldsymbol{v}_0$ — постоянный вектор. Отсюда находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -(\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}) \boldsymbol{E} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}] - \boldsymbol{v}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \\ = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}] - 4\pi \boldsymbol{v}_0 e \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0), \tag{20,8}$$

в силу (20,1).

Подставляя значение (20,8) в (20,6), имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{E}]. \tag{20,9}$$

Решением (20,9), удовлетворяющим (20,7), служит (20,5). Мы видим, таким образом, что оба способа расчета приводят, как и следовало ожидать, к одному и тому же результату.

§ 21. Поле системы зарядов, совершающих квазистационарное движение, на больших расстояниях от системы

Предположим, что некоторая совокупность зарядов совершает медленное и квазистационарное движение в ограниченной области пространства. Часто основной интерес представляет электромагнитное поле этой системы на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы (размерами области движения). При этом, как и в случае электростатики, общая формула (19,3) для вектора-потенциала допускает существенное упрощение.

Воспользуемся разложением (15,8), написав

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} - \left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right).$$

Подставляя $\frac{1}{R}$ в (19,13), находим

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{r} \int \boldsymbol{j}\, dV' - \frac{1}{c} \int \boldsymbol{j} \left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) dV'.$$

В силу (19,4) первый интеграл для системы, совершающий стационарное движение, равен нулю. Поэтому

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c} \int \boldsymbol{j} \left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) dV'. \tag{21,1}$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (21,1) с помощью тождества

$$\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) \equiv \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) - \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{j} \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\} + \\ + \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) + \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{j} \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\}.$$

Первую скобку можно представить в виде тройного векторного произведения

$$\left\{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) - \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{j} \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\} = \left[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}] \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right] = -\frac{[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,\boldsymbol{r}]}{r^3}.$$

Таким образом, вектор-потенциал можно представить в виде

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2c} \int \frac{[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,\boldsymbol{r}]\, dV}{r^3} - \frac{1}{2c} \int \left\{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) + \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{j}, \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\} dV'.$$

Займемся вычислением второго интеграла. Вводя, согласно общей теории § 19, трубки тока, можно написать

$$\boldsymbol{j}\, dV' = dI\, d\boldsymbol{l} = dI\, d\boldsymbol{r}'.$$

Действительно, изменение положения заряда $d\boldsymbol{r}'$ при движении по трубке тока тождественно с $d\boldsymbol{l}$. Поэтому

$$I = \int \left\{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) + \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{j}, \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\} dV' = \\ = \int dI \oint \left\{d\boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{r}', \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) + \boldsymbol{r}'\left(d\boldsymbol{r}', \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right\} = \\ = \int dI \oint d\left(\boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{r}', \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)\right) = 0,$$

так как интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала всегда равен нулю.

Таким образом, окончательно

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2cr^3}\int[[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\boldsymbol{r}]\,dV'=\frac{1}{2cr^3}\left[\int[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,dV'.\ \boldsymbol{r}\right]. \qquad (21,2)$$

Введем обозначение

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{2c}\int[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,dV'. \qquad (21,3)$$

Величина $\boldsymbol{M}$ именуется магнитным моментом системы зарядов. Она зависит исключительно от свойств системы зарядов — распределения плотности токов и геометрии системы. Ниже мы увидим, что $\boldsymbol{M}$ действительно является в известной мере аналогом дипольного момента системы неподвижных зарядов.

Вектор-потенциал вдали от системы приобретает вид

$$\boldsymbol{A}=\frac{[\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}]}{r^3}. \qquad (21,4)$$

При этом магнитное поле согласно (I, 45) выражается формулой

$$\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{rot}\frac{[\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}]}{r^3}=\boldsymbol{M}\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-(\boldsymbol{M}\operatorname{grad})\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Поскольку дифференцирование ведется по координатам точки наблюдения, магнитный момент системы при дифференцировании является постоянным.

Согласно (I, 42) находим

$$\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\boldsymbol{r}\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}\operatorname{div}\boldsymbol{r}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0.$$

Далее,

$$(\boldsymbol{M}\operatorname{grad})\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{1}{r^3}(\boldsymbol{M}\operatorname{grad})\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{M}\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\right)=\frac{\boldsymbol{M}}{r^3}-\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{r})}{r^5}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{H}=\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{r})-r^2\boldsymbol{M}}{r^5}. \qquad (21,5)$$

Мы видим, что магнитное поле системы медленно и квазистационарно движущихся зарядов вдали от системы выражается такой же формулой, как электростатическое поле системы покоящихся зарядов. Различие заключается в том, что вместо дипольного момента $\boldsymbol{d}$ в (15,18), в формуле (21,5) стоит магнитный момент системы $\boldsymbol{M}$.

§ 22. Магнитный момент

Рассмотрим несколько подробнее свойства магнитного момента системы. Прежде всего нетрудно убедиться, что значение магнитного момента не зависит от выбора начала координат. Смещая начало координат на постоянный вектор $\boldsymbol{a}$, т. е.

полагая $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'' + \boldsymbol{a}$, находим

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c}\int [\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,dV' = \frac{1}{2c}\int [\boldsymbol{r}''\boldsymbol{j}]\,dV' + \frac{1}{2c}\int [\boldsymbol{a}\boldsymbol{j}]\,dV'$$

Переписав появившийся дополнительный член в виде

$$\int [\boldsymbol{a}\boldsymbol{j}]\,dV' = \left[\boldsymbol{a}\int \boldsymbol{j}\,dV'\right],$$

мы видим, что в силу (19,4) он равен нулю.

Таким образом, магнитный момент, подобно дипольному моменту нейтральной системы зарядов, представляет величину, зависящую только от физических свойств системы, но не от выбора начала отсчета.

Рассмотрим выражение магнитного момента для случая, когда заряды движутся по одной нити или трубке. Пользуясь (19,3), находим

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c}\int dI\,[\boldsymbol{r}'\,d\boldsymbol{l}] = \frac{I}{c}\,\frac{1}{2}\int [\boldsymbol{r}'\,d\boldsymbol{l}]. \tag{22,1}$$

Нетрудно заметить, что величина $\frac{1}{2}[\boldsymbol{r}'\,d\boldsymbol{l}]$ представляет вектор площади. Интеграл $\boldsymbol{S} = \int \frac{[\boldsymbol{r}'\,d\boldsymbol{l}]}{2}$ представляет площадь боковой поверхности конуса, опирающегося на контур с током. В частном случае плоского замкнутого контура за $\boldsymbol{S}$ можно выбрать вектор нормали к площади контура, умноженный на величину площади. Можно записать

$$\boldsymbol{M} = \frac{I\boldsymbol{S}}{c}. \tag{22,2}$$

Формула (22,2) допускает наглядную интерпретацию: всякий замкнутый ток (например, одна или несколько заряженных частиц, движущихся по замкнутым траекториям) обладает магнитым моментом, пропорциональным величине тока В этой связи заметим, что каждый атом с электронами, обращающимися по орбите, является элементарным магнитом (см. ч. IV). Перепишем теперь выражение для магнитного момента, выразив плотность тока через скорость движения зарядов:

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c}\int [\boldsymbol{r}', \rho\boldsymbol{v}]\,dV' = \frac{1}{2c}\sum [\boldsymbol{r}'_i, e\boldsymbol{v}_i], \tag{22,3}$$

где суммирование ведется по всем зарядам в системе.

Рассмотрим важный случай системы, состоящей из одинаковых частиц или из разных частиц, но обладающих одинаковыми

значениями отношения заряда e к массе m. Вводя это отношение в (22,3), находим

$$M = \frac{1}{2c}\sum \frac{e_i}{m_i}[\boldsymbol{r}'_i,\ m_i\boldsymbol{v}_i] = \frac{e}{2mc}\sum [\boldsymbol{r}'_i\boldsymbol{p}_i] = \frac{e}{2mc}\boldsymbol{L}, \qquad (22,4)$$

где $\boldsymbol{L}$ — механический момент системы.

Формула (22,4) показывает, что для системы частиц с постоянным значением $\frac{e}{m}$ между магнитным и механическим моментом системы существует прямая пропорциональность.

Пропорциональность между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{L}$ имеет место также в системе, состоящей из двух частиц при произвольном отношении $\frac{e}{m}$. Действительно, в такой системе

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c}\left\{e_1[\boldsymbol{r}'_1\boldsymbol{v}_1] + e_2[\boldsymbol{r}'_2\boldsymbol{v}_2]\right\}.$$

Поместив начало координат в центр инерции, т. е. положив

$$m_1\boldsymbol{r}'_1 + m_2\boldsymbol{r}'_2 = 0,$$

и вводя относительную скорость

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \dot{\boldsymbol{r}}'_2 - \dot{\boldsymbol{r}}'_1 = \dot{\boldsymbol{r}}'_{\text{отн}},$$

находим

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\frac{m_1}{m_1+m_2}; \qquad \boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\frac{m_2}{m_1+m_2},$$

откуда

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mu^2}{2c}\left\{\frac{e_1}{m_1^2}[\boldsymbol{r}'_{\text{отн}}\boldsymbol{v}_{\text{отн}}] + \frac{e_2}{m_2^2}[\boldsymbol{r}'_{\text{отн}}\boldsymbol{v}_{\text{отн}}]\right\} = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\mu\boldsymbol{L},$$

где $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}'_{\text{отн}}\boldsymbol{p}_{\text{отн}}] = [\boldsymbol{r}'_{\text{отн}}\mu\boldsymbol{v}_{\text{отн}}]$ — момент относительного движения и $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведенная масса.

ГЛАВА IV

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

§ 23. Электромагнитное поле системы произвольно движущихся зарядов

Рассмотрим систему зарядов, совершающих произвольное движение в некотором объеме V'. Распределение и движение зарядов в этом объеме будем характеризовать плотностью заряда $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и плотностью тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$, изменяющимися в пространстве и во времени. Мы будем предполагать, что функции $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ известны в любой момент времени (т. е. при $-\infty < t < \infty$).

Уравнения для электромагнитных потенциалов, зависящих от координат и времени, имеют вид

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\boldsymbol{r}, t), \tag{23,1}$$

$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t), \tag{23,2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = 0. \tag{23,3}$$

Система уравнений (23,1)—(23,3) представляет систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Как известно из теории дифференциальных уравнений в частных производных, однозначное решение задачи, — в данном случае нахождение конкретного распределения электромагнитного поля в пространстве и во времени в зависимости от значений известных функций $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$, требует задания некоторых дополнительных условий, именуемых граничными и начальными условиями.

Обычно задача о нахождении электромагнитного поля ставится следующим образом: до некоторого момента времени $t = 0$ (т. е. при всех значениях времени $t < 0$) заряды в системе были неподвижны; начиная с момента времени $t = 0$ заряды находятся

в движении и движение это произвольное. При этом в электромагнитном поле возникает изменение или, как говорят, возмущение. Мы будем предполагать, что в уравнениях (23,1)—(23,3) фигурируют векторный и скалярный потенциалы именно этого возмущенного поля. Функции $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$, ответственные за возмущение поля при $t > 0$, считаются известными. При $t \leqslant 0$ следует положить

$$\rho(\boldsymbol{r},\ 0) = 0, \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\ 0) = 0.$$

Соответственно в начальный момент времени $t=0$ равны нулю векторы электрического и магнитного полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ 0) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, 0) = 0$. Тогда начальные условия для потенциалов гласят:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)\big|_{t=0} &= 0, \\ \left.\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0, \\ \varphi(\boldsymbol{r},\ t)\big|_{t=0} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{23,4}$$

Действительно, если условия (23,4) удовлетворены, то из определений векторов поля непосредственно видно, что векторы поля обращаются в нуль. Таким образом, начальное условие (23,4) полностью эквивалентно требованию: плотности заряда и тока равны нулю при $t = 0$ и, вообще говоря, отличны от нуля при $t > 0$.

Граничными условиями будут служить требования, чтобы вдали от объема V' потенциалы поля убывали не медленнее, чем по закону:

$$\begin{aligned} \varphi &\sim O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty; \\ |\boldsymbol{A}| &\sim O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty, \end{aligned} \tag{23,5}$$

т. е. не медленнее, чем функция $\frac{1}{r}$.

Для решения системы уравнений поля в этом параграфе мы воспользуемся простым, но не строгим методом, основанным на использовании принципа суперпозиции. В следующем параграфе будет приведен более последовательный, с математической точки зрения, метод решения, который приводит к тем же результатам.

Разобьем всю систему на совокупность как угодно малых зарядов $\delta e_i = \rho(\boldsymbol{r}, t)\,\delta V_i$, где δV_i — как угодно малый объем в области V'. Будем искать в некоторой точке наблюдения N потенциал поля, создаваемого зарядом δe_i, предполагая при этом, что никаких других зарядов в пространстве нет. Полное поле, на основании принципа суперпозиции, представляет сумму полей, создаваемых всеми зарядами δe_i, входящими в систему.

Подчеркнем, что закон сохранения заряда не допускает существования уединенного и переменного во времени заряда δe_i. В действительности изменение (например, возрастание) заряда δe_i во времени предполагает одновременное уменьшение заряда δe_k в другом элементе объема так, чтобы полный заряд системы сохранялся. Однако для нахождения потенциалов поля, создаваемого зарядом δe_i, мы не будем формально учитывать существование остальных зарядов. Возникающее при этом кажущееся нарушение закона сохранения заряда не отразится на конечном решении, в котором будет проведено суммирование по всем зарядам системы.

Найдем, прежде всего, решение системы уравнений для потенциалов поля, создаваемого во всем пространстве вне малого объема δV_i зарядом δe_i.

Во всех точках пространства вне объема δV_i плотность заряда, согласно нашему предположению, равна нулю. Поэтому вне объема δV_i уравнения для потенциалов электромагнитного поля приобретают вид

$$\begin{gathered}\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,\\ \Delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.\end{gathered} \tag{23,6}$$

Введем сферические координаты с началом координат, помещенным в объеме δV_i. Поле вне объема δV_i обладает сферической симметрией, так что потенциалы поля могут зависеть только от расстояния до объема δV_i — радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ и времени. Воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в сферических координатах, имеем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{23,7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\boldsymbol{A}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{23,8}$$

Мы видим, что скалярный потенциал и все компоненты вектора-потенциала определяются уравнением одного типа:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{23,9}$$

По причинам, которые будут ясны из дальнейшего, уравнение типа (23,9) носит название волнового уравнения. Интегрирование волнового уравнения может быть проще всего проведено по методу Даламбера. Метод Даламбера заключается, грубо

говоря, в сведении уравнения в частных производных типа (23,9) к уравнению со смешанной второй производной (за более строгим изложением метода Даламбера отсылаем читателя к математическим руководствам[1])).

Перепишем уравнение (23,9) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rf)=0 \qquad (23,10)$$

и введем новую неизвестную функцию,

$$\psi=rf, \qquad (23,11)$$

что всегда возможно, поскольку $r\neq 0$, вне объема δV_t. Тогда имеем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \qquad (23,12)$$

Перейдем теперь в уравнении (23,12) к новым переменным:

$$\xi=t-\frac{r}{c}, \qquad (23,13)$$

$$\eta=t+\frac{r}{c}. \qquad (23,14)$$

Отсюда

$$t=\frac{\xi+\eta}{2}, \quad r=\frac{\eta-\xi}{2}c,$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\xi}=\frac{c}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\eta}=\frac{c}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Далее,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)=-\frac{4}{c^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}=-\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}.$$

В новых переменных уравнение (23,12) имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}=0. \qquad (23,15)$$

Это уравнение, содержащее лишь смешанную производную, интегрируется непосредственно. Очевидно, что оно удовлетворяется любыми функциями $\psi_1(\eta)$ и $\psi_2(\xi)$ одной переменной, ξ или η. Поэтому общее решение уравнения (23,15) можно написать в виде

$$\psi(\xi,\ \eta)=\psi_1(\xi)+\psi_2(\eta), \qquad (23,16)$$

[1]) См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1967, гл. II.

где ψ_1 и ψ_2 — произвольные функции одной переменной — ξ и η соответственно. Возвращаясь к старым переменным r и t, получаем

$$\psi(r,\ t) = \psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + \psi_2\left(t + \frac{r}{c}\right). \tag{23,17}$$

Найденное решение имеет простой смысл. Значение функции ψ_1 в точке $r + c$ и в момент времени $(t + 1)$ совпадает со значением этой функции в точке r в момент времени t. Это означает, что $\psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right)$ описывает процесс периодический в пространстве и во времени, т. е. волновой процесс. Волновой процесс распространяется в сторону возрастающих значений расстояния r от начала координат со скоростью, равной c. Аналогично $\psi_2\left(t + \frac{r}{c}\right)$ описывает волну, распространяющуюся от больших r к меньшим в направлении к началу координат. Для функции f имеем

$$f = \frac{\psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{\psi_2\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{23,18}$$

Формула (23,18), дающая общее решение уравнения (23,9), представляет наложение двух волн — расходящихся из начала координат (первое слагаемое) и сходящейся к началу координат (второе слагаемое). Поверхности сфер $r = \mathrm{const}$ являются поверхностями постоянного значения функции f или поверхностями равной фазы. Поскольку поверхностями равной фазы являются сферические поверхности, говорят, что волновой процесс, описываемый функцией f, является совокупностью расходящейся и сходящейся сферических волн. Скалярный потенциал φ и все компоненты вектора-потенциала $\boldsymbol{A}$ могут быть представлены в виде формулы (23,18).

Для выяснения смысла полученных решений рассмотрим одно из частных решений, например расходящуюся сферическую волну. Для конкретности напишем выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi(r,\ t) = \frac{\varphi_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{23,19}$$

При произвольном виде функции φ_1 формула (23,19) дает частное решение уравнения (23,1) в области пространства вне объема δV_i. Потребуем теперь, чтобы (23,19) непрерывно переходило в решение уравнения (23,1) вблизи объема δV_i, т. е. вблизи места расположения заряда $\delta e_i(t)$. Если в уравнении (23,1)

совершить формальный переход (смысл такого перехода станет ясным из дальнейшего), положив $c \to \infty$, то оно превратится, очевидно, в уравнение для электростатического потенциала, решением которого служит

$$d\varphi_i = \frac{\delta e_i(t)}{r} = \frac{\rho(r, t)\,\delta V_i}{r}. \qquad (23,20)$$

Записав (23,19) в виде

$$d\varphi_i(r, t) = \frac{\rho\left(t - \frac{r}{c}\right)\delta V_i}{r}, \qquad (23,21)$$

мы приходим к потенциалу поля,создаваемого зарядом δe_i, который удовлетворяет уравнению (23,7) вне объема δV_i и переходит вблизи начала координат в (23.20).

Формула (23,21) показывает, что потенциал поля в точке наблюдения, находящейся на расстоянии r от начала координат в момент времени t, определяется значением заряда в предыдущий момент времени $\tau = t - \frac{r}{c}$. Потенциал (23,21) называется поэтому запаздывающим потенциалом, а величина $\frac{r}{c}$ — временем запаздывания. Время запаздывания представляет промежуток времени, в течение которого электромагнитное поле, распространяющееся со скоростью c, проходит путь r.

Вводя начало координат в некоторой точке O, расположенной в объеме V', и интегрируя выражение (23,21) по всем зарядам системы, приходим к следующему выражению для потенциала поля, создаваемого в точке наблюдения N:

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right) dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV'}{R} = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', \tau)\, dV'}{R}, \qquad (23,22)$$

где $\tau = t - \frac{R}{c}$, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$.

Согласно (23,22) для получения потенциала в точке наблюдения N, как и в электростатике, нужно взять интеграл от величины $\frac{\rho}{R}$ по всему объему системы. При этом, однако, значение плотности заряда берется в момент времени $\tau = t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}$, где время запаздывания $\frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}$ определяется расстоянием от каждой точки $\boldsymbol{r}'$ до точки наблюдения.

Совершенно аналогично для вектора-потенциала можно написать частное решение уравнения (23,2) в виде

$$A=\frac{1}{c}\int\frac{j\left(r',t-\frac{|r-r'|}{c}\right)dV'}{|r-r'|}=$$
$$=\frac{1}{c}\int\frac{j\left(r',t-\frac{R}{c}\right)dV'}{R}=\frac{1}{c}\int\frac{j(r',\tau)\,dV'}{R}. \qquad (23,23)$$

Наряду с решениями уравнений для потенциалов в виде запаздывающих потенциалов можно написать и другие частные решения, отвечающие функции ψ_2 в общем решении (23,18):

$$\varphi^*(r,\ t)=\int\frac{\rho\left(r',t+\frac{R}{c}\right)dV'}{R}, \qquad (23,24)$$
$$A^*(r,\ t)=\frac{1}{c}\int\frac{j\left(r',t+\frac{R}{c}\right)dV'}{R}. \qquad (23,25)$$

В формулах (23,24) и (23,25) значения функций ρ и j, определяющие потенциалы в точке r в момент времени t, берутся в момент времени $\tau^*=t+\frac{R}{c}$. Это означает, что потенциалы в момент времени t зависят от той плотности заряда, которая будет в точке r через промежуток времени $\frac{R}{c}$. Потенциалы (23,24) и (23,25) называются опережающими.

Из запаздывающих и опережающих потенциалов можно составить произвольные линейные комбинации вида $\alpha_1\varphi+\alpha_2\varphi^*$, $\beta_1A+\beta_2A^*$, которые также удовлетворяют уравнениям поля. Общее решение уравнений для потенциалов получается из найденных частных решений и общих решений уравнений (23,7) и (23,8).

Появление запаздывающих и опережающих потенциалов как равноправных решений уравнений поля вполне естественно. Как и уравнения механики, уравнения электродинамики симметричны относительно будущего и прошедшего. Они не меняются при замене t на $(-t)$ и должны поэтому иметь общее решение, инвариантное (неизменное) относительно изменения знака времени.

Выбор коэффициентов в этих линейных комбинациях определяется заданием указанных выше дополнительных условий, характеризующих поведение потенциалов на бесконечности. Для выполнения этих условий необходимо отбросить решение, отвечающее опережающему потенциалу. Действительно, рассмотрим в момент времени $t=0$ некоторую сферу радиуса R_1 вне объема V'. Согласно граничному условию (23,5), потенциал

$\varphi(R_1,\ 0) \approx O\left(\frac{1}{R_1}\right)$. Соответственно этому запаздывающий потенциал

$$\varphi(R_1,\ 0) = \int \frac{\rho\left(r',\ -\frac{R_1}{c}\right)}{R}\, dV' = 0,$$

поскольку по условию плотность заряда равна нулю при $t < 0$. Наоборот, опережающий потенциал

$$\varphi^*(R_1,\ 0) = \int \frac{\rho\left(r',\ \frac{R_1}{c}\right)}{R}\, dV' \neq O\left(\frac{1}{R_1}\right).$$

В последней формуле значению $t = 0$ отвечают отличные от нуля значения аргумента функции $\rho(\boldsymbol{r}', \tau)$, так как плотность заряда $\rho\left(\boldsymbol{r}',\ \frac{R_1}{c}\right)$ не равна нулю.

Напомним, что использованные нами свойства плотности заряда $\rho(\boldsymbol{r}',\ 0) = 0$, $\rho\left(\boldsymbol{r}',\ t - \frac{R}{c}\right) \neq 0$ отвечают выбору начальных условий в форме (23,4). Мы видим, что при таких свойствах плотности ρ опережающий потенциал не удовлетворяет условию (23,5), определяющему его поведение на бесконечности. Именно, опережающий потенциал убывает медленнее, чем функция $\frac{1}{r}$. Для получения такого решения волнового уравнения, которое удовлетворяло бы системе начальных и граничных условий, следует положить $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ и оставить лишь решение уравнений поля в виде запаздывающих потенциалов. Несложные, но несколько громоздкие выкладки позволяют убедиться в том, что запаздывающие потенциалы, даваемые формулами (23,24) и (23,25), удовлетворяют условию Лоренца (23,3) при $\alpha_1 = \beta_1 = 1$.

Итак, мы приходим к весьма важному выводу: система зарядов, начавших в момент времени $t = 0$ двигаться нестационарным образом, создает в окружающем пространстве электромагнитное поле, потенциалы которого имеют характер запаздывающих потенциалов. Потенциалы поля имеют характер сферических волн, исходящих от системы и распространяющихся в пустоте со скоростью c.

Мы будем говорить, что система нестационарно движущихся зарядов излучает электромагнитные волны, и кратко называть ее излучателем.

Решение уравнений электромагнитного поля в виде запаздывающих потенциалов имеет большое принципиальное значение.

Оно отвечает определенной системе представлений о характере причинной связи, которая отличается от представлений классической механики.

Как известно, все положения классической механики согласуются с ньютоновским представлением о действии на расстоянии. В классической механике предполагается, что ускорение некоторой материальной точки в данный момент времени полностью определяется силой, действующей на нее в тот же момент времени. Сила, действующая на данную материальную точку, в свою очередь зависит от положения других материальных точек, находящихся на конечном расстоянии от рассматриваемой. Если положение какой-либо из материальных точек изменится в некоторый момент времени t_0, в тот же момент времени изменится и величина силы. Иными словами, скорость распространения взаимодействия в пространстве считается в классической механике бесконечно большой.

В теории электромагнитого поля ситуация коренным образом изменяется. Если изменить положение зарядов, находящихся на расстоянии r от точки наблюдения, то потенциал в последней изменится лишь через время $\tau = \frac{r}{c}$. Это время требуется для того, чтобы возмущение электромагнитного поля, движущееся от точки к точке с конечной скоростью, равной скорости света c, прошло в пространстве путь r. При этом возмущение передается от одной точки поля к другой, с ней соседней.

Пространство, в котором происходит распространение электромагнитных возмущений, уже не есть пустое «ничто» классической механики, но считается заполненным реальным электромагнитным полем, наделенным определенными физическими свойствами. Таким образом, бесконечно большая скорость распространения взаимодействия и дальнодействие в классической механике заменяется конечной скоростью распространения взаимодействия и представлением о близкодействии в теории электромагнитного поля. Причина (изменение поля) и следствие (движение пробного заряда в точке наблюдения) относятся к одному месту и одному моменту времени. В следующей части книги точка зрения теории поля получит дальнейшее подтверждение и расширение.

Следует еще заметить, что, поскольку скорость распространения электромагнитных возмущений c весьма велика, очень часто на практике можно считать ее бесконечно большой. Представления классической механики тем самым не просто отвергаются как неверные, но сохраняются, как приближенные, имеющие определенную область применимости.

§ 24*. Общее решение уравнения Даламбера в виде запаздывающих потенциалов

Перейдем теперь к строгому решению уравнения Даламбера для потенциалов. Мы ограничимся нахождением одного из потенциалов, например, векторного потенциала. Выражение для скалярного потенциала может быть написано по аналогии.

В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе уравнение для потенциала

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \qquad (24,1)$$

должно быть дополнено начальными и граничными условиями.

Мы рассмотрим задачу в следующей постановке: пусть ранее некоторого момента времени $t = 0$ (т. е. при $t < 0$) имелась система зарядов, например, неподвижных или совершавших стационарное движение. К моменту $t = 0$ их конфигурация задана и поле имеет некоторое распределение в пространстве. В момент времени $t = 0$ состояние системы изменяется и заряды начинают совершать нестационарное движение. Нас будет интересовать закон изменения векторов поля, связанный с этим нестационарным движением зарядов, начиная с момента $t = 0$.

Пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — векторы поля, связанные с движением зарядов за время $t \geqslant 0$. Иными словами, пусть $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — изменения электромагнитного поля, которое существовало в момент $t = 0$, вызванные движением зарядов при $t \geqslant 0$. Тогда из определения $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ следует, что они должны удовлетворять начальному условию:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} = 0 \text{ при } t = 0 \text{ (во всем пространстве)}.$$

Начальное условие для вектора-потенциала имеет при этом следующий вид:

$$\boldsymbol{A} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad r \text{ — любом}, \qquad (24,2)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad r \text{ — любом}. \qquad (24,3)$$

Первое из написанных равенств отвечает равенству $\boldsymbol{H} = 0$, второе — отсутствию электрического поля $\boldsymbol{E} = 0$ в начальный момент времени. Граничное условие на бесконечности имеет вид

$$\boldsymbol{A} \to O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \quad t \geqslant 0. \qquad (24,4)$$

Иными словами, под $\boldsymbol{A}$ мы понимаем вектор-потенциал поля, связанного с движением зарядов, начавшимся в момент $t = 0$ и продолжающимся при $t > 0$.

Для получения решения поставленной задачи — нахождения решения уравнения (24,1), удовлетворяющего системе условий

(24,2)—(24,4) (именуемой в математической физике задачей Коши), — удобнее всего воспользоваться методом интеграла Фурье[1]). Представим векторный потенциал и плотность тока в виде трехкратного интеграла Фурье:

$$A = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int a(k, t)\, e^{-ikr}\, dk, \tag{24,5}$$

$$j = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int p(k, t)\, e^{-ikr}\, dk. \tag{24,6}$$

При этом фурье-изображения вектора-потенциала и плотности тока даются формулами обращения:

$$a(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int A(r, t)\, e^{ikr}\, dr, \tag{24,7}$$

$$p(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int j(r, t)\, e^{ikr}\, dr. \tag{24,8}$$

Подставляя (24,5) и (24,6) в (24,1), находим

$$\frac{d^2a}{dt^2} + k^2c^2a = 4\pi c p. \tag{24,9}$$

Уравнение (24,9) представляет уравнение в полных производных, и его общее решение может быть получено без труда. Подстановка (24,7) в начальные условия (24,2) и (24,3) дает

$$a = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{24,10}$$

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{24,11}$$

Решение уравнения (24,9) с начальными условиями (24,10) и (24,11) гласит[2]):

$$a = \frac{4\pi}{k} \int_0^t p(\xi) \sin\{kc(t-\xi)\}\, d\xi. \tag{24,12}$$

Для получения функции *A* это значение *a* должно быть подставлено в (24,5). Тогда имеем

$$A = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int \int_0^t p(\xi) \sin\{kc(t-\xi)\}\, e^{-ikr}\, d\xi\, \frac{dk}{k}. \tag{24,13}$$

---

[1]) Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1945, стр 183, А. А. Власов, Макроскопическая электродинамика, Гостехиздат, 1955, стр 166

[2]) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Гостехиздат, т. II, 1951, стр 95.

Вместо фурье-изображения ρ в (24.13) следует ввести плотность тока $\boldsymbol{j}$. С помощью (24,8) находим

$$\boldsymbol{A}=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\frac{d\boldsymbol{k}}{k}\int\limits_0^t\int e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\xi)\cdot\sin\{kc(t-\xi)\}\,d\boldsymbol{r}'\,d\xi. \quad (24,14)$$

В формуле (24,14) должно быть проведено интегрирование по переменным ξ и $\boldsymbol{k}$.

Изменим порядок интегрирования, написав

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2\pi^2}\int d\boldsymbol{r}'\int\limits_0^t\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\xi)\,d\xi\int e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}\,d\boldsymbol{k}}{k}. \quad (24,15)$$

Вычислим внутренний интеграл. Имеем

$$\int e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}}{k}\,d\boldsymbol{k}=$$

$$=\int e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta}\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}}{k}\cdot k^2\,dk\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=2\pi\int\limits_0^\infty\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}}{k}k^2\,dk\cdot\int\limits_0^\pi e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta}\sin\theta\,d\theta.$$

Но

$$\int\limits_0^\pi e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta}\sin\theta\,d\theta=\int\limits_{-1}^{+1}e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|u}\,du=2\frac{\sin\{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\}}{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

Поэтому

$$\int e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}}{k}\,d\boldsymbol{k}=$$

$$=\frac{4\pi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\int\limits_0^\infty\sin\{kc(t-\xi)\}\sin\{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\}\,dk=\frac{4\pi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot I,$$

где через I обозначен интеграл:

$$I=\int\limits_0^\infty\sin\{kc(t-\xi)\}\sin\{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\}\,dk=$$

$$=\int\limits_0^\infty\sin\alpha k\sin\beta k\,dk=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\cos(\alpha-\beta)k\,dk-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\cos(\alpha+\beta)k\,dk=\frac{\pi}{2}\delta(\alpha-\beta)-\frac{\pi}{2}\delta(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\delta[c(t-\xi)-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]-\frac{\pi}{2}\delta[c(t-\xi)+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|].$$

При вычислении I мы воспользовались одним из определений дельта-функции, данных в приложении III.

Находим окончательно

$$\int e^{-ik(r-r')}\frac{\sin\{kc(t-\xi)\}}{k}\,d\boldsymbol{k}=$$
$$=\frac{2\pi^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\{\delta[c(t-\xi)-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]-\delta[c(t-\xi)+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]\}.$$

Подставляя это выражение в (24,15), получаем]

$$\boldsymbol{A}=\int\frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^t \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\xi)\,\delta[c(t-\xi)-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]\,d\xi+$$
$$+\int\frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^t \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\xi)\,\delta[c(t-\xi)+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]\,d\xi.$$

Найдем интеграл по переменной ξ, воспользовавшись свойствами δ-функции.

Рассмотрим первый интеграл:

$$\int_0^t \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\xi)\,\delta[c(t-\xi)-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]\,d\xi=$$
$$=-\frac{1}{c}\int_{ct-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',\ -\frac{u}{c}+t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\delta(u)\,du=$$
$$=-\frac{1}{c}\int_{\infty}^{-\infty}\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',\ -\frac{u}{c}+t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)\delta(u)\,du=\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',\ t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right).$$

При этом за новую переменную мы выбрали $u=c(t-\xi)-$ $-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$.

Если имеет место неравенство $t>\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$, можно расширить пределы интегрирования, как это и было сделано. Если же $t<\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$, то интегрирование велось бы только по отрицательным значениям переменной u (оба предела отрицательны).

Точка $u=0$ в которой $\delta(u)$ обращается в бесконечность, лежала бы вне области интегрирования, и в силу (III, 3′) интеграл обратился бы в нуль. Это относится, в частности, к моменту времени $t=0$, что отвечает выполнению начального

условия (24,2). Аналогично второй интеграл дает

$$\int_0^t j(r', \xi)\,\delta[c(t-\xi)+|r-r'|]\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{c}\int_{ct+|r-r'|}^{|r-r'|} j\left(r', -\frac{u}{c}+t+\frac{|r-r'|}{c}\right)\delta(u)\,du = 0.$$

Действительно, в этом случае точка $u=0$ оказывается вне области интегрирования.

Итак, мы получили

$$A(r, t) = \frac{1}{c}\int \frac{j\left(r', t-\frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|}\,dr', \qquad (24,16)$$

т. е. известное уже выражение для запаздывающего потенциала.

Опережающему потенциалу отвечало выражение со второй дельта-функцией. Опережающий потенциал не дал никакого вклада в вектор-потенциал только потому, что при получении решения (24,12) уравнения (24,9) мы воспользовались начальными условиями (24,10) и (24,11), что и определило вид $a(k, t)$.

Если бы мы написали общее решение уравнения (24,9), не задаваясь начальными условиями, в окончательное выражение для потенциала вошла бы линейная комбинация запаздывающего и опережающего потенциалов, а также общее решение однородного уравнения.

Для дальнейшего нам понадобится выражение для потенциала в специальном случае, когда зависимость $j(r, t)$ от времени выражается простым гармоническим законом:

$$j(r, t) = j_0(r)\,e^{i\omega t}. \qquad (24,17)$$

Подстановка в (24,16) дает

$$A(r, t) = \frac{1}{c}\,e^{i\omega t}\int \frac{j_0(r')\,e^{-i\frac{\omega}{c}|r-r'|}}{|r-r'|}\,dr' = A_0(r)\,e^{i\omega t}. \qquad (24,18)$$

Как и следовало ожидать, вектор-потенциал зависит от времени по тому же закону, что и ток. Амплитуда $A_0(r)$ равна, очевидно,

$$A_0(r) = \frac{1}{c}\int \frac{j_0(r')\,e^{-i\frac{\omega}{c}|r-r'|}}{|r-r'|}\,dr'. \qquad (24,19)$$

С другой стороны, подставляя (24,17) и (24,18) в (24,1), имеем

$$\Delta A_0 + \frac{\omega^2}{c^2}A_0 = -\frac{4\pi}{c}j_0. \qquad (24,20)$$

Таким образом, формула (24,19) дает решение уравнения (24,20), которое встретится нам в дальнейшем

Заметим в заключение, что решение уравнения Пуассона является частным случаем последней задачи Полагая в (24,20) и (24,19) $\omega = 0$, приходим к соотношениям:

$$\Delta A_0 = -\frac{4\pi}{c} j_0, \tag{24,21}$$

$$A_0 = \frac{1}{c}\int \frac{j_0(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{24,22}$$

Выражение (24,22) может быть получено и прямым решением (24,21) с помощью разложения в интеграл Фурье Действительно, полагая

$$A_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} a_0(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}, \tag{24,23}$$

$$j_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} p_0(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k} \tag{24,24}$$

и подставляя (24,23) и (24,24) в (24,21), имеем

$$a_0 = \frac{4\pi p_0}{ck^2}. \tag{24,25}$$

Следовательно,

$$A_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\left(\frac{4\pi p_0}{ck^2}\right)d\boldsymbol{k}. \tag{24,26}$$

По формуле обращения из (24,24) получаем

$$p_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} j_0(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r},$$

и подстановка этого выражения в (24,26) приводит к формуле

$$A_0 = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{c}\int j_0(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}'\int e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\frac{d\boldsymbol{k}}{k^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{c}\int j_0(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}'\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dk =$$

$$= \frac{2}{\pi c}\int j_0(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}'\int_0^\infty \frac{\sin\{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\}}{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dk = \frac{1}{c}\int\frac{j_0(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

При этом мы воспользовались равенством

$$\int_0^\infty \frac{\sin\{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\}}{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dk = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty\frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

§ 25*. Поле произвольного движущегося точечного заряда

Важным примером применения формулы запаздывающих потенциалов является случай одиночного точечного заряда, совершающего произвольное движение. Если скорость заряда равна $v_0(t)$, то его координата $\boldsymbol{r}_0 = \int \boldsymbol{v}_0\, dt$. Плотность заряда и плотность тока можно написать в виде

$$\rho = e\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0), \quad \boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}_0 = e\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{v}_0(t).$$

Тогда получаются следующие выражения для запаздывающих потенциалов:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e}{c}\int \frac{\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0(\tau))\,\boldsymbol{v}_0(\tau)\,dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{e}{c}\int \frac{\delta\left(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0\left(t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right)\right)\boldsymbol{v}_0\left(t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right)dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \quad (25{,}1)$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = e\int \frac{\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0(\tau))\,dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = e\int \frac{\delta\left(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0\left(t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right)\right)dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \quad (25{,}2)$$

Поскольку $\boldsymbol{r}_0$ является функцией времени запаздывания $t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}$, в формулах (25,1) и (25,2) в подынтегральной функции нельзя непосредственно воспользоваться свойством дельта-функции и положить $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_0$. Для выполнения интегрирования введем новые переменные:

$$l_x = x' - x_0(\tau), \quad l_y = y' - y_0(\tau), \quad l_z = z' - z_0(\tau)$$

Вычисление якобиана для перехода к новым переменным в общем случае довольно громоздких выкладок. Мы для простоты положим, что заряд движется вдоль оси x_0, так что $v_x = v_0$. Тогда имеем

$$\frac{\partial l_x}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x'} = 1 - v_0\frac{\partial}{\partial x'}\left\{t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right\} = 1 - \frac{v_0}{c}\frac{x - x'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|};$$

$$\frac{\partial l_x}{\partial y'} = 0; \quad \frac{\partial l_x}{\partial z'} = 0;$$

$$\frac{\partial l_y}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial l_y}{\partial y'} = 1; \quad \frac{\partial l_z}{\partial z'} = 0;$$

$$\frac{\partial l_z}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial l_z}{\partial y'} = 0; \quad \frac{\partial l_z}{\partial z'} = 1.$$

Якобиан равен, таким образом,

$$\frac{\partial (l_x, l_y, l_z)}{\partial (x', y', z')} = 1 - \frac{v_0 (x - x')}{c\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}.$$

Аналогичное вычисление при произвольной ориентации скорости приводит к выражению:

$$\frac{\partial (l_x, l_y, l_z)}{\partial (x', y', z')} = 1 - \frac{\boldsymbol{v}_0 (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{c\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}.$$

Поэтому можно написать

$$dx'\,dy'\,dz' = \frac{\partial (x', y', z')}{\partial (l_x, l_y, l_z)}\,dl_x\,dl_y\,dl_z = \frac{dl_x\,dl_y\,dl_z}{1 - \dfrac{\boldsymbol{v}_0 (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{c\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}} = \frac{d\boldsymbol{l}}{1 - \dfrac{\boldsymbol{v}_0 (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{c\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}}.$$

Преобразуя выражения (25,1) и (25,2) к новым переменным, получаем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e}{c}\int \frac{\delta(\boldsymbol{l})\,\boldsymbol{v}_0\left\{t - \dfrac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0|}{c}\right\} d\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0| - \dfrac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0)}{c}\,\boldsymbol{v}\left\{t - \dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0}{c}\right\}} =$$

$$= \frac{e\boldsymbol{v}_0}{c\left[|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| - \dfrac{\boldsymbol{v}_0 (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{c}\right]} = \frac{e\boldsymbol{v}_0(\tau)}{c\left[R(\tau) - \dfrac{\boldsymbol{v}_0(\tau)\,\boldsymbol{R}(\tau)}{c}\right]}, \qquad (25,3)$$

где через $\boldsymbol{R}(\tau)$ обозначен радиус-вектор, проведенный от точки мгновенного положения заряда до точки наблюдения, т. е. $\boldsymbol{R}(\tau) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$. Значение мгновенного положения заряда должно быть взято в момент времени τ:

$$\tau = t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}{c}.$$

Значение мгновенной скорости $\boldsymbol{v}_0(\tau)$ также берется в момент времени τ.

Аналогично

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = e\int \frac{\delta(\boldsymbol{l})\,d\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{l}| - \dfrac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0)}{c}\,\boldsymbol{v}_0\left\{t - \dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l} - \boldsymbol{r}_0}{c}\right\}} =$$

$$= \frac{e}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| - \dfrac{\boldsymbol{v}_0(\tau)}{c}\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)} = \frac{e}{R(\tau) - \dfrac{\boldsymbol{v}_0(\tau)\,\boldsymbol{R}(\tau)}{c}}. \qquad (25,4)$$

Между φ и $\boldsymbol{A}$ имеется соотношение

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{v}_0 \varphi}{c}. \qquad (25,5)$$

Потенциалы поля произвольно движущегося точечного заряда (25,3) и (25,4) носят название потенциалов Лиенара — Вихерта. Если ввести сокращенное обозначение

$$\lambda(\tau) = R(\tau) - \frac{v_0(\tau) R(\tau)}{c}, \tag{25,6}$$

то потенциалы Лиенара — Вихерта приобретут вид

$$A = \frac{e v_0}{c\lambda}, \tag{25,7}$$

$$\varphi = \frac{e}{\lambda}. \tag{25,8}$$

Важно отметить, что потенциалы Лиенара—Вихерта характеризуют поле точечного заряда в самом общем виде — при произвольных значении скорости и характере движения.

Нетрудно заметить, что при скорости заряда v_0, весьма малой по сравнению со скоростью света, т. е при $\frac{|v_0|}{c} \to 0$, выражение для скалярного потенциала φ переходит в формулу (20,2), а вектор-потенциал A оказывается малым. Однако при выводе потенциалов Лиенара — Вихерта мы не накладывали никаких ограничений на величину скорости. Именно поэтому потенциалы Лиенара — Вихерта характеризуют поле точечного заряда в самом общем случае — при произвольном характере и скорости движения.

Мы проведем более подробное обсуждение поля заряда, совершающего произвольное движение в § 20 ч. II, поскольку ряд выводов из формул (25,7)—(25,8) может стать ясным в свете теории относительности.

Найдем поле движущегося заряда В формулах

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$$

и

$$H = \operatorname{rot} A$$

производные берутся по координатам точки наблюдения r и времени наблюдения t Между тем, потенциалы φ и A зависят от r и t сложным образом.

Именно, согласно (25,7) и (25,8) они являются функциями величины τ, которая в свою очередь зависит от r и t. Поэтому нужно написать

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Для нахождения $\frac{\partial\tau}{\partial t}$ воспользуемся определением $\tau = t - \frac{R(\tau)}{c}$. Дифференцирование даст

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R(\tau)}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{1}{1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}}.$$

Воспользовавшись тождеством

$$R\frac{\partial R}{\partial\tau} = \boldsymbol{R}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\tau} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\frac{\partial(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{\partial\tau} = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_0,$$

получаем

$$\frac{\partial R}{\partial\tau} = -\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{R}. \tag{25,9}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{cR}} = \frac{R}{\lambda} \tag{25,10}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{R}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau}.$$

Из определения $\boldsymbol{E}$ и формул (25,7) и (25,8) находим

$$\boldsymbol{E} = -e\,\mathrm{grad}\frac{1}{\lambda} - \frac{e}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{v}_0}{\lambda} = \frac{e}{\lambda^2}\mathrm{grad}\,\lambda - \frac{e}{c^2\lambda}\frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial t} + \frac{e\boldsymbol{v}_0}{c^2\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial t}. \tag{25,11}$$

Имеем, очевидно,

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_0(\tau)}{\partial t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{R}{\lambda}\dot{\boldsymbol{v}}_0, \tag{25,12}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{R}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(R - \frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right) = \frac{R}{\lambda}\left\{\frac{\partial R}{\partial\tau} - \frac{\dot{\boldsymbol{v}}_0\boldsymbol{R}}{c} - \frac{\boldsymbol{v}_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\tau}\right\} =$$
$$= -\frac{R}{\lambda}\left(\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{R} + \frac{\dot{\boldsymbol{v}}_0\boldsymbol{R}}{c} - \frac{v_0^2}{c}\right). \tag{25,13}$$

Вычислим теперь $\mathrm{grad}\,\lambda$. Поскольку $\lambda = \lambda(\boldsymbol{R}, \tau)$, находим

$$\mathrm{grad}\,\lambda = (\mathrm{grad}\,\lambda)_\tau + \frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\mathrm{grad}\,\tau,$$

$$(\mathrm{grad}\,\lambda)_\tau = \mathrm{grad}_R\left(R - \frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right) = \frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{v}_0}{c},$$

так как при дифференцировании по R при постоянном τ вектор $\boldsymbol{v}_0$ остается постоянным. Таким образом,

$$\operatorname{grad}\lambda = \frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{v}_0}{c} + \frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\operatorname{grad}\tau = \frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{v}_0}{c} - \left(\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{R} + \frac{\dot{\boldsymbol{v}}_0\boldsymbol{R}}{c} - \frac{v_0^2}{c}\right)\operatorname{grad}\tau$$

в силу (25,13) и (25,10).

Для $\operatorname{grad}\tau$ имеем

$$\operatorname{grad}\tau = \operatorname{grad}\left(t - \frac{R}{c}\right) = -\frac{\operatorname{grad}R}{c} = -\frac{1}{c}\left((\operatorname{grad}R)_\tau + \frac{\partial R}{\partial\tau}\operatorname{grad}\tau\right),$$

откуда, на основании (25,9),

$$\operatorname{grad}\tau = -\frac{1}{c}\frac{(\operatorname{grad}R)_\tau}{1+\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial\tau}} = -\frac{\boldsymbol{R}}{cR}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial\tau}} = -\frac{\boldsymbol{R}}{c\left(R-\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right)} = -\frac{\boldsymbol{R}}{c\lambda}.$$

Окончательно,

$$\operatorname{grad}\lambda = \frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{v}_0}{c} + \left(\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{R} + \frac{\dot{\boldsymbol{v}}_0\boldsymbol{R}}{c} - \frac{v_0^2}{c}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{c\lambda}. \qquad (25,14)$$

Подставляя в (25,11) значения производных из (25,12), (25,13) и (25.14), приходим к выражению для $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = e\frac{\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)}{\left(R-\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right)^3}\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}_0}{c}R\right) + \frac{e}{c^2\left(R-\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right)^3}\left[\boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{v}_0}{c}R,\ \dot{\boldsymbol{v}}_0\right]\right] = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2, \qquad (25,15)$$

где

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{e\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{v}_0R}{c}\right)}{\left(R-\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right)^3}, \qquad (25,16)$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{e}{c^2}\frac{1}{\left(R-\frac{\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{R}}{c}\right)^3}\left[\boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{v}_0R}{c},\ \dot{\boldsymbol{v}}_0\right]\right]. \qquad (25,17)$$

Аналогично магнитное поле

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{rot}\frac{e\boldsymbol{v}_0}{c\lambda} = \frac{e}{\lambda c}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0 + \frac{e}{c}\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\lambda},\ \boldsymbol{v}_0\right] = \frac{e\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0}{\lambda c} - \frac{e}{c\lambda^2}[\operatorname{grad}\lambda,\ \boldsymbol{v}_0].$$

Но

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0(\tau) = -[\dot{\boldsymbol{v}}_0,\ \operatorname{grad}\tau] = -\frac{[\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{v}}_0]}{c\lambda},$$

откуда

$$\boldsymbol{H} = -e\frac{[\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{v}}_0]}{c^2\lambda^2} + \frac{e}{c\lambda^2}[\boldsymbol{v}_0 \operatorname{grad}\lambda]. \tag{25,18}$$

Сравнивая формулы (25,18) с (25,15) и учитывая (25,14), находим

$$\boldsymbol{H} = \frac{[\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}]}{R}. \tag{25,19}$$

В формулах (25,15) и (25,18) величины $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{R}$ следует брать в момент времени τ.

При этом $\boldsymbol{R}(\tau)$ — расстояние между положением заряда и точкой наблюдения в момент времени τ, $\boldsymbol{R}(t)$ — расстояние от положения заряда до точки наблюдения в момент времени t. За время $t-\tau$ возмущение электромагнитного поля проходит расстояние $R(\tau)$. Если заряд движется равномерно, то путь заряда за то же время равен $\boldsymbol{v}(t-\tau)$.

Электрическое поле $\boldsymbol{E}$, создаваемое зарядом, естественно распадается на две части. Первая, $\boldsymbol{E}_1$, зависит от скорости заряда $\boldsymbol{v}_0$, вторая, $\boldsymbol{E}_2$, — от его ускорения $\dot{\boldsymbol{v}}_0$. В случае равномерного движения вторая часть поля отсутствует.

Величина $|\boldsymbol{E}_1|$ на больших расстояниях от заряда убывает с расстоянием по закону

$$|\boldsymbol{E}_1| \sim \frac{1}{R^2}.$$

Из (25.16) следует, что $\boldsymbol{E}_1$ всегда имеет компоненту, направленную по вектору $\boldsymbol{R}$. Наконец, при $v_0 \ll c$, как легко видеть,

$$\boldsymbol{E}_1 \approx \frac{e\boldsymbol{R}}{R^3},$$

т. е. переходит в выражение (20,4) для поля медленно движущегося заряда.

Второе слагаемое в поле, как видно из (25,17), всегда перпендикулярно к радиусу-вектору $\boldsymbol{R}(\tau)$, т. е. имеет характер поперечного поля. Оно перпендикулярно также и к ускорению $\dot{\boldsymbol{v}}_0$. Вторая часть поля на больших расстояниях от заряда убывает по закону

$$|\boldsymbol{E}_2| \sim \frac{1}{R}.$$

Таким образом, на больших расстояниях $\boldsymbol{E} \approx \boldsymbol{E}_2$.

При $v_0 \ll c$ из (25,17) находим

$$\boldsymbol{E}_2 \approx \frac{e}{c^2R^3}[\boldsymbol{R}[\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{v}}_0]].$$

Смысл этого слагаемого будет ясен из дальнейшего (см. § 26—27).

Магнитное поле движущегося заряда, согласно (25,19), всегда перпендикулярно к электрическому полю и радиусу-вектору $\boldsymbol{R}$ По абсолютной величине напряженности электрического и магнитного полей на больших расстояниях от заряда равны между собой.

$$|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{H}|.$$

При выводе (25,15)—(25,18) мы не делали никаких допущений о малости v по сравнению с c. Тем не менее, формулы теряют всякий смысл, если попытаться положить в них $v_0 > c$: при этом изменился бы знак у поля, т. е. оказалось бы, что положительный заряд создает такое поле, какое должен создавать отрицательный заряд. Это означает, что при $v_0 > c$ полученные соотношения теряют свою применимость.

В части II книги смысл этого результата станет очевидным. Там же мы покажем, что найденные здесь соотношения действительно справедливы при любых возможных скоростях движения.

ГЛАВА V

ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 26. Потенциалы электромагнитного поля вдали от излучения в дипольном приближении

Общие формулы для запаздывающих потенциалов, полученные в § 23, весьма сложны. Действительно, поскольку входящие в (23,22) и (23,23) выражения для плотности заряда и плотности тока, являются функциями времени запаздывания, для вычисления потенциалов в момент времени t необходимо в соответствующих интегралах брать значения этих величин в разные моменты времени в каждой точке системы Поэтому, кроме рассмотренного в предыдущем параграфе случая единичного точечного заряда, не удается получить конкретных точных выражений для потенциалов с помощью общих формул (23,22) и (23,33).

Если, однако, точка наблюдения находится достаточно далеко от системы движущихся зарядов, так что $|\boldsymbol{r}| \gg L'$, где $L' \sim |V'|^{1/3}$ — характерный линейный размер системы, то выражения (23,22) и (23,23) допускают упрощения. Именно, выражение $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ можно разложить в ряд, как это было сделано при вычислении полей неподвижных (§ 15) и медленно движущихся (§ 21) зарядов. Тогда получаем

$$\varphi = \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \approx$$

$$\approx \int \left(\frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) dV' =$$

$$= \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) dV'}{r} + \int \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{r^3} \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right) dV', \quad (26,1)$$

где r — расстояние от точки наблюдения до начала координат.

Необходимо подчеркнуть, что $\int \rho(\boldsymbol{r}', \tau)\, dV' \neq e$, т. е. не является полным зарядом системы. Действительно, значение

плотности в этом интеграле зависит от аргумента $\tau = t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}$ и представляет сложную функцию координат $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{r}$ и времени. Время запаздывания для каждой точки в объеме V' различное. По этой причине интегралы в (26,1) не могут быть вычислены в общем виде.

Дальнейшее упрощение возникает в том случае, если вместо различного времени запаздывания для каждой точки системы ввести одно общее время запаздывания для всей системы. Именно, написав аргумент $\tau = t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}$ в виде

$$\tau \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr} = \tau_0 + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}, \tag{26,2}$$

мы видим, что полное время запаздывания $\frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}$ слагается из двух частей. Первая из них, равная $\frac{r}{c}$ и именуемая временем запаздывания системы, представляет время, требующееся для распространения электромагнитного поля от начала координат до точки наблюдения. Вторая часть, равная $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$ и именуемая собственным запаздыванием, также имеет простой смысл: это время, которое требуется для распространения поля в пределах системы. По порядку величины $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr} \sim \frac{L'}{c}$, и при $|\boldsymbol{r}| \gg L'$ собственное запаздывание $\frac{|\boldsymbol{r}'|}{c}$ по абсолютной величине мало по сравнению с $\frac{|\boldsymbol{r}|}{c}$. Это еще не означает, однако, что плотность заряда можно разложить в ряд по малому параметру $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$, написав

$$\rho(\boldsymbol{r}', \tau) = \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right) =$$
$$= \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}\right) \approx \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \cdot \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr} =$$
$$= \rho(\boldsymbol{r}', \tau_0) + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0). \tag{26,3}$$

Действительно, если за время, равное времени собственного запаздывания $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$, конфигурация зарядов в системе успеет заметно измениться, т. е. если за это время заряды успеют заметно передвинуться в системе, то плотность заряда в момент времени $t - \frac{r}{c}$ будет существенно отличаться от плотно-

сти заряда в момент времени $t - \frac{r}{c} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$. Иными словами, плотность заряда ρ будет быстро изменяющейся функцией своего аргумента, и пользоваться равенством (26,3) недопустимо. Для того чтобы это равенство имело место, необходимо, чтобы за время $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$, в течение которого поле, распространяющееся со скоростью c, прошло по системе, заряды в системе, движущиеся со скоростью v, не успели заметно сдвинуться. За время $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}$ заряды проходят путь порядка $v\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr} \sim v\frac{L'}{c}$. Если этот путь мал по сравнению с размерами системы, можно считать, что за время собственного запаздывания расположение зарядов в системе не успевает измениться.

Таким образом, можно считать, что при

$$v\frac{L'}{c} \ll L',$$

или при скоростях движения, удовлетворяющих неравенству

$$v \ll c, \tag{26,4}$$

изменение конфигурации за время собственного запаздывания мало. При этом $\rho(\boldsymbol{r}', \tau)$ является медленно изменяющейся функцией своего аргумента. Это значит, что малым изменениям τ отвечают малые изменения ρ и можно пользоваться разложением ρ по степеням малого запаздывания. Подставляя (26,3) в (26,1) и ограничиваясь членами разложения, содержащими наименьшие степени $\frac{1}{r}$, находим

$$\begin{aligned}\varphi &\approx \int\left(\frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\left(\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0) + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr}\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\right)dV' \approx \\ &\approx \int\left\{\frac{\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)}{r} + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr^2}\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\right\}dV' = \\ &= \int\frac{\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'}{r} + \frac{\boldsymbol{n}}{cr}\int\boldsymbol{r}'\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV',\end{aligned} \tag{26,5}$$

где $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$. Слагаемое $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{r^3}\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)$ мало по сравнению со слагаемым $\frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr^2}\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)$ на достаточно большом расстоянии от системы.

В формуле (26,5) сделано весьма существенное упрощение по сравнению с (26,1), поскольку плотность заряда во всех точках системы берется в один и тот же момент времени

$$\tau_0 = t - \frac{r}{c}.$$

Первое слагаемое в (26,5) имеет простой смысл: $\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0) = \rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{r}{c}\right)$ представляет плотность заряда в системе в момент времени τ_0. Интеграл $\int \rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'$ дает полный заряд системы. Для электронейтральной системы он равен нулю. В этом случае имеем

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\boldsymbol{n}}{cr} \int \boldsymbol{r}'\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'. \tag{26,6}$$

Интеграл в правой части формулы (26,6) перепишем, воспользовавшись уравнением непрерывности (5,3):

$$\int \boldsymbol{r}'\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV' = \int \boldsymbol{r}' \frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tau_0}\,dV' = -\int \boldsymbol{r}' \operatorname{div}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'.$$

Последний интеграл удобно вычислить в координатном представлении:

$$\int x' \frac{\partial j_{x'}}{\partial x'}\,dx' = x' j_{x'}\Big|_{x_1'}^{x_2'} - \int j_{x'}\,dx',$$

где x_1' и x_2' — границы области движения зарядов, на которых плотность тока обращается в нуль, так что

$$\int x' \frac{\partial j_{x'}}{\partial x'}\,dx' = -\int j_{x'}\,dx'.$$

Соответственно в векторном виде получим

$$\int \boldsymbol{r}'\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV' = \int \boldsymbol{j}\,dV'. \tag{26,7}$$

Подставляя (26,7) в (26,6), находим скалярный потенциал в зависимости от плотности тока в системе

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\boldsymbol{n}}{cr} \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'. \tag{26,8}$$

Аналогично можно получить выражение для вектора-потенциала, разлагая в ряд выражение $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ в формуле (23,23) и пренебрегая собственным запаздыванием:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'. \tag{26,9}$$

Сравнивая (26,8) и (26,9), находим, что между φ и $\boldsymbol{A}$ существует простая связь:

$$\varphi = \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}. \tag{26,10}$$

Интеграл $\int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV'$ имеет простой смысл. Действительно, из определения дипольного момента (15,14), мы видим, что

$$\int \boldsymbol{j}\,dV' = \int \boldsymbol{r}'\dot{\rho}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV' = \frac{\partial}{\partial\tau}\int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}', \tau_0)\,dV' = \dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0), \qquad (26,11)$$

где $\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)$ — производная дипольного момента по времени, взятая в момент времени τ_0. При этом мы воспользовались тем, что $\boldsymbol{r}'$ — независимая переменная интегрирования, не зависящая от τ_0.

С помощью (26,11) выражения (26,8) и (26,9) можно представить в виде

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{cr}, \qquad (26,12)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{cr}. \qquad (26,13)$$

Мы видим, что в том приближении, когда можно пренебречь собственным запаздыванием, потенциалы поля вдали от системы определяются значением производной по времени от ее дипольного момента. Поэтому такое приближение при вычислении потенциалов поля называется дипольным приближением. Условием применимости дипольного приближения является выполнение неравенства (26,4).

В дипольном приближении потенциалы поля вдали от электронейтральной системы убывают по закону $1/r$, в то время как аналогичный электростатический потенциал электронейтральной системы неподвижных зарядов, обладающей дипольным моментом, изменяется по закону $1/r^2$.

Легко проверить, что для потенциалов, найденных в дипольном приближении, выполнено условие Лоренца:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{r} =$$
$$= \frac{1}{cr}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0) + \frac{1}{c}\left(\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0), \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) \approx \frac{1}{cr}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0). \qquad (26,14)$$

Как и при вычислении (26,5), второй член, в сумме пропорциональный $1/r^2$ и малый по сравнению с первым, пропорциональным $1/r$, может быть опущен. Мы видим, что при дифференцировании по координатам вдали от излучателя величину $1/r$ можно считать постоянной. Далее, по формуле (1,39) имеем

$$\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0) = \frac{\partial\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{\partial\tau_0}\operatorname{grad}\tau_0 = -\ddot{\boldsymbol{d}}\,\frac{\boldsymbol{r}}{cr} = -\frac{\ddot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}}{c}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2 r}\, \ddot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)\, \boldsymbol{n}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\dot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}}{r} \approx \frac{1}{c^2}\frac{\boldsymbol{n}}{r}\ddot{\boldsymbol{d}}(\tau_0),$$

поэтому

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

как и должно было быть.

Полученные результаты имеют простой и весьма важный смысл: при движении зарядов в системе (изменении ее дипольного момента во времени) в окружающем пространстве возникает электромагнитное поле. Потенциалы этого поля сравнительно медленно (по закону $1/r$) убывают с расстоянием от системы и зависят от времени.

Система неравномерно движущихся зарядов является излучателем.

В последующих параграфах мы рассмотрим более подробно поле излучения и свойства излучающих систем.

§ 27. Электромагнитное поле дипольного излучения вдали от излучателя

Зная распределение потенциалов, можно найти значения магнитного и электрического полей. Имеем

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{r}.$$

При вычислении ротора вдали от излучателя следует проводить вычисление так же, как и при вычислении дивергенции в формуле (26,14): при дифференцировании по координатам множитель $\frac{1}{r}$ следует считать постоянным. Тогда по формуле (I,40) находим

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{cr}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0) = \frac{1}{cr}\left[\operatorname{grad}\tau_0,\ \frac{d\dot{\boldsymbol{d}}(\tau_0)}{d\tau_0}\right] = \frac{1}{c}[\dot{A}\boldsymbol{n}] = \frac{1}{c^2 r}[\ddot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}]. \quad (27{,}1)$$

Мы опустили значок τ_0 при $\boldsymbol{d}$. Однако здесь и *во всех* дальнейших соотношениях этого параграфа $\boldsymbol{d}$ является функцией аргумента $\tau_0 = t - \frac{r}{c}$.

Для любой функции запаздывающего аргумента $t - \frac{r}{c}$ имеем

$$\operatorname{grad} f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{df}{d\tau_0}\operatorname{grad}\tau_0 = -\dot{f}\frac{\boldsymbol{n}}{c},$$

где положено

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial \tau_0}\frac{\partial \tau_0}{\partial t}=\dot{f}.$$

Поэтому для электрического поля можно написать

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}+\frac{\boldsymbol{n}}{c}\dot{\varphi}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}+\frac{\boldsymbol{n}}{c}(\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{A}})=$$
$$=\frac{1}{c}\{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{A}})-\dot{\boldsymbol{A}}\}=\frac{1}{c}[[\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{n}]\boldsymbol{n}]=\frac{1}{c^2 r}[[\ddot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}]\boldsymbol{n}]. \qquad (27,2)$$

Сравнивая (27,2) с (27,1), мы видим, что векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ связаны между собой соотношением

$$\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{H}\boldsymbol{n}]. \qquad (27,3)$$

Напряженности электрического и магнитного полей зависят от координат и времени по закону:

$$|\boldsymbol{H}|=|\boldsymbol{E}|=f\,\frac{\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}.$$

Как мы видели в § 23, последняя формула является выражением сферической волны. Амплитуда волны уменьшается вдали от излучателя по закону $\sim\frac{1}{r}$.

При этом векторы электрического и магнитного полей равны между собой по абсолютной величине, а по направлению перпендикулярных друг к другу и к радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$.

Область вдали от излучателя, в которой электромагнитное поле описывается сферическими волнами, носит название волновой зоны. Несколько ниже мы уточним это понятие.

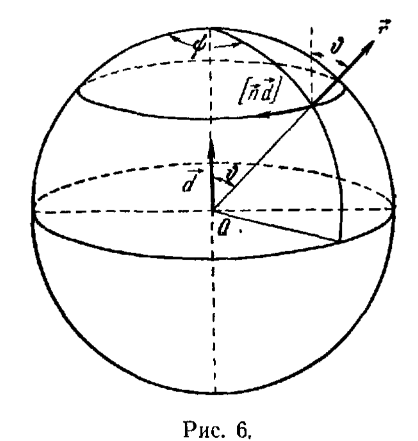


Рис. 6.

Введем сферическую систему координат r, θ, ψ (рис. 6) с полярной осью, ориентированной по вектору $\boldsymbol{d}$. Направление вектора $\boldsymbol{H}$ определяется вектором $[\boldsymbol{n},\ddot{\boldsymbol{d}}]$, направленным по касательной к линии широты на поверхности сферы и ориентированным в сторону убывания азимутального угла ψ, так что

$$[\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}]_r=0;\quad [\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}]_\theta=0;$$
$$[\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}]_\psi=-\ddot{d}\sin\theta.$$

Поэтому вектор $\boldsymbol{H}$ имеет в сферической системе координат следующие проекции:

$$H_r = 0; \quad H_\theta = 0; \quad H_\psi = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \sin\theta. \tag{27,4}$$

Вектор $\boldsymbol{E}$ направлен перпендикулярно к векторам $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{n}$ по касательной к линии долготы и ориентирован в сторону убывания полярного угла θ. Его проекции равны

$$E_r = 0; \quad E_\theta = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \sin\theta; \quad E_\psi = 0. \tag{27,5}$$

Формулы (27,4) и (27,5) показывают, что напряженности поля имеют наибольшее значение при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (в экваториальной плоскости) и убывают до нуля по мере приближения к полярной оси.

Вычислим вектор Пойнтинга излучающей системы:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}] = \frac{c}{4\pi} H^2 \boldsymbol{n} = \frac{c}{8\pi}(E^2 + H^2)\boldsymbol{n} =$$
$$= cu\boldsymbol{n}_0 = \frac{1}{4\pi c^3 r^2}[\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{n}]^2 \boldsymbol{n} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2}[\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}]^2 \boldsymbol{n}. \tag{27,6}$$

Вектор Пойнтинга оказывается направленным по радиусу-вектору и по абсолютной величине равным

$$\sigma = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{\ddot{d}^2}{r^2} \sin^2\theta. \tag{27,7}$$

То обстоятельство, что вектор Пойнтинга отличен от нуля и всегда направлен от излучающей системы, имеет очевидный смысл: имеется поток электромагнитной энергии, излучаемой системой в окружающее пространство. Формула (27,7) определяет плотность потока излучаемой энергии в зависимости от ориентации в пространстве (угла θ) и расстояния до излучающей системы. Наличие потока энергии оправдывает введенные нами раньше термины поля «излучение» и «излучатель».

Подчеркиваем, что, как видно из (27,6), при фактическом наблюдении излучения в некотором направлении $\boldsymbol{n}$ играет роль только значение компоненты вектора второй производной от дипольного момента ($\ddot{\boldsymbol{d}}$) в плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{n}$.

Поток энергии через векторную площадку $d\Sigma$, стягивающую телесный угол $d\Omega$, называется интенсивностью излучения в телесном угле $d\Omega$. Для интенсивности излучения dI можно написать

$$dI = \boldsymbol{\sigma}\, d\boldsymbol{\Sigma} = \sigma\, d\Sigma = \sigma r^2\, d\Omega = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2\, d\Omega = \frac{\ddot{d}^2 \sin^2\theta}{4\pi c^3 r^2} r^2\, d\Omega =$$
$$= \frac{|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2}{4\pi c^3} \sin^3\theta\, d\theta\, d\psi = \frac{[\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}]^2}{4\pi c^3}\, d\Omega. \tag{27,8}$$

Полный поток энергии, излучаемый системой, именуемый обычно полной интенсивностью излучения, равен

$$-\frac{dE}{dt}=I=\int \sigma\, d\Sigma=\frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\psi=\frac{2}{3}\frac{\ddot{d}^2}{c^3}. \qquad (27,9)$$

Здесь $\left(-\frac{dE}{dt}\right)$ — убыль энергии излучающей системы за 1 секунду.

Интенсивность излучения в дипольном приближении определяется только значением $\ddot{d}\left(t-\frac{r}{c}\right)$. Иными словами, в момент времени t значение I в данной точке зависит от величины $\ddot{d}$ в предыдущий момент времени $t-\frac{r}{c}$. В остальном же интенсивность излучения не зависит от расстояния до излучающей системы, как это и следовало ожидать на основании закона сохранения энергии: поток энергии, проходящий в единицу времени через любую замкнутую поверхность, окружающую излучающую систему, имеет одно и то же значение.

В заключение укажем на соотношение, имеющее место для плотности энергии и импульса излучения. В силу формул (27,6) и (13,11) можем написать

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{c^2}\,\sigma=\frac{u_0}{c}\,\boldsymbol{n}. \qquad (27,10)$$

С этим важным соотношением мы неоднократно будем встречаться в дальнейшем.

Мы видим, что при излучении излучающая система теряет не только энергию, но и импульс, которые превращаются в энергию и импульс излучения.

§ 28. Дипольное излучение простейших систем

В качестве примера использования формул дипольного излучения рассмотрим несколько простейших систем.

Для одиночного заряда, получающего ускорение под действием силы $\boldsymbol{F}$, можем написать

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{d}&=e\boldsymbol{r},\\ \ddot{\boldsymbol{d}}&=e\ddot{\boldsymbol{r}}=e\frac{\boldsymbol{F}}{m},\end{aligned}\right\} \qquad (28,1)$$

где $\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{w}$ — ускорение, с которым движется заряд. Поэтому

$$\sigma=\frac{c}{4\pi}H^2\boldsymbol{n}=\frac{e^2w^2\sin^2\theta}{4\pi c^3r^2}\,\boldsymbol{n}. \qquad (28,2)$$

Поток энергии в направлении вектора ускорения ($\theta=0$) отсутствует и имеет наибольшую величину в направлении, перпендикулярном к вектору ускорения $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$. Полная излучаемая за единицу времени в телесном угле $d\Omega$ энергия (полная интенсивность излучения в угле $d\Omega$) равна

$$dI=\frac{e^2w^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\,d\Omega \tag{28,3}$$

и пропорциональна квадрату ускорения. Полная интенсивность, излучаемая одиночным зарядом во всех направлениях, равна (см. (27,9))

$$I=\frac{2}{3}\frac{e^2w^2}{c^3}. \tag{28,4}$$

Она определяется величиной квадрата ускорения и квадрата заряда.

Мы видим, что всякий заряд, движущийся ускоренно, излучает энергию в виде электромагнитных волн.

Применение формулы (28,2) к единичному заряду требует некоторого пояснения. При выводе формулы (27,6) производилось разложение по малому параметру — собственному времени запаздывания, который теряет смысл в случае системы, состоящей из одного заряда. Однако в § 25 мы нашли выражения для потенциалов поля произвольно движущегося одиночного заряда. Если заменить в (25,7)

$$e\boldsymbol{v}_0=\int\rho\boldsymbol{v}_0\,dV=\int\boldsymbol{j}\,dV=\dot{\boldsymbol{d}}$$

и рассмотреть случай движения со скоростью, малой по сравнению со скоростью света, так что $\lambda(\tau)\approx r$, то выражение для вектора-потенциала точечного заряда будет тождественно с формулой (26,13).

Таким образом, вдали от медленного движущегося заряда его поле будет совпадать с полем системы зарядов в дипольном приближении.

Вычислим еще потерю импульса излучающей частицей. В силу формул (13,11) и (28,2) мы видим, что полная потеря импульса заряда при излучении

$$-\frac{dP}{dt}=\int g\,d\Omega=\frac{1}{c^2}\int\sigma\,d\Omega=0. \tag{28,5}$$

Смысл этого результата заключается в том, что излучение заряда под углами θ и $\pi-\theta$ одинаково. Импульсы излучения в противоположных направлениях взаимно компенсируются. Подчеркнем, что формулы (28,4) и (28,5) относятся к заряду, кото-

рый в момент излучения покоился. Только для такого заряда имеет место соотношение (28,1).

Рассмотрим несколько простейших примеров расчета излучения движущегося одиночного заряда.

Пусть, например, заряд движется в однородном магнитном поле. Для простоты будем считать, что начальная скорость заряда v_0 перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{H}$. Движущийся в магнитном поле заряд обладает ускорением

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \frac{e}{mc}[\boldsymbol{vH}]$$

и соответственно этому непрерывно получает электромагнитные волны. Полная интенсивность излучения равна

$$I = \frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^5}[\boldsymbol{vH}]^2. \tag{28,6}$$

Если считать потерю энергии малой, то можно приближенно считать скорость заряда постоянной: $v \approx v_0$. При этом $[\boldsymbol{vH}] \approx \approx [\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{H}] \approx v_0 H$. Поэтому

$$I = \frac{2}{3}\frac{e^4v_0^2H^2}{m^2c^5} = \frac{4}{3}\frac{e^4H^2}{m^3c^5}\left(\frac{mv_0^2}{2}\right). \tag{28,6'}$$

Излучаемая энергия обратно пропорциональна c^5 и весьма мала. Однако она растет с энергией и эффект излучения становится существенным при очень больших энергиях частиц, например, для частиц космических лучей в магнитном поле Земли или быстрых электронов, движущихся в магнитных полях современных бетатронов. Расчеты показали, что именно потери энергии на излучение в магнитном поле являются основным источником потерь, определяющих достижимые энергии частиц в бетатроне. Следует, однако, иметь в виду, что формула (28,6) применима лишь при скоростях $v \ll c$. Случай $v \sim c$ будет нами разобран в § 26 ч. II.

В качестве второго примера рассмотрим излучение заряда, колеблющегося по гармоническому закону:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{28,7}$$

Ускорение заряда равно

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\omega_0^2\boldsymbol{r} = -\omega_0^2\boldsymbol{r}_0\cos(\omega t + \alpha). \tag{28,8}$$

Поэтому интенсивность, излучаемая в телесном угле $d\Omega$, равна

$$dI = \frac{e^2\omega_0^4}{4\pi c^3}[\boldsymbol{nr}_0]^2\cos^2(\omega t + \alpha)\,d\Omega.$$

Средняя (за один период) интенсивность излучения в угле $d\Omega$

$$d\overline{I} = \frac{1}{T}\int_0^T dI = \frac{e^2\omega_0^4}{8\pi c^3}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_0]^2\,d\Omega. \tag{29,9}$$

Формула (28,9) определяет, в частности, угловое распределение излучаемой интенсивности. Полная интенсивность, излучаемая осциллятором, дается формулой

$$\overline{I} = \int d\overline{I} = \frac{e^2\omega_0^4 r_0^2}{3c^3}. \tag{28,10}$$

Осциллятор излучает электромагнитные волны, частоты которых совпадают с его собственной частотой ω_0. Интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды и четвертой степени частоты. Особая важность этого примера заключается в следующем

В начале развития электронной теории была предложена известная модель атома Томсона. Предполагалось, что электрон находится в центре сферы, образованной непрерывно распределенным положительным зарядом. Излучение атома в модели Томсона связывалось с малыми колебаниями электрона около положения равновесия в центре атома Таким образом, атом как излучающая система сводился к излучающему осциллятору, и формула (28,10) давала интенсивность атомного излучения. В 1911 г. опыты Резерфорда показали непригодность модели Томсона и она была оставлена Однако оказалось, что гармонический осциллятор как модель излучающей атомной системы приводил в ряде случаев к совершенно правильным результатам, нашедшим подтверждение на опыте. Важнейшим из них является существование определенных частот ω_0 излучения, характерных для данного атома. Поэтому осциллятор оставался в классической физике моделью излучающей атомной системы, хотя в рамках классической теории невозможно было понять, почему такая далекая от действительности модель может правильно передавать важные особенности атомных излучателей. Ситуация была разъяснена с появлением квантовой теории излучения. В квантовой механике мы увидим, что квантовая теория излучения приводит в ряде случаев к соотношениям, формально совпадающим с выражениями, полученными для классической модели излучателя. Причина такого совпадения, грубо говоря, заключается в следующем: ряд свойств атомных излучателей определяется не конкретным законом движения излучающих частиц, а фактом периодичности процесса С другой стороны, круговому периодическому движению электрона с по-

стоянной угловой скоростью отвечает колебание плоского осциллятора

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha), \quad y = a\sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Поэтому модель осциллятора, колеблющегося с частотой ω_0 передает некоторые характерные черты атомного излучателя. Мы будем учитывать это обстоятельство и в дальнейшем подробно разбирать свойства осциллятора как классической модели атомной излучающей системы. С другой стороны, мы увидим на ряде примеров, что классическая электродинамика непосредственно неприменима к внутриатомным процессам и приводит к соотношениям, количественно и даже качественно противоречащим опытным данным.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из двух частиц с зарядами e_1 и e_2 и массами m_1 и m_2. Для такой системы

$$\ddot{\boldsymbol{d}} = e_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + e_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = e_1\boldsymbol{w}_1 + e_2\boldsymbol{w}_2.$$

Если система из двух частиц является замкнутой, ускорения могут быть написаны в виде

$$w_1 = \frac{\boldsymbol{F}}{m_1}, \quad w_2 = -\frac{\boldsymbol{F}}{m_2},$$

где $\boldsymbol{F}$ — сила взаимодействия между частицами. Поэтому

$$\ddot{\boldsymbol{d}} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\boldsymbol{F}$$

и интенсивность излучения в угле $d\Omega$

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 [\boldsymbol{F}\boldsymbol{n}]^2\, d\Omega. \qquad (28,11)$$

Важнейшим следствием формулы (28,11) является утверждение, что система, состоящая из одинаковых частиц, или система из различных частиц, но имеющих одинаковые отношения e/m, не может излучать в дипольном приближении. Для нахождения излучения таких систем необходимо учитывать эффекты старшего порядка (см. § 32).

§ 29. Реакция излучения

Мы видели в предыдущих параграфах, что одиночный заряд, движущийся ускоренно, теряет энергию на излучение. При составлении баланса энергии частицы, движущейся под действием внешних сил, необходимо учитывать потери на излучение.

Мы видели также, что поле излучения обладает не только энергией, но и импульсом. Благодаря этому, излучение сопровождается обратным силовым воздействием испускаемого поля на частицу. Это воздействие излучаемого поля на собственное движение частицы называется реакцией излучения.

Баланс сил с учетом действия излучения должен быть написан в виде

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_s = \int \rho\left(\boldsymbol{E} + \frac{[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]}{c}\right) dV + \boldsymbol{F}_s.$$

Первое слагаемое представляет внешнюю силу, действующую на частицу, а $\boldsymbol{F}_s$ — силу реакции излучения, именуемую также силой лоренцева торможения.

Для вычисления силы реакции $\boldsymbol{F}_s$ можно, в принципе, поступить следующим образом. Представим, что излучающий заряд распределен в пространстве. Разбив его на элементы δe и $\delta e'$, можно вычислить действие поля, излучаемого элементом $\delta e'$, на элемент δe. Просуммировав затем по всем элементам $\delta e'$ и δe, мы найдем искомую полную силу самодействия. Описанное вычисление является довольно громоздким[1]). Кроме того, оно может быть проведено лишь на примере модели, ценность которой с точки зрения современной квантовой теории весьма невелика. Мы остановимся поэтому на другом рассуждении, приводящем к тому же выражению для силы $\boldsymbol{F}_s$.

Предположим, что сила лоренцева торможения $\boldsymbol{F}_s$ мала по сравнению с внешними силами. Смысл такого предположения мы подробно обсудим ниже, когда найдем $\boldsymbol{F}_s$. Если это допущение выполнено, то в первом приближении заряд совершает движение под действием сил внешнего поля $\boldsymbol{F}$. При движении он излучает энергию, определяемую формулой (27,9).

Допустим, кроме того, что заряд совершает периодическое движение или, в более общем виде, в некоторый момент времени t_1 возвращается в исходное состояние движения, в котором он находился в начальный момент времени t_0. Составим баланс энергии для системы, состоящей из заряда, совершающего подобное движение, и внешнего электромагнитного поля. Очевидно, что если бы заряд ничего не изучал, то по возвращении его в исходное состояние полная работа, произведенная над ним внешним полем $W = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\, dt$, была бы равна нулю; было бы равно нулю и изменение энергии $\Delta E_{\text{вн поля}}$ внешнего поля.

Если в следующем приближении учесть, что полная сила, действующая на заряд, слагается из сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}_s$, то можно написать баланс энергии в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_s)\, \boldsymbol{v}\, dt = \Delta E + \Delta E_{\text{вн. поля}},$$

[1]) В Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956, стр 41.

где ΔE — энергия, излученная зарядом за время $(t_1 - t_0)$. Учитывая, что в силу сказанного $\Delta E_{\text{вн. поля}} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\,dt = 0$, можно написать

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}_s\boldsymbol{v}\,dt = \Delta E = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int\limits_{t_0}^{t_1} w^2\,dt. \tag{29,1}$$

Интегрируя правую сторону по частям, получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}_s\boldsymbol{v}\,dt = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}\Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\ddot{\boldsymbol{v}}\,dt.$$

Поскольку в момент t_1 состояние движения совпадает с состоянием движения в момент t_0, так что $\boldsymbol{v}_{t_0} = \boldsymbol{v}_{t_1}$, $\boldsymbol{w}_{t_0} = \boldsymbol{w}_{t_1}$, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}_s\boldsymbol{v}\,dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\ddot{\boldsymbol{v}}\,dt.$$

Приравнивая подынтегральные выражения, находим

$$\boldsymbol{F}_s = \frac{2}{3}e^2\frac{\ddot{\boldsymbol{v}}}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^2\dot{\boldsymbol{w}}}{c^3}. \tag{29,2}$$

Сила реакции излучения оказывается зависящей от производной ускорения частицы. Согласно сделанному предположению, сила реакции излучения $\boldsymbol{F}_s$ мала по сравнению с внешней силой, действующей на частицу, так что под $\boldsymbol{w}$ в (29,1) нужно понимать ускорение частицы во внешнем поле сил. Если бы это было не так, т. е. если бы, например, выполнялось обратное неравенство $F_s \gg F$, то уравнение движения имело бы вид

$$mw \approx F_s = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{w}.$$

Его решением служит

$$w = w_0 e^{\frac{3mc^3}{2e^2}t}.$$

Последняя формула показывает, что под действием обратной реакции излучения ускорение экспоненциально возрастает во времени — частица саморазгоняется. Такой саморазгон противоречит как законам классической механики, так и всем опытным данным.

Таким образом, допущение $|\boldsymbol{F}_s| \gg |\boldsymbol{F}|$ приводит к физически бессмысленному результату. Наоборот, при $|\boldsymbol{F}_s| \ll |\boldsymbol{F}|$ величину $\boldsymbol{w}$ можно с достаточной степенью точности считать равной

ускорению во внешнем поле, приобретаемому частицей под действием лоренцевой силы $\boldsymbol{F}$. Считая последнюю периодической функцией времени с частотой ω, можем, очевидно, написать для абсолютной величины $\boldsymbol{F}_s$ следующее выражение

$$|\boldsymbol{F}_s| = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|\dot{\boldsymbol{w}}| = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left|\frac{\dot{\boldsymbol{F}}}{m}\right| = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\omega}{m}|\boldsymbol{F}|. \tag{29,3}$$

Поэтому условие применимости выражения (29,3) для реакции излучения $|\boldsymbol{F}_s| \ll |\boldsymbol{F}|$ приобретает следующий вид:

$$\frac{e^2\omega}{mc^3} \ll 1. \tag{29,4}$$

Невыполнение неравенства (29,4) означает, что реакция излучения не мала, а последнее ведет к физически неверному результату. Таким образом, неравенство (29,4) имеет фундаментальное значение для применимости теории излучения и законов классической теории поля вообще Классическая теория поля приводит к разумным результатам, согласующимся с опытными данными, лишь при частотах

$$\omega \ll \frac{mc^3}{e^2}. \tag{29,5}$$

Если под m понимать массу элементарного заряда-электрона, то условие (29,5) оказывается выполненным при всех оптических и рентгеновских частотах и даже для не слишком жестких γ-лучей Однако, как будет подробнее сказано в § 17 ч. II, в случае жестких γ-лучей законы классической электродинамики оказываются более неприменимыми и квантовые эффекты играют основную роль

Интересно переписать неравенство (29,5), введя в него длину волны $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. Тогда вместо (29,5) имеем

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2} = r_0. \tag{29,6}$$

Величина $r_0 \sim 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ *см* по причинам, которые будут выяснены в § 13 ч II, называется классическим радиусом электрона

Неравенство (29,6) можно интерпретировать следующим образом: у электромагнитных явлений в масштабах $\sim r_0$ реакция излучения становится не малой по сравнению с другими силами. При этом соотношения классической теории поля оказываются неприменимыми Таким образом, в классической теории поля имеется внутренний предел применимости — она пригодна к рассмотрению явлений, разыгрывающихся в области пространства протяженностью порядка классического радиуса электрона. В дальнейшем мы увидим, что фактическая область применимости классической теории поля не простирается до

столь малых масштабов. Оказывается, что квантовые эффекты, кладущие предел применимости классических представлений к микрочастицам, начинают играть роль на расстояниях порядка $\Lambda = \frac{\hbar}{mc}$, где $\hbar$ — постоянная Планка, равная $1{,}05 \cdot 10^{-27}$ *эрг · сек*. Величина Λ, равная $2 \cdot 10^{-10}$ *см*, носит название комптоновской длины волны. С этой величиной мы столкнемся в § 17 ч. II, где будет рассмотрен так называемый эффект Комптона.

В квантовой механике будет подробно разобран вопрос о границах применимости соотношений классической теории и будет дано доказательство приведенного утверждения.

§ 30. Ширина излучаемых линий

Реакция излучения оказывает существенное влияние на свойства излучаемого поля. Именно, мы покажем, что излучатель, который без учета действия силы реакции излучал бы монохроматические электромагнитные волны с частотой ω_0, в действительности излучает совокупность частот близких, но не равных ω_0.

Иными словами, благодаря эффекту затухания монохроматическое излучение превращается в излучение непрерывного спектра волн со всевозможными частотами.

Доказательство этого утверждения мы проведем на простейшей модели излучающей системы — линейном гармоническом осцилляторе. Пусть заряженная частица движется под действием квазиупругой силы $(-kx)$ вдоль оси x, так что уравнение ее движения имеет вид

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{F_s}{m},$$

или

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{2}{3}\frac{e^2 \dot{w}}{mc^3},$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — частота колебаний осциллятора в отсутствие силы F_s.

Считая F_s малой по сравнению с квазиупругой силой $(-kx)$, можно положить ускорение равным ускорению гармонического осциллятора без реакции излучения, т. е.

$$w = -\omega_0^2 x; \quad \dot{w} = -\omega_0^2 \dot{x},$$

и написать

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (30{,}1)$$

где обозначено

$$\gamma = \frac{2}{3}\frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3}. \qquad (30{,}2)$$

Решением уравнения (30,1) при $\gamma \ll \omega_0$ служит выражение

$$x \approx x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i\omega_0 t}. \qquad (30,3)$$

При этом подразумевается, что в (30,3) и последующих формулах, содержащих комплексные выражения, следует взять вещественную часть. Решение (30,3) отвечает начальному условию:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Формула (30,3) показывает, что благодаря реакции излучения, определяемой величиной γ, колебания осциллятора имеют затухающий характер. Коэффициент затухания $\frac{\gamma}{2}$ аналогичен коэффициенту затухания механического осциллятора при наличии силы трения. Это оправдывает второе название силы F_s — силы лоренцева трения.

Для нахождения излучения затухающего осциллятора напишем его ускорение в виде

$$w = \ddot{x} = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i\omega_0 t},$$

где A — постоянная (равная, в том же приближении $(\gamma \ll \omega_0)$, $A \approx -x_0\omega_0^2$).

Ускорение затухающего осциллятора не является периодической функцией времени. Поэтому излучаемые таким осциллятором электромагнитные волны не имеют определенной частоты. Напротив, в излучении будут представлены все частоты $0 \leqslant \omega < \infty$. Это означает, что затухающий осциллятор излучает сплошной спектр частот.

Нас будет интересовать в дальнейшем распределение энергии в этом спектре, т. е. доля полной энергии, излучаемой осциллятором, приходящаяся на интервал частот ω, $\omega + d\omega$. Эта функция $I(\omega)$, носящая название спектральной функции распределения Лоренца, связана с полной энергией I_0, излучаемой осциллятором,

$$I_0 = \int_0^\infty I(\omega)\, d\omega. \qquad (30,4)$$

Полная энергия, излучаемая осциллятором, равна

$$I_0 = \int_0^\infty I\, dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0^\infty w^2\, dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{-\infty}^\infty w^2\, dt. \qquad (30,5)$$

При этом мы распространим пределы интегрирования на об-

ласть отрицательных времен, поскольку при $t<0$ осциллятор покоился и подынтегральная функция тождественно равна нулю.

Разложим ускорение в интеграл Фурье:

$$w(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega,$$

где компонента Фурье $W(\omega)$ равна

$$W(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}w(t)\,\bar{e}^{i\omega t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}w(t)\,\bar{e}^{i\omega t}\,dt=$$

$$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\left[\frac{\gamma}{2}-i(\omega_0-\omega)\right]}.$$

По формуле (II, 9) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}w^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|W(\omega)|^2\,d\omega=\frac{A^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\gamma^2}{4}}=\frac{A^2}{\gamma}. \qquad (30,6)$$

Подставляя формулу (30,6) в (30,5), находим

$$I_0=\frac{1}{3\pi}\,\frac{e^2}{c^3}\,A^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\gamma^2}{4}}=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\frac{A^2}{\gamma}, \qquad (30,7)$$

откуда

$$A^2=\frac{3c^3\gamma}{2e^2}\,I_0. \qquad (30,8)$$

С другой стороны, сравнивая (30,7) и (30,4) и учитывая, что спектральное распределение определено только для существенно положительных значений частоты, находим

$$I(\omega)=\frac{I_0}{2\pi}\,\frac{\gamma}{\left[(\omega_0-\omega)^2+\frac{\gamma^2}{4}\right]}. \qquad (30,9)$$

Спектральные функции распределения для разных значений $\omega_0/2\gamma$ представлены на рис. 7. Они имеют резкий максимум при $\omega\approx\omega_0$, т. е. при частоте, которая излучалась бы осциллятором в отсутствие затухания,

$$I(\omega_0)=\frac{2I_0}{\pi\gamma}.$$

При $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$ излучаемая интенсивность равна

$$I\left(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{I(\omega_0)}{2},$$

т. е. вдвое меньше интенсивности в максимуме. По этой причине величина $\gamma/2$ носит название полуширины излучаемой

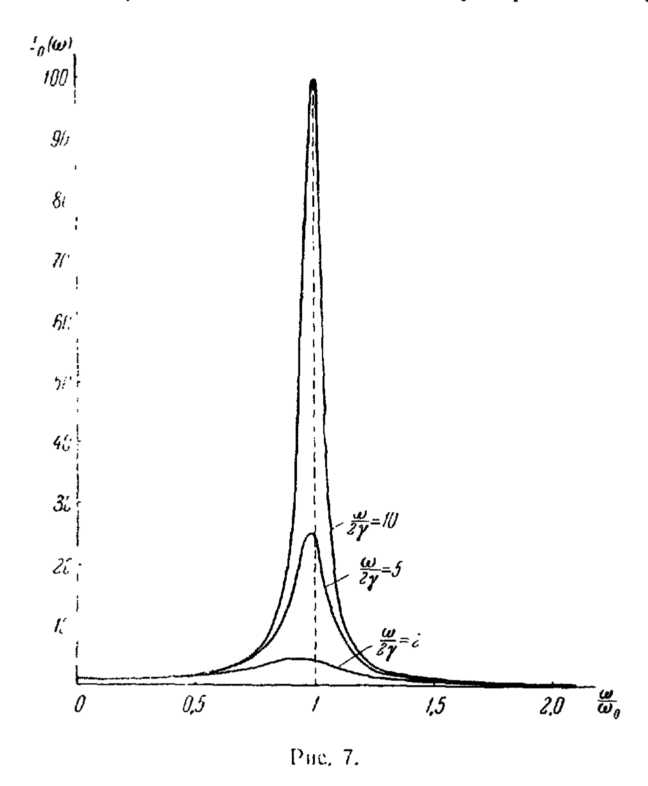


Рис. 7.

линии. Согласно (30,2) полуширине линии $\gamma/2$ отвечает интервал длин волн

$$|\Delta\lambda| = 2\pi\left|\Delta\frac{c}{\omega_0}\right| = \frac{2\pi c\,\Delta\omega}{\omega_0^2} = \frac{2\pi c}{\omega_0^2}\frac{\gamma}{2} =$$

$$= \frac{\pi c}{\omega_0^2}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3 m}\omega_0^2 = \frac{2\pi}{3}\frac{e^2}{mc^2} = \frac{2\pi}{3}r_0,$$

не зависящий от длины волны и по порядку величины равный классическому радиусу электрона.

§ 31. Влияние магнитного и электрического полей на излучение (эффекты Зеемана и Штарка). Квадрупольное и магнитное дипольное излучение

Важным открытием, сыгравшим существенную роль в утверждении электромагнитной теории света, было обнаружение влияния магнитного поля на излучение, названное эффектом Зеемана.

Мы рассмотрим теорию эффекта Зеемана на обычной классической модели атомного излучателя — пространственном гармоническом осцилляторе. Предположим, что излучающий гармонический осциллятор помещен в магнитное поле $\boldsymbol{H}$, направление которого выберем за ось z. Уравнения движения осциллятора в проекциях можно получить, используя выражение для силы Лоренца:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega_L \dot{y}, \tag{31,1}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\omega_L \dot{x}, \tag{31,2}$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0, \tag{31,3}$$

где ω_0 — частота колебаний осциллятора в отсутствие магнитного поля и $\omega_L = \frac{eH}{2mc}$ — так называемая ларморова частота.

Уравнение (31,3) показывает, что в направлении поля частота колебаний не изменяется.

Будем искать решение уравнений (31,1) и (31,2) в виде

$$x = ae^{i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t}.$$

Подстановка в (31,1) и (31,2) дает

$$a(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega_L \omega b = 0,$$

$$b(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega_L \omega a = 0.$$

Приравнивая нулю детерминант системы, находим

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 4\omega_L^2 \omega^2,$$

откуда

$$\omega_1^2 + 2\omega_L \omega_1 - \omega_0^2 = 0,$$

$$\omega_2^2 - 2\omega_L \omega_2 - \omega_0^2 = 0,$$

где ω_1 и ω_2 — возможные значения частоты. Решая эти уравнения, находим

$$\omega_1 = -\omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}, \tag{31,4}$$

$$\omega_2 = \omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}. \tag{31,5}$$

При этом у корня выбран положительный знак, поскольку частота ω — величина существенно положительная.

Таким образом, излучение пространственного осциллятора эквивалентно излучению трех линейных осцилляторов: одного вдоль поля $\boldsymbol{H}$ с частотой ω_0 и двух других в плоскости (xy) с частотами ω_1 и ω_2. Если направление наблюдения перпендикулярно к полю $\boldsymbol{H}$, например, совпадает с осью x, то наблюдается излучение, определяемое компонентами вектора дипольного момента, лежащими в плоскости yz. В этой плоскости лежат компоненты:

$$\ddot{d}_y = e\ddot{y} = -e\left(\omega_1^2 b_1 e^{i\omega_1 t} + \omega_2^2 b_2 e^{i\omega_2 t}\right), \qquad \ddot{d}_z = e\ddot{z} = -e\omega_0^2 c e^{i\omega_0 t}.$$

Таким образом, при наблюдении вдоль оси x должны наблюдаться три частоты — ω_1, ω_0 и ω_2 (так называемый триплет Зеемана).

Измеряя расстояние между крайними линиями,

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{eH}{mc}, \tag{31,6}$$

можно определить значение e/m для излучающей частицы. Экспериментально Зееманом было обнаружено, что если пары веществ, находящихся в атомном состоянии, помещены в магнитное поле, то в их излучении действительно наблюдается триплет. Расстояние между крайними компонентами триплета имеет значение, с большой степенью точности отвечающее по формуле (31,6) отношению e/m для электрона.

Вскоре выяснилось, однако, что вместо триплета Зеемана в излучении целого ряда атомов в магнитном поле наблюдалась более сложная картина расщепления излучаемых линий. Это явление, получившее название аномального эффекта Зеемана, оказалось встречающимся несравненно чаще, чем нормальный эффект Зеемана.

Классическая теория излучения не могла дать удовлетворительного объяснения аномальному эффекту Зеемана.

В квантовой механике мы увидим, каковы причины, вызывающие аномальный эффект Зеемана, и почему осцилляторная модель атомного излучателя дает правильные результаты для нормального эффекта Зеемана.

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии постоянного во времени внешнего электрического поля на излучатель. Во внешнем электрическом поле $\boldsymbol{E}$ уравнения движения гармонического осциллятора имеют вид

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} = e\boldsymbol{E}.$$

Поскольку на протяжении атомной системы внешнее поле можно считать неизменным и поле постоянно во времени, можно ввести новую координату,

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - \frac{eE}{\omega_0^2},$$

для которой имеем

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + \omega_0^2 \boldsymbol{r}_1 = 0. \tag{31,7}$$

Уравнение (31,7) означает, что гармонический осциллятор при наличии постоянного внешнего поля совершает колебания с той же частотой ω_0, но около смещенного положения равновесия.

В приближении ангармонического осциллятора классическая теория приводит к изменению излучаемой частоты во внешнем электрическом поле. Однако наблюдавшееся на опыте сложное расщепление линий у атомного водорода (эффект Штарка) получило объяснение только в квантовой механике.

Мы видели выше, что в некоторых случаях система зарядов не может излучать в дипольном приближении. Это не означает, разумеется, что такая система вовсе не может излучать.

Если в дипольном приближении излучение отсутствует, следует искать старшие члены разложения по степеням собственного запаздывания в системе, которые будут определять излучение высших порядков — квадрупольное, октупольное и т. п. Мы ограничимся нахождением излучения следующего (после дипольного приближения) порядка.

Напишем вектор-потенциал излучающей системы на большом расстоянии от системы в виде, аналогичном (26,5):

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{r} \left[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, \tau_0) + \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}}{cr} \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \tau_0} \right] dV' =$$

$$= \frac{1}{cr} \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\, dV' + \frac{1}{c^2 r} \int \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \tau_0} (\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}')\, dV' = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2. \tag{31,8}$$

Первое слагаемое в (31,8) описывает, согласно (26,9), дипольное излучение. Нас поэтому будет интересовать только второе слагаемое:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{1}{c^2 r} \int \frac{\partial \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \tau_0)}{\partial \tau_0} (\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}')\, dV' = \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}')\, dV'.$$

При этом мы воспользовались тем, что постоянный вектор $\boldsymbol{n}$ и переменная интегрирования $\boldsymbol{r}'$ не зависят от времени, и изменили порядок дифференцирования и интегрирования. Значение интеграла берется в момент времени τ_0:

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \int (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \tau_0)\, dV'. \tag{31,9}$$

Преобразуем подынтегральное выражение, симметризовав его с помощью формулы (I,6). Тогда получим

$$A_2 = \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial \tau_0}\left\{\int\limits_0 [[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\boldsymbol{n}]\,dV'\right\} + \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial \tau_0}\int \{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{j}\boldsymbol{n})\}\,dV'. \tag{31,10}$$

Из определения магнитного момента (22,1) следует, что первый интеграл можно представить в виде

$$\frac{1}{2c}\int [[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}]\,\boldsymbol{n}]\,dV' = [\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}].$$

Чтобы выяснить смысл второго интеграла, удобно перейти от интегрирования к суммированию, спроектировав векторное выражение на некоторую ось α в декартовой системе координат:

$$\int \{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{j}\boldsymbol{n})\}_\alpha dV' = \sum_i \left\{e_i \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{r}'_i\boldsymbol{n}) + e_i \boldsymbol{r}'_i(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{n})\right\}_\alpha =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau_0}\left\{\sum e\boldsymbol{r}'_i(\boldsymbol{r}'_i\boldsymbol{n})\right\}_\alpha = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial \tau_0}\{\mathscr{D}_{\alpha\beta} n_\beta\},$$

где $\mathscr{D}_{\alpha\beta}$ — квадрупольный момент системы, определенный формулой (16,3). По индексу β ($\beta = x, y, z$) производится суммирование. Переходя к векторному выражению, мы можем написать

$$\int \{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{j}\boldsymbol{n})\}\,dV' = \frac{\partial}{\partial \tau_0}\boldsymbol{\mathscr{D}}, \tag{31,11}$$

где, по определению, вектор $\boldsymbol{\mathscr{D}}$ равен

$$\mathscr{D}_\alpha = \mathscr{D}_{\alpha\beta} n_\beta. \tag{31,12}$$

Тогда окончательно находим для вектор-потенциала

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\dot{\boldsymbol{d}}}{cr} + \frac{1}{cr}[\dot{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{n}] + \frac{1}{6c^2 r}\ddot{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{A}_{\text{дип}} + \boldsymbol{A}_{\text{маг.дип}} + \boldsymbol{A}_{\text{квадр}}, \tag{31,13}$$

где точкой обозначено дифференцирование по аргументу τ_0, от которого зависят векторы $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{D}$.

Напряженности полей могут быть найдены с помощью (10,1) и (10,2).

В выражении (31,13) первое слагаемое описывает дипольное излучение. Второе определяется производной по времени от магнитного момента и, естественно, получило наименование магнитного дипольного излучения. Последнее слагаемое содержит вторую производную от квадрупольного момента. Оно определяет квадрупольное излучение.

Оценим по порядку величины, слагаемые в (31,13):

$$\dot{\boldsymbol{d}} \sim eL'\omega; \quad \dot{\boldsymbol{M}} \sim \frac{e}{c} vL'\omega \sim \frac{eL'^2\omega^2}{c}; \quad \ddot{D} \sim eL'^2\omega^2.$$

Поэтому

$$\frac{|[\dot{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{n}]|}{|\dot{\boldsymbol{d}}|} \sim \frac{evL'}{ecL'} \sim \frac{v}{c},$$

$$\frac{\frac{1}{c}|\ddot{D}_{\alpha\beta}n_\beta|}{|\dot{\boldsymbol{d}}|} \sim \frac{e\omega^2L'^2}{ec\omega L'} \sim \frac{L'\omega}{c} \sim \frac{L'}{\lambda},$$

где L' — характерный размер системы и λ — длина волны излучения.

Поскольку по нашим допущениям $v \ll c$ и $L' \ll \lambda$, слагаемые, отвечающие магнитному дипольному и квадрупольному излучениям, весьма малы по сравнению с первым слагаемым, описывающим дипольное излучение. Это означает, что магнитное дипольное и квадрупольное излучения играют роль только для систем, у которых дипольное излучение отсутствует. В общем случае нельзя сказать, какое из этих двух слагаемых вносит основной вклад в излучение.

Вычислим интенсивность магнитного дипольного и квадрупольного излучений в отдельности.

Согласно формулам (27,8) и (27,1), интенсивность магнитного дипольного излучения

$$dI_{\text{м}} = \frac{c}{4\pi} H^2r^2\,d\Omega = \frac{1}{4\pi c}[\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{n}]^2r^2\,d\Omega =$$
$$= \frac{1}{4\pi c^3}[[\ddot{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{n}]\,\boldsymbol{n}]^2\,d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3}\ddot{M}^2\sin^3\theta\,d\theta\,d\psi. \qquad (31,14)$$

Интенсивность магнитного дипольного излучения определяется точно таким же выражением, что и интенсивность дипольного излучения (27,8), но в (31,14) вместо $\ddot{\boldsymbol{d}}$ стоит $\ddot{\boldsymbol{M}}$.

Полная интенсивность магнитного дипольного излучения получается интегрированием (31,14) по всем углам:

$$I_{\text{м}} = \frac{2}{3}\frac{(\ddot{\boldsymbol{M}})^2}{c^3}. \qquad (31,15)$$

Интенсивность магнитного дипольного излучения меньше, чем интенсивность дипольного излучения в отношении $\left(\frac{v}{c}\right)^2$.

Подчеркнем, что магнитное дипольное излучение отсутствует у систем, магнитный момент которых пропорционален механическому моменту. Согласно сказанному в § 22, это имеет место для систем с постоянным значением отношения $\frac{e}{m}$, а также для

системы из двух произвольных частиц. В силу последнего, магнитное дипольное излучение отсутствует при соударениях двух частиц.

Перейдем теперь к расчету интенсивности квадрупольного излучения. Подставляя значение $A_{\text{квадр}}$ в общую формулу (27,7) и повторяя вычисления § 27, находим

$$dI_{\text{квадр}} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 \, d\Omega = \frac{1}{4\pi c} [\dot{A}_{\text{квадр}} n]^2 r^2 \, d\Omega = \\ = \frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{1}{36 c^4} [\dddot{D} n]^2 d\Omega. \qquad (31,16)$$

Преобразуем квадрат векторного произведения по формуле (I,5) с учетом определения (31,12):

$$[\dddot{D} n]^2 = (\dddot{D})^2 - (n\dddot{D})^2 = \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta} \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma - \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta} \dddot{\mathscr{D}}_{\lambda\mu} n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu. \qquad (31,17)$$

По парным индексам подразумевается суммирование.

Угловая зависимость $dI_{\text{квадр}}$ оказывается весьма сложной. Однако полное излучение в единицу времени может быть вычислено сравнительно просто. Интегрируя (31,16) с учетом (31,17), получаем

$$I_{\text{квадр}} = \frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{1}{36 c^4} \left\{ \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta} \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\gamma} \int n_\beta n_\gamma \, d\Omega - \dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta} \dddot{\mathscr{D}}_{\lambda\mu} \int n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu \, d\Omega \right\}. \qquad (31,18)$$

Вычисление даст

$$\int n_\beta n_\gamma \, d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{\beta\gamma}, \qquad (31,19)$$

$$\int n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu \, d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\mu} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}). \qquad (31,20)$$

Поэтому для I находим

$$I_{\text{квадр}} = \frac{1}{36 c^5} \left\{ \frac{1}{3} (\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{15} [\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\alpha} \dddot{\mathscr{D}}_{\beta\beta} + 2 (\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta})^2] \right\} = \frac{1}{180 c^5} (\dddot{\mathscr{D}}_{\alpha\beta})^2, \qquad (31,21)$$

поскольку, согласно (16,16), сумма диагональных элементов $\mathscr{D}_{\alpha\alpha}$ всегда равна нулю. При периодическом изменении квадрупольного момента квадрупольное излучение оказывается пропорциональным ω^6. Множитель $\frac{1}{c^5}$ в (31,21) делает его интенсивность весьма малой. Тем не менее существуют системы, для которых квадрупольное излучение играет основную роль. Это, прежде всего, атомные ядра, не обладающие дипольным излучением (дипольные моменты ядер, как и всяких других заряженных систем, можно считать равными нулю (см. § 15)).

Другим примером может служить система, состоящая из частиц с одинаковыми значениями $\frac{e}{m}$.

§ 32. Общий случай излучения — спектральное разложение, волновая и квазистатическая зона, учет собственного запаздывания*

Рассмотрим теперь несколько более общий случай излучения системой движущихся зарядов.

Не ограничивая общности, можно считать, что плотность тока в системе и плотность заряда допускают разложение в интеграл Фурье:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ t)=\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{32,1}$$

$$\rho(\boldsymbol{r}',\ t)=\int \rho(\boldsymbol{r}',\ \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{32,2}$$

В этих разложениях мы пользуемся нормировкой (II,1) и считаем формально частоту как положительной, так и отрицательной. В действительности частота ω — величина существенно положительная, так что это представление следует дополнить условием: $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\omega)=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',-\omega)$. При этом величина $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)$ будет иметь вещественное значение. Тогда, разлагая в интеграл Фурье потенциалы поля

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)=\int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{32,3}$$

и подставляя разложение (32,1)—(32,3) в уравнение (23,23) для вектора-потенциала, находим

$$\int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega=\frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ \omega)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, e^{i\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}\, d\omega\, dV,$$

откуда для компоненты Фурье вектора-потенциала получаем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ \omega)=\frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ \omega)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, e^{-i\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, dV'. \tag{32,4}$$

Аналогично

$$\varphi(\boldsymbol{r},\ \omega)=\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}',\ \omega)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, e^{-i\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, dV'. \tag{32,5}$$

Если плотность тока и плотность заряда заданы как функции координат, то по формулам (32,4) и (32,5) можно найти компоненты Фурье для потенциалов поля точно, не пренебрегая собственным запаздыванием в системе.

После этого выражения для самих потенциалов найдутся непосредственно по формуле обращения интеграла Фурье (II,2).

Таким образом, можно в принципе найти поле излучающей системы, не пренебрегая собственным запаздыванием, а также

на любых расстояниях от излучающей системы. Ниже мы приведем простой пример такого расчета.

Если нас интересует поле на больших расстояниях от излучающей системы, то, полагая

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \simeq r-\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}{r},$$

причем $|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{r}'|$, и вводя величину, именуемую волновым вектором,

$$\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{\omega}{c}\boldsymbol{n}=k\boldsymbol{n}, \tag{32,6}$$

где k — волновое число,

$$k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}, \tag{32,7}$$

и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, имеем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}', \omega)=\frac{e^{-ikr}}{cr}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', \omega)\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\, dV', \tag{32,8}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}', \omega)=\frac{e^{-ikr}}{r}\int \rho(\boldsymbol{r}', \omega)\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\, dV'. \tag{32,9}$$

Часто формулы спектрального разложения применяются к определению поля одиночного заряда. В этом случае можно получить полезное представление $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}', \omega)$, заменив компоненту Фурье для плотности тока на саму плотность тока по формуле

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, \omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

и полагая

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)=e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{R}_0(t)),$$

где $\boldsymbol{R}_0(t)$ — мгновенное положение заряда в момент времени t, $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{R}_0}{dt}$. Это дает

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}', \omega)=\frac{e^{ikr}}{2\pi cr}\int_{-\infty}^{\infty} e\boldsymbol{v}(t)\, e^{i[\omega t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}_0(t)]}\, dt. \tag{32.10}$$

Последняя формула позволяет найти компоненту Фурье вектор-потенциала по заданной траектории частицы — зависимости $\boldsymbol{R}_0$ от времени. Величина r представляет абсолютное значение расстояния от заряда до точки наблюдений в момент времени t. Если фурье-компонента вектора-потенциала на большом рас-

стоянии от системы зарядов известна, то фурье-компоненты поля найдутся по формулам (27,1) и (27,3). Именно, имеем

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ t)=\int \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega=\operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{c}\,[\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{n}]=$$

$$=\frac{1}{c}\int i\omega\,[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ \omega),\ \boldsymbol{n}]\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

откуда

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ \omega)=i\,[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ \omega),\ \boldsymbol{k}]. \tag{32,11}$$

Аналогично

$$\boldsymbol{E}=\frac{i}{k}\,[\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ \omega),\ \boldsymbol{k}]. \tag{32,12}$$

В общем случае излучающая система излучает всевозможные частоты или, как говорят, спектр частот $-\infty<\omega<\infty$.

Часто представляет интерес найти вес различных частот в спектре, т. е. относительную долю энергии, приходящуюся на данную частоту (или, точнее, на частоту, лежащую в интервале ω, $\omega+d\omega$). Представим полную излучаемую в телесный угол $d\Omega$ за время dt энергию в виде

$$-\Delta E=\int I\, dt=\frac{c}{4\pi}\int H^2 r^2\, d\Omega\, dt=d\Omega\int I_\omega\, d\omega\, dt, \tag{32,13}$$

где $I_\omega d\omega d\Omega$ — интенсивность, излучаемая в телесном угле $d\Omega$ и в интервале частот $d\omega$.

Разлагая $\boldsymbol{H}$ в интеграл Фурье и пользуясь равенством Персеваля (II,9), имеем

$$\int (\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ t))^2\, dt=4\pi\int (\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ \omega))^2\, d\omega.$$

Тогда для интересующей нас интенсивности (энергия в единицу $d\omega$ времени) излучения в телесном угле $d\Omega$ в интервале частот получаем выражение

$$J_\omega\, d\Omega\, d\omega=c\,|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\ \omega)|^2 r^2\, d\Omega\, d\omega=$$

$$=\frac{1}{c}\left|\left[\boldsymbol{k},\ \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ \omega)\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}'}\, dV'\right]\right|^2 d\Omega\, d\omega. \tag{32,14}$$

Фактическое спектральное распределение излучаемой энергии определяется, естественно, законом движения зарядов $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},\ t)$.

Предыдущие формулы существенно упрощаются, если плотности тока и заряда в системе изменяются по простому гармоническому закону

$$\begin{gathered}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',\ t)=\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\, e^{i\omega_0 t},\\ \rho(\boldsymbol{r}',\ t)=\rho_0(\boldsymbol{r}')\, e^{i\omega_0 t}.\end{gathered} \tag{32,15}$$

В этом случае система, естественно, излучает только одну частоту ω_0. Вектор-потенциал дается при этом общей формулой

$$A(r, t) = \frac{e^{i\omega t}}{c} \int \frac{j_0(r') e^{-i\frac{\omega_0}{c}|r-r'|}}{|r-r'|} dV' = A_0(r) e^{i\omega t}, \qquad (32,16)$$

где амплитуда потенциала $A_0(r)$ равна, очевидно,

$$A_0(r) = \frac{1}{c} \int \frac{j_0(r') e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} dV'. \qquad (32,17)$$

Вдали от излучаемой системы

$$A(r, t) \simeq \frac{e^{-i(kr-\omega t)}}{cr} \int j_0(r') e^{ikr'} dV'. \qquad (32,18)$$

Величина (kr') определяет, очевидно, запаздывание внутри системы (собственное запаздывание).

Рассмотрим теперь случай, когда собственным запаздыванием можно пренебречь. Для этого необходимо выполнение неравенства

$$kr' \ll 1$$

или

$$L' \ll \lambda. \qquad (32,19)$$

Мы видим, что условием пренебрежения собственным запаздыванием является малость геометрических размеров излучающей системы по сравнению с длиной волны излучения.

Предполагая выполненным условие (32,19), имеем в силу (26,11)

$$A(r, t) = \frac{e^{-i(kr-\omega t)}}{cr} \int j_0(r') dV' = \frac{\dot{d}(\tau_0)}{cr}, \qquad (32,20)$$

что совпадает с (26,13).

Найдем еще скалярный потенциал, не считая, однако, что расстояние до точки наблюдения велико по сравнению с длиной волны. Чтобы не повторять выкладок § 26, напишем выражение для скалярного потенциала, воспользовавшись условием Лоренца:

$$\varphi = -c \int \operatorname{div} A\, dt = -c \operatorname{div} \frac{\dot{d}(\tau_0)}{cr} =$$

$$= -e^{i\omega t} \operatorname{div} \frac{d_0 e^{-ikr}}{r} = \frac{nd(\tau_0)}{r}\left(ik + \frac{1}{r}\right). \qquad (32,21)$$

Мы видим, что могут реализоваться два предельных случая:

$$kr \sim \frac{r}{\lambda} \gg 1,$$

$$kr \sim \frac{r}{\lambda} \ll 1.$$

В первом случае, когда расстояние до излучателя велико по сравнению с его размерами, мы получаем

$$\varphi(\boldsymbol{r},\ t) = ik\frac{nd(\tau_0)}{r}, \qquad (32,22)$$

что совпадает с (26,12). Таким образом, в области

$$r \gg \lambda \gg L'$$

справедливы все формулы § 26. Это — область далеких расстояний, или волновая зона.

В области расстояний

$$r \ll \lambda \gg L'$$

можно написать

$$\varphi(\boldsymbol{r},\ t) \simeq \frac{nd(\tau_0)}{r^2} = \frac{nd_0 e^{i\omega\tau_0}}{r^2}. \qquad (32,23)$$

В этой области, именуемой ближней, или квазистатической, зоной, скалярный потенциал φ совпадает с потенциалом электростатического поля диполя, величина которого изменяется по гармоническому закону. Векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ в этой зоне мал по сравнению со скалярным в отношении $\frac{r}{\lambda}$. Это означает, что в квазистатической зоне поле имеет в основном характер электрического поля. Напряженность электрического поля изменяется во всей квазистатической зоне в одной фазе с изменением дипольного момента системы зарядов, и поле не имеет волнового характера.

Магнитное поле меньше электрического в отношении

$$\frac{|\boldsymbol{H}|}{|\boldsymbol{E}|} \sim \frac{r}{\lambda}$$

в отличие от волновой зоны, где выполнено соотношение (27,3). Мы видим, что при излучении длинных волн ($\lambda \gg L'$) поле излучающей системы имеет квазистатический характер в области $r \ll \lambda$ и волновой при $r \gg \lambda$. Угловое распределение электрического поля в обеих областях различно. В квазистатической зоне средний по времени поток энергии, характеризуемый вектором Пойнтинга, равен нулю. Таким образом, квазистатическая зона не дает вклада в излучение.

Выпишем еще выражения для полей в монохроматических волнах вдали от излучающей системы

$$\boldsymbol{H} = \frac{k^2}{r}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}_0]\, e^{i(\omega t - kr)}, \tag{32,24}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{k^2}{r}[[\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}_0]\,\boldsymbol{n}]\, e^{i(\omega t - kr)} \tag{32,35}$$

и вблизи к ней

$$\boldsymbol{E} = \frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{d}_0}{r^3} e^{i\omega t}, \qquad \boldsymbol{H} \simeq 0. \tag{32,26}$$

В волновой зоне вектор Пойнтинга определен формулой (27,6). Поэтому средняя по времени излучаемая интенсивность равна

$$\overline{I} = \frac{\omega^4 d_0^2}{3c^3} = \frac{c d_0^2}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4. \tag{32,27}$$

Она оказывается обратно пропорциональной четвертой степени длины волны и прямо пропорциональной квадрату амплитуды дипольного момента d_0.

Наконец, разберем пример вычисления поля излучателя с учетом запаздывания в системе. Рассмотрим систему, в которой плотность тока выражается формулой

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = j_0 \boldsymbol{k}_1 \sin\left(\frac{kL}{2} - \frac{k|x|}{2}\right)\delta(y)\,\delta(z)\, e^{i\omega t}. \tag{32,28}$$

Здесь $\boldsymbol{k}_1$ — единичный вектор вдоль оси z.

Формула (32,28) имеет простой смысл: в бесконечно тонкой линии длиной L, ориентированной вдоль оси z, возбужден ток, имеющий характер стоячей волны. На концах линии при $z = \pm\frac{L}{2}$ плотность тока обращается в нуль. Такая система называется линейным излучателем и часто применяется для излучения радиоволн.

Подставляя (32,28) в (32,18), получаем для вектора $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = j_0 \frac{\boldsymbol{k}_1}{cr} \int\limits_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{kL}{2} - \frac{k|x|}{2}\right) e^{-ikx\cos\theta} e^{i(\omega t - kr)},$$

где $\theta = \widehat{\boldsymbol{n}\boldsymbol{k}_1}$.

Выполняя интегрирование, получаем

$$\boldsymbol{A} = \left\{\boldsymbol{k}_1 j_0 \frac{kL^2}{4} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{cr}\right\} F(\theta, k), \tag{32.29}$$

где множитель $F(\theta,\ k)$ равен

$$F(\theta,\ k)=\frac{8}{k^2L^2}\,\frac{\cos\left(\frac{kL}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kL}{2}}{\sin^2\theta}. \qquad (32{,}30)$$

Множитель в фигурных скобках отвечает излучению волн, длина которых $\lambda\gg\frac{L}{2}$ (бесконечно длинных волн) и для которых

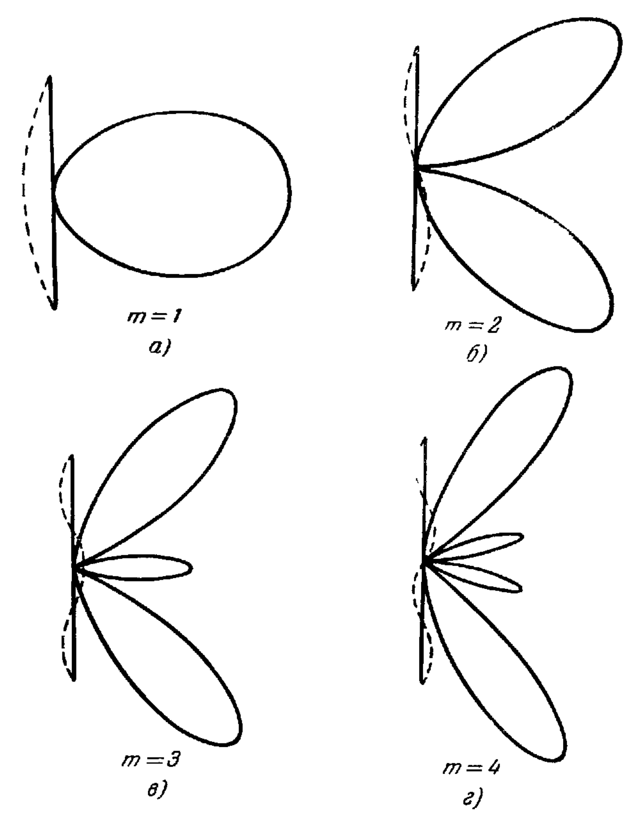


Рис. 8.

можно пренебречь собственным запаздыванием. Он получается непосредственно из (32,20) после подстановки формулы (32,26), в которой положено $\frac{kL}{2}\to 0$.

Множитель $F(\theta,\ k)$ характеризует собственное запаздывание в системе. При $\frac{kL}{2}\to 0$ он стремится к единице. При конечном

значении kL он отвечает существенному изменению углового распределения излучения.

При $kL=\pi$ (т. е. $\lambda=\frac{L}{2}$) угловое распределение излучения сравнительно мало отличается от такового у простого диполя (рис. 8, *а*). При $kL=m\pi$, где m — целое число волн, укладывающихся на длине линейного излучателя, возникают распределения, приведенные на рис. 8, *б*, *в*, *г*.

С увеличением m числа лепестков в угловой диаграмме излучение увеличивается и они постепенно приближаются к оси излучателя. В пределе, при $m\to\infty$, излучение оказывается направленным вдоль оси излучателя.

ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 33. Распространение электромагнитных волн вдали от излучателя

В предыдущих параграфах было изучено явление излучения электромагнитных волн. Теперь мы можем разобрать механизм распространения электромагнитных волн в пространстве, свободном от зарядов (в вакууме).

Для получения более наглядных формул мы ограничимся случаем монохроматической волны. Мы видели в предыдущей главе, что излучающие системы излучают электромагнитные волны, у которых поверхностями равной фазы являются сферы радиуса r.

Перейдем теперь в формулах (32,24) и (32,25) к пределу, считая расстояние до системы зарядов настолько большим, чтобы можно было пренебречь различием в направлении векторов $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{r}_0$ — единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения и $\boldsymbol{n}$ — по-прежнему единичный вектор, направленный от излучателя к точке наблюдения.

Тогда мы можем написать

$$r = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_0 \simeq \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}$$

и сделать эту замену в фазовом множителе, после чего формулы (32,24) и (32,25) приобретают вид

$$\boldsymbol{H} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{r}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}_0]\, e^{i\omega\left(t - \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{c}\right)}, \tag{33,1}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{r}[[\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}_0]\boldsymbol{n}]\, e^{i\omega\left(t - \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{c}\right)}. \tag{33,2}$$

В формулах (33,1) и (33,2) расстояние от точки наблюдения до начала координат входит в виде множителя $1/r$ в амплитуде. Ясно, однако, что на бесконечно большом расстоянии от начала

координат изменение функции $1/r$ можно считать происходящим весьма медленно и положить $\frac{1}{r} \approx \text{const}$. Изменение полей с расстоянием определяется при этом исключительно фазовым множителем. Тогда (33,1) и (33,2) можно представить в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{rn}{c}\right)}, \tag{33,3}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{rn}{c}\right)}, \tag{33,4}$$

где $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ — постоянные в пространстве и во времени величины.

Введем вектор $\boldsymbol{k} = \frac{\omega \boldsymbol{n}}{c}$, именуемый волновым вектором. По абсолютной величине $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны, и ориентирован по направлению распространения электромагнитной волны. Тогда

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \tag{33,5}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}. \tag{33,6}$$

В формулах (33,5) и (33,6) подразумевается, что в окончательных выражениях следует брать вещественную часть. Согласно (27,3) амплитуды $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ направлены перпендикулярно друг к другу и к вектору $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{E}_0 = [\boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{n}]. \tag{33,7}$$

Векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ представляют плоские монохроматические волны: плоскости $\boldsymbol{kr} = \text{const}$ являются поверхностями равной фазы (равных значений напряженностей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$).

Мы приходим, таким образом, к естественному результату. На достаточно больших расстояниях от излучателя сферические волны превращаются в плоские. Это наглядно можно представить следующим образом: если излучающая система находится достаточно далеко, радиус кривизны сферической поверхности равной фазы электромагнитной волны весьма велик по сравнению с размерами той области пространства, в которой рассматривается поле. Поэтому в пределах этой области сферу с достаточной степенью точности можно считать плоской поверхностью.

Если выбрать направление распространения за ось x, то формулы (33,5) и (33,6) можно представить в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \tag{33,8}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - kx)}. \tag{33,9}$$

Формулы (33,7)—(33,9) описывают плоские волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x со скоростью

$$v = \frac{\omega}{k} = c. \qquad (33,10)$$

Действительно, в момент времени $(t+1)$ фазовый множитель имеет в точке $(x+c)$ то же значение, что он имел в момент t в точке x. Таким образом, v представляет скорость распространения поверхности равной фазы и по этой причине называется фазовой скоростью.

Распространение плоских волн, в отличие от сферических волн, не сопровождается уменьшением их амплитуды.

Вычислим вектор Пойнтинга в плоской волне:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}] = \frac{c}{4\pi}[[\boldsymbol{Hn}]\boldsymbol{H}] = \boldsymbol{n}\frac{cH^2}{4\pi} = \boldsymbol{n}c\frac{E^2+H^2}{8\pi} = \boldsymbol{n}cu_0. \qquad (33,11)$$

В плоской волне он оказывается постоянным и равным потоку энергии, движущемуся со скоростью света. Импульс плоской электромагнитной волны равен

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{c^2} = \boldsymbol{n}\frac{u_0}{c}. \qquad (33,12)$$

Найденные нами выражения для поля в плоской волне могут быть получены также и непосредственно из решения уравнений поля в области пространства, свободной от зарядов.

Поскольку плотность заряда и плотность тока в изучаемой части пространства равны нулю, уравнения для потенциалов электромагнитного поля приобретают следующий вид:

$$\Delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Для простоты рассмотрим сначала случай, когда потенциалы поля зависят только от одной координаты x, так что уравнения для потенциалов имеют вид

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(x, t)}{\partial t^2} = 0, \qquad (33,13)$$

$$\frac{\partial^2\varphi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \qquad (33,14)$$

$$\frac{\partial A_x(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \qquad (33,15)$$

Будем, кроме того, считать, что поле зависит от времени по простому гармоническому закону. Тогда решения уравнений (33,13)—(33,15) будем искать в виде

$$\boldsymbol{A}(x, t) = \boldsymbol{A}_0(x) e^{i\omega t}, \tag{33,16}$$

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x) e^{i\omega t}. \tag{33,17}$$

Для $\boldsymbol{A}_0$ и φ_0 подстановка (33,16) и (33,17) в (33,13) и (33,14) дает

$$\frac{d^2\boldsymbol{A}_0(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{A}_0 = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi_0(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{l}e^{-ikx} + \boldsymbol{l}'e^{+ikx},$$

$$\varphi_0 = \alpha e^{-ikx} + \alpha' e^{+ikx},$$

где обозначено $k = \frac{\omega}{c}$ и $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l}'$, α, α' — постоянные величины. Для потенциалов находим при этом

$$\boldsymbol{A}(x, t) = \boldsymbol{l}e^{i(\omega t - kx)} + \boldsymbol{l}'e^{i(\omega t + kx)}, \tag{33,18}$$

$$\varphi = \alpha e^{i(\omega t - kx)} + \alpha' e^{i(\omega t + kx)}. \tag{33,19}$$

Первое слагаемое в (33,18) и (33,19) представляет плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x, второе слагаемое — такую же волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x. Какая именно из этих волн фактически возбуждена, зависит от расположения излучающей системы. Не ограничивая общности, можно рассмотреть одну из этих волн, например первую.

Амплитуды $\boldsymbol{l}$ и α не являются произвольными, но связаны между собой условием Лоренца (33,15), которое после подстановки (33,18) и (33,19) дает

$$\alpha = l_x.$$

Тогда потенциалы поля окончательно запишутся в виде

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{l}e^{i(\omega t - kx)} = \boldsymbol{l}e^{i\psi}, \tag{33,20}$$

$$\varphi = l_x e^{i(\omega t - kx)} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{l}\boldsymbol{i}) e^{i\psi}, \tag{33,21}$$

где $\boldsymbol{i}$ — единичный вектор вдоль оси x и $\psi = \omega t - kx$.

Напряженности полей в плоской волне имеют вид

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\operatorname{grad}\psi =$$

$$= -\frac{\omega}{c}\dot{\boldsymbol{A}} - \dot{\varphi}\operatorname{grad}\psi = -k\dot{\boldsymbol{A}} + k\dot{\varphi}\boldsymbol{i} = k\{\boldsymbol{i}(\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{i}) - \dot{\boldsymbol{A}}\} =$$

$$= k[[\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{i}]\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{E}_0 e^{i\psi} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \tag{33,22}$$

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = [\operatorname{grad}\psi, \dot{\boldsymbol{A}}] = k[\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \tag{33,23}$$

где точкой обозначено дифференцирование по аргументу ψ, а $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ — амплитуды напряженности полей по модулю, равные, очевидно, $|\boldsymbol{E}_0| = |\boldsymbol{H}_0| = k|\boldsymbol{l}|$. Векторы $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}$ перпендикулярны друг к другу.

Распишем выражения для полей в компонентах:

$$\left.\begin{aligned} &E_x = 0, && H_x = 0,\\ &E_y = -k\dot{A}_y = H_z, && H_y = k\dot{A}_z = -E_z,\\ &E_z = -k\dot{A}_z = -H_y; && H_z = -k\dot{A}_y = E_y. \end{aligned}\right\} \tag{33,24}$$

В этих формулах, как и выше, подразумевается вещественная часть написанных комплексных выражений для потенциалов и полей.

В общем случае, когда направление распространения волн не совпадает с осью x, единичный вектор $\boldsymbol{i}$ следует заменить на единичный вектор в направлении распространения $\boldsymbol{n}$, и соотношения (33,22) и (33,23) совпадают с (33,5) и (33,6). Величина амплитуды волн $|\boldsymbol{E}_0| = |\boldsymbol{H}_0|$ остается совершенно произвольной. Она связана с амплитудой волн, излучаемых излучателем.

Полезно сравнить полученные нами выражения с аналогичными формулами, полученными при другой калибровке потенциалов, которой часто пользуются в литературе[1]).

Как мы видели в § 11, потенциалы поля допускают преобразование калибровки (11,1) и (11,2). Произведем переход от φ к новому значению φ',

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t},$$

и выберем функцию $\psi = c\int \varphi\, dt$. Тогда $\varphi' = 0$, т. е. в рассматриваемом представлении поле описывается только вектором-потенциалом $\boldsymbol{A}'(x, t) = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\psi$. Такой выбор ψ возможен не всегда, а лишь в вакууме, когда $\rho = 0$ и уравнение для φ допускает нулевое решение.

---

[1]) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, 1960, стр. 123.

Условие Лоренца запишется в виде

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=0, \quad \text{т. е.} \quad A_x=0.$$

Решение $A_x=\text{const}\neq 0$ не отличается от $A_x=0$, поскольку оно приводит к тем же значениям напряженностей поля. Нетрудно видеть, что для компонент поля при такой калибровке мы снова получаем значения (33,24).

Если волновой процесс не имеет простого периодического характера, т. е. не описывается монохроматической волной, можно без труда получить решение уравнения для потенциалов φ и $\boldsymbol{A}$ в общем виде. Решение проводится аналогично тому, как это было сделано в § 23.

Вводя новые переменные,

$$\xi=x-ct, \quad \eta=x+ct,$$

сводим уравнения для потенциалов к виду

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial\xi\,\partial\eta}=0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}=0.$$

Решением уравнения для вектора-потенциала служит

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(ct-x)+\boldsymbol{A}'(ct+x),$$

где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}'$ — произвольные функции аргументов $ct-x$ и $ct+x$ соответственно. Первое из них представляет общее выражение для плоской волны, распространяющейся со скоростью c в положительном направлении оси x. Второе — волна, распространяющаяся в отрицательном направлении оси x. Аналогичное выражение получается и для скалярного потенциала.

Условие Лоренца приводит к равенству

$$\varphi=A_x=\boldsymbol{A}\boldsymbol{i},$$

имеющему место при произвольном виде функций $\boldsymbol{A}$ и φ.

Наконец, следует заметить, что в вакууме можно получить волновые уравнения непосредственно для векторов поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Для этого следует взять ротор от уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H}-\Delta\boldsymbol{H}=-\Delta\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},$$

так что

$$\Delta\boldsymbol{H}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0.$$

Аналогичным образом можно получить волновое уравнение для $\boldsymbol{E}$.

§ 34. Поляризация плоской волны

Рассмотрим несколько детальнее, как происходит изменение векторов напряженности полей в плоской монохроматической волне. Для этого перейдем от комплексной формы записи к вещественным выражениям.

В формуле (33,22) напишем комплексную амплитуду $\boldsymbol{E}_0$ в виде

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{g}_1 + i\boldsymbol{g}_2,$$

где $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_2$ — вещественные векторы. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} = \operatorname{Re}\{(\boldsymbol{g}_1 + i\boldsymbol{g}_2)[\cos(\omega t - \boldsymbol{kr}) + i\sin(\omega t - \boldsymbol{kr})]\} = \\ = \operatorname{Re}\{[\boldsymbol{g}_1\cos(\omega t - \boldsymbol{kr}) - \boldsymbol{g}_2\sin(\omega t - \boldsymbol{kr})] + \\ + i[\boldsymbol{g}_1\sin(\omega t - \boldsymbol{kr}) + \boldsymbol{g}_2\cos(\omega t - \boldsymbol{kr})]\} = \\ = \boldsymbol{g}_1\cos(\omega t - \boldsymbol{kr}) - \boldsymbol{g}_2\sin(\omega t - \boldsymbol{kr}). \quad (34.1)\end{aligned}$$

Перейдем теперь от векторов $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_2$, ориентированных под произвольным углом друг к другу, к взаимно перпендикулярным векторам $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$. Пусть

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{g}_1\cos\alpha + \boldsymbol{g}_2\sin\alpha, \quad (34,2)$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{g}_1\sin\alpha - \boldsymbol{g}_2\cos\alpha, \quad (34.3)$$

где α — некоторый угол, который нам следует найти. Перемножая выражения (34,2) и (34,3) скалярно, находим

$$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2 = 0 = (g_1^2 - g_2^2)\sin\alpha\cos\alpha - \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2}{g_1^2 - g_2^2}.$$

Написав

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{E}_1\cos\alpha + \boldsymbol{E}_2\sin\alpha, \quad \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{E}_1\sin\alpha - \boldsymbol{E}_2\cos\alpha$$

и подставляя в (34,1), находим

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1\cos(\omega t - \boldsymbol{kr} + \alpha) + \boldsymbol{E}_2\sin(\omega t - \boldsymbol{kr} + \alpha).$$

Пусть направление распространения волн выбрано за ось x. Если ориентировать ось y по вектору $\boldsymbol{E}_1$, то вектор $\boldsymbol{E}_2$ будет направлен по оси z (в положительную или отрицательную сторону). Тогда

$$E_y = E_1\cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (34,4)$$

$$E_z = E_2\sin(\omega t - kx + \alpha). \quad (34,5)$$

Величины E_1 и E_2 называются амплитудами, а величина $\psi = (\omega t - kx + \alpha)$ — фазой волны.

Из формул (34,4) и (34,5) легко исключить фазу, написав

$$\frac{E_y}{E_1^2}+\frac{E_z}{E_2^2}=1. \qquad (34.6)$$

Выражение (34,6) связывает между собой значения компонент вектора $\boldsymbol{E}$ в плоской волне. Очевидно, что в данной плоскости $x=\text{const}$ вектор $\boldsymbol{E}$ вращается в плоскости (yz) так, что его конец описывает эллипс.

Формула (34,6) представляет уравнение этого эллипса. Если, в частности, амплитуды $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ равны по абсолютной величине, вектор $\boldsymbol{E}$ вращается по кругу.

Поскольку распространение электромагнитной волны происходит в направлении $\boldsymbol{n}$, можно наглядно представить себе изменение вектора $\boldsymbol{E}$ в пространстве и во времени, как движение конца вектора $\boldsymbol{E}$ по эллиптической (или круговой) спирали, навитой на линию $\boldsymbol{n}$. Шаг спирали равен длине волны $\lambda=\frac{2\pi}{k}$.

В силу формулы (33,24) для компонент напряженности магнитного поля можно написать выражения

$$H_y=-E_2\sin(\omega t-kx+\alpha), \qquad (34,7)$$

$$H_z=E_1\cos(\omega t-kx+\alpha). \qquad (34,8)$$

Волны, в которых векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ вращаются по эллипсу, называются эллиптически поляризованными, при вращении их по окружности — поляризованными по кругу.

Направление вращения вектора $\boldsymbol{E}$ определяется фазой. Если вращение происходит по часовой стрелке для наблюдения смотрящего по направлению распространения волны, то такая волна называется имеющей положительную спиральность ($\alpha=-\pi/2$).

Если один из векторов $\boldsymbol{E}_1$ или $\boldsymbol{E}_2$ равен нулю, изменение $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ происходит в взаимно перпендикулярных плоскостях. Такие волны называются поляризованными в плоскости. По историческим традициям, плоскостью поляризации называют плоскость, в которой колеблется вектор $\boldsymbol{H}$. Таким образом, например, волна, поляризованная в плоскости z, имеет отличную от нуля компоненту H_z, колеблющуюся в плоскости (xz) и равную ей по величине компоненту E_y, колеблющуюся в плоскости (xy).

§ 35. Интерференция и образование волновых пакетов

Рассмотренная выше монохроматическая плоская волна являлась лишь идеализацией реальных электромагнитных волн: с одной стороны, монохроматическая плоская волна, являющаяся процессом строго периодическим в пространстве и во вре-

мени, должна, очевидно, иметь бесконечно большую протяженность в пространстве и бесконечно большую длительность во времени; с другой стороны, не существует строго монохроматических излучателей. Как мы видели в § 30, эффект затухания проявляется в излучении частот, отличных от собственной частоты ω_0 (хотя и близких к ней). Поэтому для описания реальных волновых процессов необходимо рассмотреть результат наложения или интерференции различных плоских монохроматических волн.

Рассмотрим наложение бесконечного множества плоских монохроматических волн, частоты которых непрерывно изменяются в узком интервале $\omega_0-\Delta\omega \leqslant \omega \leqslant \omega_0+\Delta\omega$, где ω_0, именуемая несущей частотой, удовлетворяет условию $\omega_0 \gg \Delta\omega$.

Амплитуду всех волн будем считать постоянной. Для напряженности электрического (или магнитного) поля можем написать

$$\boldsymbol{E}=\int\limits_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t-kx)}\,d\omega=\boldsymbol{E}_0\int\limits_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} e^{i(\omega t-kx)}\,d\omega.$$

Для общности результатов, которые будут нужны нам в дальнейшем, мы будем считать, что волновое число k является некоторой функцией частоты ω, не обязательно сводящейся к соотношению $k=\frac{\omega}{c}$, справедливому для электромагнитных волн в вакууме. Полагая

$$\omega=\omega_0+(\omega-\omega_0),\quad k\approx k_0+\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)\equiv k_0+\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0(\omega-\omega_0),$$

находим

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\int\limits_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} e^{i(\omega_0 t-k_0x)}e^{i(\omega-\omega_0)\left[t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]}\,d\omega=$$

$$=\boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega_0 t-k_0x)}\int\limits_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{iu\left[t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]}\,du=$$

$$=2\boldsymbol{E}_0\frac{\sin\Delta\omega\left[t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]}{t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x}\,e^{i(\omega_0 t-k_0x)},\qquad(35{,}1)$$

где введенная переменная интегрирования $u=\omega-\omega_0$. Мы приходим в принципе к следующему результату: наложение спектра волн с частотами, лежащими в узком интервале $2\Delta\omega$ вокруг несущей частоты ω_0, приводит к появлению волны с частотой ω_0

и волновым числом k_0, но с модулированной амплитудой

$$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}_0 \frac{\sin \Delta\omega (x - v_g t)}{x - v_g t}, \tag{35,2}$$

$$v_g = \left(\frac{d\omega_0}{dk}\right). \tag{35,3}$$

Модулированная амплитуда имеет весьма резкий главный максимум (рис. 9, где дана зависимость A от $\frac{\Delta\omega}{2}(t - v_g x)$) в точке

$$x_m = v_g t,$$

где она равна

$$\boldsymbol{A}_{\text{макс}} = 2\Delta\omega \boldsymbol{E}_0.$$

По обе стороны от точки максимума величина модулированной амплитуды уменьшается и в точках, где

$$\Delta\omega (x - v_g t) = \pm\pi,$$

модулированная амплитуда обращается в нуль. Помимо главного максимума, у модулированной амплитуды имеется целый ряд побочных максимумов, в которых, однако, амплитуда весьма мала по сравнению с амплитудой в главном максимуме и высота которых быстро убывает с увеличением аргумента (см. рис. 9). Практически можно считать, что электромагнитное поле возбуждено только вблизи главного максимума, а в остальном пространстве наложение волн приводит к их полному взаимному погашению.

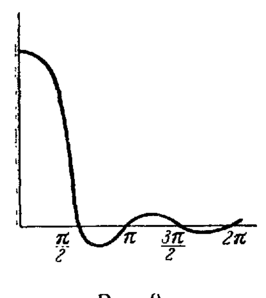


Рис. 9.

Возникающее образование в виде группы волн называется волновым пакетом. Волновой пакет движется в пространстве со скоростью v_g, сохраняя ограниченную протяженность в пространстве.

Поэтому величина v_g называется групповой скоростью движения пакета в отличие от фазовой скорости

$$v = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \lambda,$$

с которой перемещается в пространстве поверхность равной фазы. Очевидно, что энергия волнового пакета движется вместе с его амплитудой, т. е. со скоростью v.

Размеры волнового пакета ограничены интервалом переменных

$$\Delta\omega \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right] \approx 2\pi. \tag{35,4}$$

Для более наглядного выяснения смысла равенства (35,4) найдем пространственные размеры пакета. В фиксированный момент времени t поле отлично от нуля между точками x_1 и x_2, отстоящими друг от друга на расстоянии

$$x_1 - x_2 = \Delta x = \frac{2\pi}{\Delta\omega\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0} = \frac{2\pi}{\Delta k}; \qquad (35,5)$$

вне этой области поле имеет значение, близкое к нулю.

Если теперь фиксировать некоторую область $x=\text{const}$, то *длительность временно́го промежутка, в течение которого поле волнового пакета отлично от нуля*, равна

$$\Delta t \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \qquad (35,6)$$

По прошествии времени Δt поле в данном месте обратится в *нуль*.

Таким образом, волновой пакет обладает ограниченной пространственной и временно́й протяженностями, удовлетворяющими условиями:

$$\Delta t\,\Delta\omega \sim 2\pi; \quad \Delta x\,\Delta k \sim 2\pi. \qquad (35,7)$$

Теперь можно видоизменить постановку вопроса. Предположим, что мы *хотим получить волновое поле, отличное от нуля*, в некоторой области пространства Δx. Для получения такого поля из монохроматических волн необходимо образовать волновой пакет.

Если размеры пакета заданы нашим условием, то согласно (35,7) следует произвести суперпозицию монохроматических волн с волновыми числами, лежащими в интервале Δk. Чем у́же волновой пакет, т. е. чем меньше его пространственные размеры, тем больше Δk, т. е. тем больше интервал длин волн, которые должны участвовать в образовании пакета.

Совершенно аналогично можно образовать волновой пакет, существующий в некотором месте ограниченное время. Чем меньше требующаяся временна́я длительность пакета Δt, тем больше интервал частот $\Delta\omega$ тех монохроматических волн, которые должны его образовывать.

Соотношения, найденные для волн, распространяющихся в одном измерении (по оси x), могут быть без труда обобщены на случай волн, распространяющихся в произвольном направлении в пространстве. Тогда получаются соотношения

$$\Delta x\,\Delta k_x \sim 2\pi; \quad \Delta y\,\Delta k_y \sim 2\pi; \quad \Delta z\,\Delta k_z \sim 2\pi; \quad \Delta t\,\Delta\omega \sim 2\pi. \qquad (35,8)$$

Полученные результаты имеют большое принципиальное и практическое значение.

Совершенно однородная и бесконечно протяженная в пространстве и времени монохроматическая волна, как указывалось ранее, не может быть фактически реализована. Однако располагая излучателем с достаточно слабым затуханием, работающим достаточно длительное время, можно создать в пространстве волны, достаточно близкие по своим свойствам к монохроматическим. Ясно, что монохроматические волны, обладающие бесконечно большой протяженностью, не могут быть использованы для передачи каких-либо сигналов.

Под сигналами мы понимаем такие электромагнитные возмущения, которые в принципе можно регистрировать с помощью соответствующих устройств и которые могут служить для информации о некоторых физических событиях. Так, например, сигналом является самый факт излучения, начавшегося в некоторый момент времени. Обнаружение системы зарядов, рассеивающей электромагнитные волны, является другим примером сигнала.

Из сказанного ясно, что электромагнитные волны могут быть использованы для образования сигналов только в том случае, если из них сформированы волновые пакеты. Соотношения (35,8) используются для анализа требуемых свойств сигнала. Пусть, например, регистрирующее устройство требует для своей работы сигнала, длительность которого не меньше некоторой величины Δt. Тогда сигнал будет зарегистрирован только в том случае, если он представляет волновой пакет, сформированный из монохроматических волн с частотами, распределенными в интервале $\Delta\omega \geqslant \frac{2\pi}{\Delta t}$.

Мы не будем останавливаться на других примерах применения соотношений (35,8). Они будут играть важную роль в квантовой механике.

В заключение подчеркнем лишь, что полученное нами выражение для волнового пакета имеет приближенный характер. Оно справедливо, если:

1) амплитуды всех монохроматических волн, образующих пакет, имеют одно и то же значение;

2) в разложении $k(\omega)$ в ряд по $\Delta\omega$ можно ограничиться первым членом.

Первое ограничение не имеет принципиального значения, и не представляет особого труда нахождения волновых пакетов, образуемых волнами с различными амплитудами.

Второе требование для электромагнитных волн в вакууме выполняется автоматически: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega_0}{c} + \frac{\Delta\omega}{c} = k_0 + \frac{1}{c}\Delta\omega$.
Однако, как мы увидим в квантовой механике, в тех случаях, когда требование 2) не выполняется, учет следующих членов

разложении влечет за собой важные следствия: форма пакета, неизменная во времени и пространстве в первом приближении, при учете этих членов оказывается изменяющейся. Волновой пакет деформируется и постепенно расплывается.

§ 36. Рассеяние электромагнитных волн свободным и связанным зарядами

Рассеяние электромагнитных волн связанным зарядом может быть рассмотрено на примере линейного гармонического осциллятора. Пусть плоская монохроматическая волна, поляризованная в плоскости, падает на осциллятор. Уравнение движения осциллятора будет иметь такой вид:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 \boldsymbol{r} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\dddot{\boldsymbol{r}} + \frac{eE_0e^{i\omega t}}{m}.$$

Считая затухание слабым, можем написать $\dddot{\boldsymbol{r}} \approx -\omega_0^2\dot{\boldsymbol{r}}$, так что

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\boldsymbol{r} + \gamma\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0e^{i\omega t}, \tag{36,1}$$

где γ, как и в § 30, равна $\frac{2}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}$. Интересующим нас частным решением уравнения (36,1) служит

$$r = \frac{\frac{e}{m}E_0e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \tag{36,2}$$

Формула (36,2) дает закон движения осциллятора под действием внешней силы.

Для интенсивности излучения, рассеянного в телесном угле $d\Omega$, находим по формуле (27,8)

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3}[\ddot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{n}]^2 d\Omega = \frac{e^4\omega^4E_0^2}{4\pi m^2c^3}\frac{\sin^2\vartheta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\cos^2(\omega t - \delta)\,d\Omega. \tag{36,3}$$

Рассеянное излучение имеет ту же частоту, что и падающее, но сдвинуто по фазе на величину

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}.$$

В формуле (36,3) через ϑ обозначен угол между направлением наблюдения $\boldsymbol{n}$ и направлением вектора поляризации $\boldsymbol{E}_0$

(рис. 10). Введя падающую интенсивность $I_0 = \frac{cE_0^2}{4\pi}$ и усредняя за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, находим

$$\overline{dI} = \frac{1}{T}\int_0^T (dI)\,dt = r_0^2 I_0 \frac{\omega^4 \sin^2\vartheta\, d\Omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}. \tag{36,4}$$

Процесс рассеяния электромагнитных волн принято характеризовать дифференциальным эффективным сечением. По определению, дифференциальным эффективным сечением рассеяния в телесном угле $d\Omega$ называется отношение интенсивности, рассеянной в угол $d\Omega$, к интенсивности падающего излучения:

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{I_0}. \tag{36,5}$$

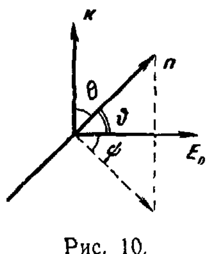


Рис. 10.

Из (37,4) находим для дифференциального эффективного сечения рассеяния

$$d\sigma = \frac{r_0^2\omega^4\sin^2\vartheta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\,d\Omega. \tag{36,6}$$

Как видно из формулы (36,5), дифференциальное сечение рассеяния имеет размерность *см*^{2} (что и объясняет термин «сечение»). Формула (36,5) дает искомое сечение рассеяния света, поляризованного в плоскости. Угол ϑ и полярные углы θ и ψ связаны между собой соотношением, которое легко установить из рис. 10. На этом рисунке полярная ось z направлена по волновому вектору $\boldsymbol{k}$ падающей волны, а ось x — вдоль ее вектора поляризации. Проектируя единичный вектор в направлении наблюдения $\boldsymbol{n}$ на ось x, находим

$$\cos\vartheta = \sin\theta\cos\psi$$

или

$$\sin^2\vartheta = 1 - \sin^2\theta\cos^2\psi. \tag{36,7}$$

На практике часто важно знать сечения рассеяния *неполяризованного* излучения. Для нахождения последнего необходимо усреднить эффективное сечение (36,5) по всем возможным поляризациям, т. е. по всем возможным ориентациям вектора $\boldsymbol{E}_0$ в плоскости (xy). Это означает, что необходимо усреднить выражение (36,7) по всем возможным значениям азимутального угла ψ, т. е. положить

$$\overline{\sin^2\vartheta} = 1 - \sin^2\theta\,\overline{\cos^2\psi} = 1 - \frac{\sin^2\theta}{2} = \frac{1+\cos^2\theta}{2}.$$

Тогда получим

$$d\sigma = \frac{r_0^2\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\,\frac{1+\cos^2\theta}{2}\,d\Omega. \tag{36,8}$$

Угловая зависимость в формуле (36,8) показывает, что в направлении падающего излучения ($\theta = 0$) и в противоположном направлении ($\theta=\pi$) происходит самое сильное рассеяние.

Интегрируя (36,8) по всему телесному углу, получаем полное сечение рассеяния неполяризационного излучения

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\,\frac{r_0^2\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}, \tag{36,9}$$

Полученное выражение носит название дисперсионной формулы классической электродинамики.

Зависимость полного эффективного сечения от частоты выражается кривой, сходной с приведенной на рис. 7 с резко выраженным максимумом при $\omega \simeq \omega_0$, т. е. при резонансной частоте падающего излучения, близкой к собственной частоте осциллятора. Полагая в формуле (36,9) $\omega \simeq \omega_0$, получаем вблизи резонанса

$$\sigma \simeq \frac{2}{3}\,\frac{r_0^2\omega_0^2}{(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \tag{36,10}$$

Величина γ характеризует ширину области резонанса. В частности, в точном резонансе $\omega=\omega_0$. Сечение в максимуме равно

$$\sigma_{\max} = \frac{8\pi}{3}\,r_0^2\,\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}. \tag{36,11}$$

Поскольку $\gamma \ll \omega_0$, эффективное сечение для резонансной частоты достигает очень больших значений. Это явление играет важную роль в оптике материальных сред. Оно называется резонансной флуоресценцией *).

Дисперсионная формула, полученная на примере рассеяния излучения гармоническим осциллятором, имеет в действительности весьма общий характер. Она по форме совпадает с соответствующей формулой для рассеяния света атомами, которая получается в квантовой механике (гл. V). В квантовой механике мы увидим, что область применимости дисперсионной формулы не ограничивается рассеянием света, но распространяется и на ряд других систем.

*) Сравнивая (36,10) с формулой (III, 4′), мы видим, что при $\gamma \to 0$ сечение ведет себя как δ-функция.

Рассмотрим два соотношения, получающихся из (36,9) в предельном случае малых и больших частот. При малых частотах $\omega \ll \omega_0$

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4}, \qquad (36,12)$$

т. е. сечение пропорционально четвертой степени частоты или обратно пропорционально четвертой степени длины волны падающего излучения.

Этот закон рассеяния имеет весьма общий характер. Он применим тогда, когда длина волны рассеиваемого света велика по сравнению с размерами рассеивающего объема. Этот случай часто называют релеевским рассеянием.

При высоких частотах $\omega \gg \omega_0$ формула (36,9) вновь упрощается:

$$\sigma \simeq \frac{8\pi r_0^2}{3} = \frac{8\pi e^4}{3m^2c^4}. \qquad (36,13)$$

Это выражение получило название формулы Томсона.

Сечение оказывается постоянным, не зависящим ни от частоты рассеиваемого излучения, ни от свойств осциллятора. Последнее обстоятельство имеет простой смысл: при высоких частотах сила, действующая на заряд со стороны поля, весьма велика по сравнению с квазиупругой силой. Электрон рассеивает как свободная частица. Согласно формуле Томсона, сечение σ является универсальной постоянной, определяемой классическим радиусом электрона. Ясно, что формула Томсона описывает рассеяние электронами любых систем, например, атомов, если можно пренебречь силами, связывающими электроны в атомах, и считать их свободными. Рассеянием излучения тяжелыми ядрами можно пренебречь, поскольку сечение обратно пропорционально квадрату массы рассеивателя. Универсальный характер формулы (36,13) делает ее одним из фундаментальных соотношений классической электродинамики. Она была подвергнута тщательной опытной проверке, результаты которой приведены на рис. 11.

Мы видим, что отношение $\frac{\sigma_{\text{эксп}}}{\sigma_{\text{томс}}} \sim 1$ лишь для длин волн, больших примерно 2 Å.

При меньших длинах волн классическое рассмотрение процессов рассеяния оказывается неприменимым. Мы сталкиваемся здесь с упомянутым в § 28 обстоятельством. Хотя предел применимости классической электродинамики, заключенный в самой теории, относится к масштабу длины волн $\lambda \sim r_0 \sim 10^{-5}$ Å, фактически он наступает уже при масштабах в 10^5 раз больших.

Это связано, как мы уже подчеркивали, с проявлением квантовых эффектов. Ход сечения на рис. 11 в точности совпадает

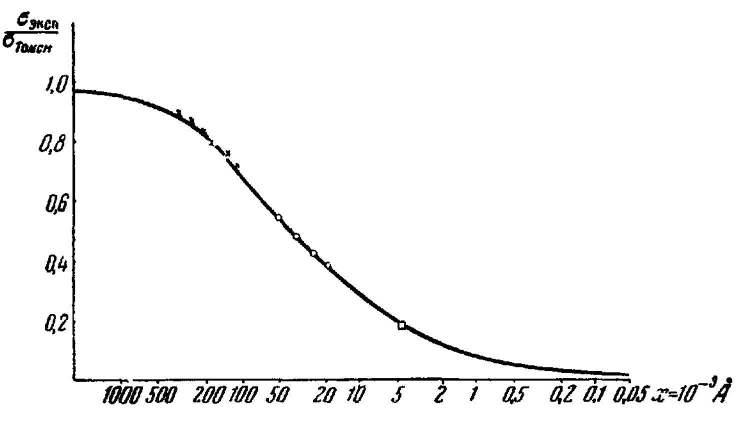


Рис. 11.

с предсказаниями квантовой теории излучения (ч. V, формула Клейна — Нишины).

§ 37. Поглощение излучения

Наряду с рассеянием излучение, взаимодействующее с веществом, испытывает поглощение. В классической электродинамике последний эффект может быть рассчитан для модели осциллятора. Мы ограничимся излучением частоты падающего излучения, близкой к резонансной, когда поглощение будет наибольшим. Однако при этом нельзя считать частоту излучения точно равной собственной частоте осциллятора — из дальнейшего видно, что в этом случае вычисление не привело бы к вполне определенному результату. Поэтому следует считать, что падающее излучение имеет некоторое непрерывное распределение по частотам.

Мы можем разложить падающее поле в интеграл Фурье, написав

$$\boldsymbol{E}(t)=\frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{E}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Подставляя это в уравнение движения осциллятора (36,1) и разлагая в интеграл Фурье смещение последнего

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{r}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega,$$

легко найти

$$\boldsymbol{r}(\omega)=\frac{e}{m}\frac{\boldsymbol{E}(\omega)}{\omega_0^2-\omega^2+i\omega\gamma}. \tag{37,1}$$

Потеря энергии излучения равна, очевидно, полной работе, произведенной полем над осциллятором. Последнюю вычислим по формуле

$$-\Delta E=W=\int \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\,dt=e\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(t)\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt. \tag{37,2}$$

Воспользовавшись обобщенной формулой Персеваля (II, 9), легко найдем

$$-(\Delta E)=\frac{2e^2}{m}\int_0^{\infty}i\omega\{\boldsymbol{E}(\omega)\cdot\boldsymbol{r}^*(\omega)-\boldsymbol{E}^*(\omega)\cdot\boldsymbol{r}(\omega)\}\,d\omega=$$

$$=2\frac{e^2}{m}\int_0^{\infty}\frac{\omega^2\gamma\,|\boldsymbol{E}(\omega)|^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\gamma^2}\,d\omega\simeq 2\frac{e^2}{m}\int_0^{\infty}\frac{\gamma\,|\boldsymbol{E}(\omega)|^2}{(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}\,d\omega. \tag{37,3}$$

Подинтегральное выражение имеет резкий максимум в области резонанса. Будем считать, что спектральное распределение поглощаемого излучения в области резонанса изменяется медленно по сравнению с резонансным множителем. Тогда можно приближенно вычислить интеграл, если воспользоваться формулой (III, 3) и представлением δ-функции (III, 4'):

$$\int_0^{\infty}\frac{\gamma\,|\boldsymbol{E}(\omega)|^2}{(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}\,d\omega\simeq\int_{-\frac{\omega_0}{\gamma}}^{\infty}\left|\boldsymbol{E}\left(\frac{x\gamma}{2}+\omega_0\right)\right|^2\frac{dx}{x^2+1}\simeq$$

$$\simeq\int_{-\infty}^{\infty}\left|\boldsymbol{E}\left(\frac{x\gamma}{2}+\omega_0\right)\right|^2\frac{dx}{x^2+1}\simeq|\boldsymbol{E}(\omega_0)|^2\,2\pi. \tag{37,4}$$

Мы заменили нижний предел интегрирования на бесконечный, поскольку $\gamma\ll\omega_0$. Подставляя (37,4) в (37,3), находим

$$-\Delta E=\frac{\pi e^2}{m}|\boldsymbol{E}(\omega_0)|^2=\pi c^2 r_0|\boldsymbol{E}(\omega_0)|^2. \tag{37,5}$$

Поглощенная энергия оказывается не зависящей от физических свойств поглощающей системы, за исключением положения резонанса частоты ω_0. Поэтому найденное выражение имеет, как и дисперсионная формула, весьма общий характер. Очень близкие выражения для поглощения получаются и в квантовой теории излучения (см. ч. V).

§ 38*. Каноническая форма уравнений поля

При переходе к квантовой теории электромагнитного поля удобно придать уравнениям электромагнитного поля вид, весьма сходный с уравнениями механики. Именно, оказывается, что электромагнитному полю можно сопоставить некоторую механическую систему, а уравнениям Даламбера придать форму уравнений Гамильтона, описывающих движение этой механической системы. Мы ограничимся случаем электромагнитного поля в вакууме.

Воспользовавшись описанной в § 11 кулоновской калибровкой потенциалов, при которой $\varphi=0$, запишем уравнения поля в виде

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{38,1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{38,2}$$

Областью, в которой имеют место написанные уравнения поля, является пространство, свободное от зарядов и токов. На границе этой области должно быть задано граничное условие. Таким условием может служить, например, выражение для $\boldsymbol{A}$ в виде запаздывающего потенциала. Нас, однако, не будет интересовать амплитуда электромагнитных волн, и мы ограничимся рассмотрением поля в вакууме вдали от токов и зарядов. Разобьем всю область пространства, свободную от зарядов, на совокупность кубов (мы будем именовать их нормировочными) с ребром L и будем рассматривать поле внутри одного из кубов. Тогда граничное условие должно быть задано на поверхности нормировочного куба.

Как мы знаем, электромагнитное поле в вакууме представляет совокупность бегущих волн. Решение в виде бегущих волн получится, если принять, что вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ и его производные имеют равные значения на противоположных гранях куба. Это эквивалентно требованию: $\boldsymbol{A}$ является периодической функцией переменных x, y, z с периодом L:

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = \boldsymbol{A}(x+L, y+L, z+L). \tag{38,3}$$

Получив решение уравнений (38,1) и (38,2) с граничным условием (38,3) в нормировочном кубе с ребром L, мы можем написать решение во всем пространстве простым повторением решения в исходном нормировочном кубе. Окончательные результаты не будут зависеть от выбора L.

Будем пытаться искать решение (38,1) и (38,2) в нормировочном кубе в виде совокупности выражений вида $q_i(t)\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{r})$, где $q_i(t)$ зависит только от времени, $\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{r})$ — от координат.

При соответствующем выборе векторных функций $A_i(r)$ каждая из них представляет волну в нормировочном кубе. Поскольку объем последнего является конечным, в нем может укладываться счетное множество стоячих или бегущих волн. Итак, положим

$$A(r, t) = \sum_i q_i(t) A_i(r), \tag{38,4}$$

где индекс i пробегает бесконечное, но дискретное число значений. Это означает, что вектор-потенциал поля в нормировочном кубе можно разложить в ряд Фурье. Число членов в сумме (38,4), т. е. число волн в нормировочном кубе, бесконечно велико.

Подставляя (38,4) в (38,1), находим

$$\sum_i \left(q_i(t) \Delta A_i(r) - \frac{1}{c^2} \ddot{q}_i(t) A(r) \right) = 0. \tag{38,5}$$

Поскольку все волны, образующие суперпозицию (38,4), являются независимыми, равенство (38,5) должно иметь место для каждой из волн, т. е.

$$q_i(t) \Delta A_i(r) - \frac{1}{c^2} \ddot{q}_i(t) A_i(r) = 0. \tag{38,6}$$

Перепишем (38,6) в виде

$$\frac{c^2 \Delta (A_i(r))_k}{(A_i(r))_k} = \frac{\ddot{q}_i(t)}{q_i(t)}, \quad k = x, y, z. \tag{38,7}$$

Поскольку $(A_i(r))_k$ и $q_i(t)$ являются функциями разных переменных, равенство (38,7) может иметь место только, если правая и левая его стороны порознь равны некоторой постоянной, именуемой постоянной разделения. По причинам, ясным из дальнейшего, эта постоянная должна быть существенно положительной величиной. Обозначив ее через $(-\omega_i^2)$, находим

$$\Delta A_i(r) + \frac{\omega_i^2}{c^2} A_i(r) = 0, \tag{38,8}$$

$$q_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0. \tag{38,9}$$

Решениями уравнения (38,8), удовлетворяющими условиям периодичности (38,3), служат выражения типа

$$\left. \begin{aligned} A_i &\sim e_i \sin k_i r, \\ A_i &\sim e_i \cos k_i r. \end{aligned} \right\} \tag{38,10}$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{k}_\iota$ должны принимать дискретный ряд значений

$$k_{\iota x} = \frac{2\pi n_1}{L}, \quad k_{\iota y} = \frac{2\pi n_2}{L}, \quad k_{\iota z} = \frac{2\pi n_3}{L}, \tag{38,11}$$

где n_1, n_2 и n_3 — положительные целые числа. Совокупность таких значений компонент $\boldsymbol{k}_\iota$ обеспечивает наличие узлов или пучностей на гранях нормировочного куба. Абсолютная величина вектора $\boldsymbol{k}$ равна, по определению, $|\boldsymbol{k}_\iota| = \frac{\omega_\iota}{c}$. Вектор $\boldsymbol{e}_j$ — единичный вектор поляризации, могущий принимать при данном $\boldsymbol{k}_\iota$ два значения $(j = 1, 2)$.

Вместо синусов и косинусов в формуле (38,10) мы могли бы взять их произвольную линейную комбинацию.

Уравнение (38,2) приводит к требованию

$$(\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{k}_\iota) = 0, \tag{38,12}$$

означающему (см. § 33) поперечность волн.

Совокупность функций $\boldsymbol{A}_\iota$ является полностью заданной уравнениями (38,1) и (38,2) и граничным условием (38,3). Она является одинаковой для любых полей в нормировочном кубе.

Для фактического определения вектора-потенциала в данной точке пространства в определенный момент времени необходимо задать совокупность всех временны́х амплитуд $q_\iota(t)$. Это значит, что состояние поля характеризуется заданием бесконечного набора амплитуд $q_\iota(t)$.

Последние определяются уравнением (38,9), которое совпадает с уравнением движения линейного гармонического осциллятора. Величина ω_ι представляет частоту колебаний этого осциллятора Значение $q_\iota(t)$ определяет состояние ι-го осциллятора в любой момент времени t. Задание совокупности переменных амплитуд $q_\iota(t)$ равносильно заданию состояния совокупности бесконечно большого числа осцилляторов с частотами ω_ι. Если известно состояние всех осцилляторов в данный момент времени t, то известно и поле в этот момент. Таким образом, электромагнитное поле может быть формально заменено механической системой с бесконечно большим числом степеней свободы — набором бесконечно большого числа осцилляторов, именуемых обычно осцилляторами поля. Совокупность состояний осцилляторов поля $q_\iota(t)$ характеризует состояние этой механической системы и, вместе с тем, состояние поля.

Величины $q_\iota(t)$ можно рассматривать как совокупность координат механической системы, уравнения движения которой можно представить в виде уравнений Гамильтона. Этой

системе следует приписать функцию Гамильтона (совпадающую с ее энергией)

$$H = \frac{1}{2} \sum (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2), \qquad (38,13)$$

где p_i — импульс, сопряженный координате q_i. Масса всех осцилляторов поля принята равной единице.

Действительно, уравнения Гамильтона для i-й степени свободы (i-го осциллятора) гласят:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\omega_i^2 q_i,$$

откуда непосредственно следует уравнение (38,9) для величины q_i.

Частное решение уравнений поля (38,1) и (38,2) можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}_{ij} \sim C_{1i} \boldsymbol{e}_j \cos \omega_i t \sin \boldsymbol{k}_i \boldsymbol{r} + C_{2i} \boldsymbol{e}_j \sin \omega_i t \cos \boldsymbol{k}_i \boldsymbol{r}. \qquad (38,14)$$

Если должным образом подобрать нормировку линейной комбинации решений типа (38,14), из которых образуется общее решение (38,4) уравнений поля (38,1) и (38,2), можно добиться совпадения энергии поля в нормировочном кубе с энергией системы осцилляторов поля (38,13). При такой нормировке вектора-потенциала мы можем считать, что система осцилляторов поля полностью эквивалентна электромагнитному полю. Состояние набора осцилляторов однозначно связано с состоянием поля.

Требующаяся линейная комбинация решений типа (38,14) имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_i \sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{e}_j \frac{1}{k_i} \left(-\dot{q}_i(t) \sin \boldsymbol{k}_i \boldsymbol{r} + \omega_i q_i \cos \boldsymbol{k}_i \boldsymbol{r} \right) =$$
$$= \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_i \sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{e}_j \frac{1}{k_i} \left(-p_i \sin \boldsymbol{k}_i \boldsymbol{r} + \omega_i q_i \cos \boldsymbol{k}_i \boldsymbol{r} \right). \qquad (38,15)$$

Действительно, убедимся в том, что энергия поля в нормировочном объеме удовлетворяет требованию

$$E = \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j=1}^{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2). \qquad (38,16)$$

При этом осцилляторы с разными поляризациями считаются различными. Полное число осцилляторов поля получается сум-

мированием по k и по j. Последнее сводится к удвоению результата.

Из (38,15) следует

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i \sum_{j=1}^{2} e_j \frac{1}{k_i}(-\ddot{q}_i \sin \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r} + \omega_i \dot{q}_i \cos \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}) =$$

$$= -\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i \sum_j e_j \frac{1}{ck_i}(\omega_i^2 q_i \sin \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r} + \omega_i p_i \cos \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}) =$$

$$= -\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i \sum_j e_j (\omega_i q_i \sin \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r} + p_i \cos \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}) = \sum_i E_i; \quad (38,17)$$

$$H = \operatorname{rot} A = \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{k_i}\{-\dot{q}_i \operatorname{rot}(e_j \sin \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}) + \omega_i q_i \operatorname{rot}(e_j \cos \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r})\} =$$

$$= -\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i \sum_j \frac{1}{k_i}\{p_i [\boldsymbol{k}_i e_j] \cos \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r} + \omega_i q_i [\boldsymbol{k}_i e_j] \sin \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}\} =$$

$$= -\sqrt{\frac{4\pi}{L^3}}\sum_i \sum_{j=1}^{2} \frac{[\boldsymbol{k}_i e_j]}{k_i}\{p_i \cos \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r} + \omega_i q_i \sin \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}\} = \sum_i \frac{[\boldsymbol{k}_i E_i]}{k_i}. \quad (38,18)$$

Составим выражение для интегралов $\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV$ и $\frac{1}{8\pi}\int H^2\,dV$. Из (38,17) следует

$$\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV = \frac{1}{2L^3}\int\left\{\sum_i \sum_j e_j (\omega_i q_i \sin \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r} + p_i \cos \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r})\right\}^2 dV.$$

При вычислении интегралов воспользуемся очевидными соотношениями:

$$\int \sin(\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}) \sin(\boldsymbol{k}_{i'}\boldsymbol{r})\,dV = \int \sin(\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}) \cos(\boldsymbol{k}_{i'}\boldsymbol{r})\,dV =$$

$$= \int \cos(\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}) \cos(\boldsymbol{k}_{i'}\boldsymbol{r})\,dV = \int \sin(\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}) \cos(\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r})\,dV = 0$$

$$\int \sin^2 \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}\,dV = \int \cos^2 \boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}\,dV = \frac{V}{2} = \frac{L^3}{2}.$$

Поэтому легко получить выражение

$$\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV = \frac{1}{4}\sum_i \sum_j (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2).$$

Совершенно аналогично из (38,18) получается

$$\frac{1}{8\pi}\int H^2\,dV =$$

$$= \frac{1}{2L^3}\int\left\{\sum_i\sum_j e_j\frac{1}{k_i}(p_i[k_ie_j]\cos k_ir + \omega_iq_i[k_ie_j]\sin k_ir)\right\}^2 dV =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_i\sum_j(p_i^2+\omega_i^2q_i^2).$$

Складывая найденные выражения, приходим к равенству (38,16).

При выбранной нами нормировке потенциала — подборе множителей перед $\sin k_ir$ и $\cos k_ir$, — полю в нормировочном объеме можно сопоставить набор осцилляторов поля, энергия которого совпадает с энергией поля. Состояние осцилляторов — набор величин $q_i(t)$ в момент времени t — определяет значение вектора-потенциала $A(r, t)$.

Таким образом, электромагнитному полю в конечном объеме формально эквивалентна механическая система с бесконечно большим, но счетным числом степеней свободы — набор осцилляторов поля, а уравнениям поля — гамильтоновы уравнения движения осцилляторов поля Часто функцию Гамильтона эквивалентной системы осцилляторов именуют просто гамильтоновой функцией поля, а разложение вектора-потенциала (38,15) — разложением поля на осцилляторы. Необходимо подчеркнуть, что в рамках классической электродинамики разложение поля на осцилляторы имеет характер вычислительного приема. Осцилляторы поля нельзя связать с колебаниями каких-либо частиц, имеющих реальный характер. Однако это разложение играет важнейшую роль в квантовой теории электромагнитного поля (см. ч. V).

В квантовой теории электромагнитного поля разложение (38,15) часто выражают через экспоненциальные функции. В дальнейшем, в ч. V нам понадобится такое представление. Запишем выражение для вектора-потенциала $A(r, t)$ в виде

$$A(r, t) = \sum_\lambda (b_\lambda A_\lambda + b_\lambda^* A_\lambda^*). \qquad (38,19)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_\lambda = e_\lambda\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\,e^{ik_\lambda r},$$

$$A_\lambda^* = e_\lambda\sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}}\,e^{-ik_\lambda r}.$$

Индекс λ, по которому производится суммирование в (38,19), заменяет индексы i и j в (38,15), т. е. он пробегает двойной (по сравнению с i) ряд значений, отвечающий обоим направлениям вектора поляризации ($\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$). Слагаемое $b_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda$ характеризует волну, распространяющуюся (бегущую) в положительном направлении вектора $\boldsymbol{k}_\lambda$. Второе слагаемое $b^*_\lambda \boldsymbol{A}^*_\lambda$ представляет волну, распространяющуюся в противоположном направлении ($-\boldsymbol{k}_\lambda$). Таким образом, волны, имеющие волновые векторы ($\boldsymbol{k}_\lambda$) и ($-\boldsymbol{k}_\lambda$), считаются разными волнами. Компоненты векторов ($\boldsymbol{k}_\lambda$) и ($-\boldsymbol{k}_\lambda$) принимают значения, даваемые (38,11), но с положительными и отрицательными значениями целых чисел n_1, n_2, n_3 Это означает, что одной стоячей волне отвечают две бегущие — в положительном и отрицательном направлениях.

Подставляя $\boldsymbol{A}_\lambda$ и $\overset{*}{\boldsymbol{A}}_\lambda$ в (38,19), перепишем эту формулу в виде

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{L^3}} \sum_\lambda \boldsymbol{e}_\lambda \left(b_\lambda e^{i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}} + b^*_\lambda e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}}\right).$$

Сравнивая последнее выражение с (38,15) и приравнивая коэффициенты при $e^{i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}}$ и $e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}}$, находим

$$\left.\begin{aligned} b_\lambda &= \frac{1}{2\omega_\lambda}(ip_\lambda + \omega_\lambda q_\lambda), \\ b^*_\lambda &= \frac{1}{2\omega_\lambda}(-ip_\lambda + \omega_\lambda q_\lambda). \end{aligned}\right\} \qquad (38,20)$$

В этих обозначениях энергия поля запишется в виде

$$E = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) = \frac{1}{2}\sum_\lambda (p_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 q_\lambda^2) = 2\sum_\lambda b_\lambda b^*_\lambda \omega_\lambda^2. \qquad (38,21)$$

Для дальнейшего нам понадобится еще вычислить число осцилляторов поля с данной частотой и данной поляризацией Оно равно, очевидно, числу бегущих волн в объеме $V = L^3$. Для нахождения числа осцилляторов удобно воспользоваться простым геометрическим построением. Выберем n_1, n_2 и n_3 в формуле (38,11) за координатные оси в воображаемом пространстве чисел (n_1, n_2, n_3).

На рис. 12 изображена часть этого пространства. Каждому возможному значению n_1 и n_2 на этом рисунке отвечает точка. Введем величину

$$n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}.$$

Если числа n_1 n_2, n_3 достаточно велики, то изображающие их точки лежат весьма близко друг к другу и заполняют все

пространство почти непрерывным образом. Величина n, как функция n_1, n_2, n_3, будет изменяться почти непрерывно и на рис. 12 изобразится радиусом-вектором.

Поскольку каждой тройке чисел n_1, n_2, n_3 отвечает определенное значение k, равное

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = n\frac{2\pi}{L},$$

число волн с k, лежащим в интервале между k и $k+dk$, равно числу чисел n, лежащих в интервале между n, $n+dn$. Последнее

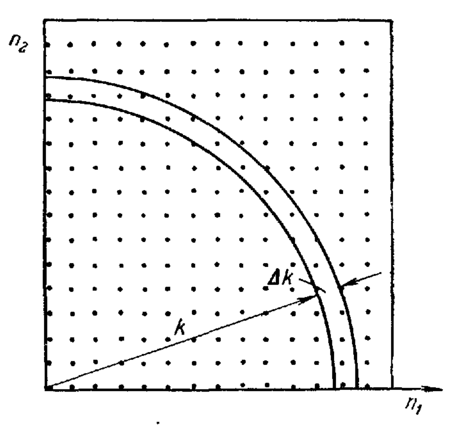


Рис. 12.

равно числу изобразительных точек, попадающих в шаровой слой, лежащий между шаровыми поверхностями с радиусами n, $n + dn$. Для этого числа имеем, очевидно, значение

$$g(n)\,dn = 4\pi n^2\,dn.$$

Таким образом, искомое число бегущих волн или число осцилляторов поля с $|\mathbf{k}|$, лежащим в интервале k, $k + dk$, и данной поляризацией в объеме $V = L^3$, равно

$$g(k)\,dk = 4\pi n^2\,dn = \frac{4\pi k^2\,dk}{(2\pi)^3}L^3.$$

Число осцилляторов с частотой, лежащей в интервале ω, $\omega+d\omega$, и данной поляризацией

$$g(\omega)\,d\omega = \frac{4\pi\omega^2\,d\omega}{(2\pi c)^3}L^3. \qquad (38,22)$$

Иногда приходится пользоваться формулой для числа осцилля-

торов поля с данной частотой, данной поляризацией и направлением вектора $\boldsymbol{k}$, лежащим в телесном угле $d\Omega$. Число таких осцилляторов равно

$$g(\omega)\,d\omega\,d\Omega = \frac{\omega^2\,d\omega L^3\,d\Omega}{(2\pi c)^3}. \tag{38,23}$$

Нам понадобится выражение для импульса излучения в объеме L^3. Написав его на основании (13,11), (38,17) и (38,18) в виде

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{4\pi c}\int [\boldsymbol{EH}]\,dV = \frac{1}{4\pi c}\int\left[\sum_\lambda \boldsymbol{E}_\lambda, \sum_\mu \frac{[\boldsymbol{k}_\mu \boldsymbol{E}_\mu]}{k_\mu}\right]dV =$$
$$= \frac{1}{4\pi c}\sum_\lambda \frac{\boldsymbol{k}_\lambda}{k_\lambda}\int E_\lambda^2\,dV = \int\sum\frac{\boldsymbol{k}_\lambda E_\lambda^2}{4\pi c k_\lambda}\,dV = \sum \boldsymbol{g}_\lambda,$$

мы можем, кроме энергии

$$\varepsilon_\lambda = 2b_\lambda b_\lambda^* \omega_\lambda^2 = p_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 q_\lambda, \tag{38,24}$$

приписать каждому осциллятору импульс

$$\boldsymbol{p}_\lambda = \frac{\boldsymbol{k}_\lambda \varepsilon_\lambda}{c k_\lambda}, \tag{38.25}$$

так что

$$E = \sum \varepsilon_\lambda, \quad \boldsymbol{G} = \sum \boldsymbol{p}_\lambda.$$

ГЛАВА VII

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

§ 39. Движение заряженных частиц в постоянных электрическом и магнитном полях

Одним из важных с практической точки зрения разделов электродинамики является теория движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях Теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях является основой всей электроники, техники ускорителей, электронной и протонной микроскопии, масс-спектрографии, исследований реакций в плазме и опытных установок для изучения термоядерных явлений. Она весьма важна для целого ряда других областей физики — астрофизики, физики космических лучей и т. п.

В рамках этой книги мы ограничимся рассмотрением простейших задач. Мы будем предполагать, что поле, в котором находится некоторая частица, имеет напряженность, весьма большую по сравнению с полем самой частицы. Иными словами, мы считаем частицу, движением которой интересуемся, пробной частицей, не искажающей заданное, внешнее по отношению к ней поле.

Мы начнем с движения заряженной частицы в однородном постоянном во времени электрическом поле. Уравнения движения имеют вид

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=e\boldsymbol{E}.$$

Если в начальный момент времени $t=0$ заряженная частица была неподвижна, то, ориентируя ось x по полю, имеем

$$m\ddot{x}=eE,$$

$$m\ddot{y}=0,$$

откуда

$$v\equiv\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2e}{m}V+v_0^2}=\pm\sqrt{\frac{2eV}{m}},\qquad(39,1)$$

где $V = (\varphi_2 - \varphi_1)$ — ускоряющая (или замедляющая) разность потенциалов, пройденная зарядом. При этом положено $v_0 = 0$.

Если частица в начальный момент имела скорость v_0, направленную под углом θ к оси y, и находилась в начале координат, то двукратное интегрирование уравнений движения дает

$$\dot{x} = \frac{e}{m} Et + v_0 \sin\theta,$$

$$x = \frac{et^2E}{2m} + (v_0 \sin\theta)\, t,$$

$$\dot{y} = v_0 \cos\theta,$$

$$y = (v_0 \cos\theta)\, t.$$

Исключая t из написанных выражений для y и x, находим уравнение траектории

$$x = (\operatorname{tg}\theta)\, y + \frac{eEy^2}{2m (v_0 \cos\theta)^2}. \qquad (39,2)$$

Как и следовало ожидать, частица движется по параболе. Поперечное (по отношению к начальной скорости) электрическое поле обладает важным свойством фокусирования. Если пучок частиц выходит из начала координат под различными углами, близкими к 45°, то простой расчет показывает, что в некоторый момент времени $t = t_{\text{макс}}$ все частицы собираются в точке, находящейся на расстоянии $y_{\text{макс}}$. Здесь $y_{\text{макс}}$ — наибольшее расстояние вдоль оси y, проходимое частицей (отвечающее наибольшей высоте подъема при аналогичном движении в поле тяжести), $t_{\text{макс}}$ — время, требующееся для достижения этой точки.

В однородном электрическом поле фокусируются заряды с одинаковыми отношениями $\frac{e}{m}$ и начальными скоростями v_0, вылетающие под углом $\sim 45°$ к вектору поля.

Рассмотрим теперь движение частицы в однородном постоянном магнитном поле. Ориентируем ось z по направлению поля. Уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{e}{c} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}], \qquad (39,3)$$

или, в проекциях,

$$\ddot{x} = \frac{e}{mc} \dot{y} H, \qquad (39,4)$$

$$\ddot{y} = -\frac{e}{mc} \dot{x} H, \qquad (39,5)$$

$$\ddot{z} = 0. \qquad (39,6)$$

Уравнение (39,6) означает, что магнитное поле, направленное вдоль оси z, не влияет на движение частицы в этом направлении. Будем искать решение уравнений (39,4) и (39,5) в виде

$$\dot{x} = A\cos(\omega_C t + \alpha),$$
$$\dot{y} = B\sin(\omega_C t + \alpha).$$

Тогда имеем

$$-\omega_C A = \frac{eH}{mc}B,$$
$$-\frac{eH}{mc}A = \omega_C B.$$

Отсюда находим

$$\omega_C = \frac{eH}{mc}, \quad A = -B. \tag{39,7}$$

Таким образом, можем написать

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= A\cos(\omega_C t + \alpha) = A\cos\left(\frac{eH}{mc}t + \alpha\right), \\ \dot{y} &= -A\sin(\omega_C t + \alpha) = -A\sin\left(\frac{eH}{mc}t + \alpha\right). \end{aligned}\right\} \tag{39,8}$$

Очевидно, что

$$A^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_\perp^{(0)^2},$$

где $v_\perp^0$ — начальная скорость в плоскости (xy).

Интегрируя еще раз полученные выражения, имеем

$$x = x_0 + \frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_C}\sin(\omega_C t + \alpha),$$
$$y = y_0 + \frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_C}\cos(\omega_C t + \alpha).$$

Исключая из последних соотношений время, находим, что частица движется по окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_\perp^{(0)^2}}{\omega_C^2} = R_C^2.$$

Частота обращения частицы, определяемая формулой (39,7), носит название циклотронной частоты. Циклотронная частота, равная удвоенной ларморовой, не зависит от начальной скорости частицы и определяется отношением $\frac{e}{m}$. Радиус окружности

$$R_C = \frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_C} = \frac{mcv_\perp^{(0)}}{eH} \tag{39,9}$$

имеет простой смысл: на окружности радиуса R_L уравниваются центробежная сила и сила Лоренца,

$$\frac{m\left(v_{\perp}^{(0)}\right)^2}{R_C} = \frac{e}{c}\, v_{\perp}^{(0)} H.$$

Если частица в начальный момент помимо скорости в плоскости (xy) имела по оси z компоненту скорости $v_z^{(0)}$, то она будет совершать равномерное движение вдоль направления магнитного поля. Наложение обоих движений, равномерного по оси z и вращения в плоскости (xy), приводит к траектории частицы в продольном поле в виде винтовой линии. Витки траектории навиваются на цилиндр радиуса R_C с осью, параллельной оси z.

При движении в постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H}$ имеют место следующие законы сохранения:

1. Сохраняется полная энергия частицы

$$\varepsilon = \frac{m}{2}\left\{\left(v_{\perp}^{(0)}\right)^2 + \left(v_z^{(0)}\right)^2\right\} = \text{const}.$$

2. Сохраняется проекция момента импульса на ось z, т. е.

$$L_z = mR_C^2 \dot{\varphi} = mR_C^2 \omega_C = \text{const}.$$

Из формулы (22,4) следует, что сохраняется также магнитный момент, создаваемый частицей, движущейся по окружности:

$$\mu = \frac{e}{2mc} L_z = \frac{eR_C^2\omega_C}{2c} = \frac{\left(mv_{\perp}^2\right)}{2}\frac{1}{H} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{H} = \text{const}, \qquad (39,10)$$

где $\varepsilon_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2}$ — кинетическая энергия движения в плоскости (xy). Этим важным результатом мы воспользуемся в следующем параграфе.

Постоянное и однородное магнитное, как и постоянное однородное электрическое, поле обладает свойством фокусировки. Пусть из некоторой точки выходит пучок частиц в различных направлениях и с различными начальными скоростями, лежащими в плоскости (xy). Поскольку циклотронная частота не зависит от начальной скорости, по прошествии промежутка времени $T_C = \frac{2\pi}{\omega_C}$ частицы, совершив один оборот, вновь соберутся в одной точке.

Если теперь рассмотреть пучок частиц, имеющих одинаковые значения начальной скорости $|v^{(0)}|$, но вылетающих в различных направлениях, то можно заметить следующее: за время

T_C все они пройдут один виток винтовой линии. Шаг ее, равный $l = v_z^{(0)}T_C = v^{(0)}\cos\alpha T_C$, будет различным. Здесь α — угол между направлением начальной скорости и осью z. Поэтому частицы, выходящие из начальной точки, не собираются вновь в одной точке. Если, однако, угол α мал, так что $\cos\alpha \approx 1$, то шаг винтовой линии у всех частиц оказывается одинаковым и пучок фокусируется. В отличие от фокусировки электрическим полем, магнитное поле фокусирует только частицы, летящие под малыми углами к полю.

Рассмотрим, наконец, общий случай движения частицы в однородных и постоянных во времени электрическом и магнитном полях. Напишем уравнение движения в общем случае в виде

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}].$$

Введем новую неизвестную величину $\boldsymbol{V}$, определяемую соотношением

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} - \frac{c\,[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]}{H^2}. \qquad (39,11)$$

Подставляя $\boldsymbol{V}$ в уравнение движения, находим

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{e}{m}\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}] + \frac{[[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]\boldsymbol{H}]}{H^2}\right\}.$$

Раскрывая векторное произведение

$$[[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]\boldsymbol{H}] = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}H^2,$$

получаем

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{e}{m}\frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{E})}{H^2} + \frac{e}{mc}[\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}]. \qquad (39,12)$$

Если электрическое поле перпендикулярно к магнитному, так что $\boldsymbol{H}\boldsymbol{E} = 0$, то

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{e}{mc}[\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}].$$

Последнее уравнение совпадает с (39,3). Следовательно, $\boldsymbol{V}$ представляет скорость движения частицы по окружности в плоскости, перпендикулярной к магнитому полю $\boldsymbol{H}$, которое происходит с циклотронной частотой. Проекции скорости $\boldsymbol{V}$ даются формулами, аналогичными (39,8), в которых мы положим $\alpha = 0$.

При этом полная скорость частицы равна

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + c\frac{[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]}{H^2},$$

или, в проекциях,

$$v_x = V_x + \frac{cE_y}{H} = v_\perp^{(0)} \cos \omega_C t + \frac{cE_y}{H}, \tag{39,13}$$

$$v_y = V_y = -v_\perp^{(0)} \sin \omega_C t, \tag{39,14}$$

где $v_\perp^{(0)}$ — начальное значение скорости в плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Постоянной α,

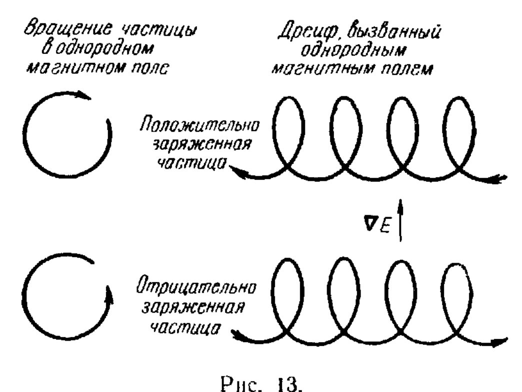


Рис. 13.

равной нулю, отвечает начальная скорость частицы, направленная по оси x. Из (39,13) следует, что v_x остается малой по сравнению со скоростью света c, если имеет место неравенство $E_y \ll H$.

Слагающая скорости частицы

$$\boldsymbol{v}_D = \frac{c\,[\boldsymbol{EH}]}{H^2} \tag{39,15}$$

направлена перпендикулярно к обоим полям. По абсолютной величине она равна

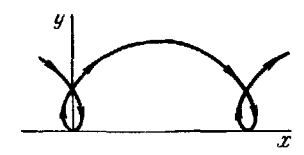
$$|\boldsymbol{v}_D| = \frac{cE}{H} \tag{39,16}$$

и не зависит ни от заряда, ни от массы частицы.

Движение частицы в направлении $\boldsymbol{v}_D$ получило название дрейфа.

Наглядное истолкование явления дрейфа может быть получено из следующего рассуждения. Пусть положительно заряженная частица движется по окружности в плоскости (xy), перпендикулярной к направлению магнитного поля $\boldsymbol{H}$, выбранному за ось z (на рис. 13). Магнитное поле направлено вверх перпендикулярно к площади чертежа. Пусть, далее, электрическое поле направлено по оси y. Тогда электрическое поле будет

ускорять частицу при ее движении по левой дуге полуокружности и замедлять при движении по правой полуокружности. Круговая траектория будет искажаться. Верхнюю часть окружности частица проходит с большей скоростью, чем нижнюю. Магнитное поле в нижней части окружности будет загибать траекторию частицы сильнее, чем в верхней. Поэтому проекция пути, проходимого частицей, на ось x в нижней части окружности будет меньше, чем в верхней. В итоге после каждого оборота возникает некоторое смещение частицы вдоль оси x, в положительном ее направлении (на рис. 13 слева направо). В результате этого частица начнет смещаться в положительном направлении оси x.





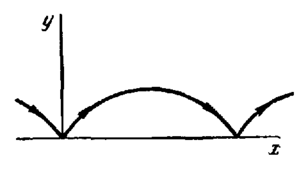


Рис. 14.

Аналогичное рассуждение для отрицательной частицы приводит к тому же направлению дрейфа.

Интегрируя еще раз выражения (39,13) и (39,14), находим уравнения траектории частицы в параметрическом виде:

$$x = \frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_C} \sin \omega_C t + \frac{cEt}{H} + x_0, \quad (39,17)$$

$$y = -\frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_C} \cos \omega_C t + y_0. \quad (39,18)$$

Кривая, описываемая частицей, носит название трохоиды. Конкретные параметры трохоиды зависят от начальных условий. Если положить, что при $t = 0$ заряженная частица находилась в начале координат, то $x_0 = 0$; $y_0 = -\frac{v_\perp^{(0)}}{\omega_C}$. При этом форма кривой определяется только значением начальной скорости $v_\perp^{(0)}$. При $|v_\perp^{(0)}| > \frac{cE}{H}$ получается верхняя кривая рис. 14, при $|v_\perp^{(0)}| < \frac{cE}{H}$ — средняя кривая. Нижняя кривая, циклоида, отвечает случаю $v_\perp^{(0)} = -\frac{cE}{H}$.

Если $\boldsymbol{E}$ не перпендикулярно к $\boldsymbol{H}$, то уравнение (39,12) можно спроектировать на плоскость, перпендикулярную к $\boldsymbol{H}$, и ось z. Тогда находим

$$\frac{d\boldsymbol{V}_\perp}{dt} = \frac{e}{mc}[\boldsymbol{V}_\perp \boldsymbol{H}], \qquad \frac{dV_z}{dt} = \frac{e}{m} E_\parallel,$$

где $E_{\parallel}$ — слагающая электрического поля, параллельная магнитному полю. В скорости дрейфа вместо E следует при этом написать $E_{\perp}$. На дрейф частицы накладывается равномерно ускоренное движение вдоль магнитного поля под действием силы $eE_{\parallel}$.

§ 40. Движение заряженных частиц в медленно изменяющихся магнитных полях

Обратимся теперь к весьма важному случаю движения частиц в магнитных полях, переменных во времени и в пространстве. В общем случае переменных полей интегрирование уравнений движения оказывается весьма трудной задачей. Поэтому мы ограничимся случаем полей, медленно изменяющихся во времени и от точки к точке.

Рассмотрим случай, когда магнитное поле медленно изменяется во времени, оставаясь однородным в пространстве. Пусть частица вращается с циклотронной частотой ω_C в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Мы будем предполагать, что изменение поля за один оборот достаточно мало, т. е.

$$T_C \left| \frac{\partial H}{\partial t} \right| \ll |\boldsymbol{H}|, \tag{40,1}$$

где $T_C = \frac{2\pi}{\omega_C}$.

При изменении поля во времени можно написать

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\,d\boldsymbol{S}, \tag{40,2}$$

где контуром интегрирования служит траектория частицы. Умножив (40,2) на заряд частицы и считая, что за время одного оборота величина $\frac{\partial H}{\partial t}$ остается постоянной, можем написать

$$e\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{e}{c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right| S = -\frac{e}{c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right| \pi R_C^2. \tag{40,3}$$

Интеграл, стоящий в (40,3) слева, представляет работу, произведенную над зарядом за один оборот. Она равна приращению кинетической энергии движения в плоскости (xy), которую обозначим через $\Delta\varepsilon_{\perp}$. Поэтому

$$\Delta\varepsilon_{\perp} = -\frac{e}{c}\pi R_C^2 \left|\frac{\partial H}{\partial t}\right| = \frac{|e|\,\pi R_C^2}{c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|. \tag{40,4}$$

Знак минус означает, что частица с отрицательным зарядом движется в направлении, обратном положительному направлению при интегрировании по контуру.

Найдем производную $\frac{d\varepsilon_\perp}{dt}$. На основании (40,4) и (39,10) имеем

$$\frac{d\varepsilon_\perp}{dt}=\frac{\Delta\varepsilon_\perp}{T_C}=\frac{|e|\pi R_C^2}{cT_C}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|=\frac{|e|\pi\omega_C R_C^2}{2\pi c}\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|=\mu\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|=\mu\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right|. \tag{40,5}$$

По определению (39,10)

$$\frac{d\varepsilon_\perp}{dt}=\mu\frac{\partial H}{\partial t}+H\frac{\partial \mu}{\partial t}. \tag{40,6}$$

Сравнивая уравнения (40,5) и (40,6), мы видим, что при медленном изменении магнитного поля магнитный момент частицы остается постоянным:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}=0. \tag{40,7}$$

К аналогичному выводу можно прийти при рассмотрении движения частицы в стационарном магнитном поле, медленно изменяющемся от точки к точке.

Пусть магнитное поле направлено вдоль оси z и напряженность его увеличивается с ростом z. Линии поля сходятся, как это изображено на рис. 15. Мы будем считать, что на расстоянии $\sim R_C$ изменение магнитного поля мало, т. е.

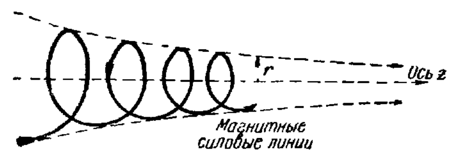


Рис. 15.

$$R_C\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right| \ll |H|. \tag{40,8}$$

Поскольку магнитное поле изменяется вдоль оси z, радиальная компонента поля H_r также отлична от нуля. Из уравнения непрерывности в цилиндрических координатах

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r)+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH_r)=-r\frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Интегрируя и пренебрегая при этом зависимостью $\frac{\partial H_z}{\partial z}$ от координаты r на окружности радиуса $r\sim R_C$, находим

$$H_r\approx-\frac{r}{2}\frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Поскольку при выполнении условия (40,8) компонента H_r мала по сравнению с компонентой H_z для всех $r<R_C$, можно

считать, что $|H| \approx H_z$, т. е. поле направлено под малым углом к оси z, и

$$H_r \approx -\frac{r}{2}\frac{\partial |H|}{\partial z}. \qquad (40,9)$$

Если компонента магнитного поля $H_r \neq 0$, то на частицу, движущуюся в плоскости (xy) по окружности с циклотронной частотой, действует сила в направлении оси z. Частица будет совершать дрейф в этом направлении, причем компонента v_z удовлетворяет уравнению движения

$$m\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{c}v_\perp H_r = -\frac{e}{2c}v_\perp R_C\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{e}{2c}R_C^2\omega_C\frac{\partial H}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H}{\partial z}. \qquad (40,10)$$

Отсюда обычным способом, умножая (40,10) на v_z, находим

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_z^2}{2} = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Поскольку полная энергия частицы сохраняется, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_z^2}{2} + \frac{mv_\perp^2}{2}\right) = 0;$$

отсюда получаем

$$\frac{d\varepsilon_\perp}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_\perp^2}{2}\right) = \mu\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (40,11)$$

Сравнивая (40,11) с (40,6), мы снова приходим к выводу о сохранении магнитного момента частицы:

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = 0.$$

Сохранение магнитного момента в медленно изменяющемся неоднородном магнитном поле приводит к весьма важным следствиям. Поскольку $\mu = \frac{\varepsilon_\perp}{H}$ и $R_C = \frac{cmv_\perp}{eH} = \frac{c}{eH}\sqrt{2m\varepsilon_\perp} \sim \frac{1}{\sqrt{H}}$, радиус окружностей, по которым движется частица, уменьшается в сторону возрастающих значений z (см. рис. 15).

Пусть θ_0 — угол, образуемый вектором скорости частицы с осью z в некоторой точке z_0, а θ — тот же угол в произвольной точке. Точка в точке $z = z_0$

$$\varepsilon_\perp = \frac{mv_\perp^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\sin^2\theta_0 = \mu H(z_0),$$

где $H(z_0)$ — значение магнитного поля в точке z_0. В некоторой

точке z напряженность поля равна $H(z)$ и

$$\varepsilon_\perp = \mu H(z) = \frac{mv_0^2}{2}\sin^2\theta.$$

Поэтому имеем

$$\sin\theta = \sin\theta_0\sqrt{\frac{H(z)}{H(z_0)}}.$$

При движении частицы вдоль оси z и увеличении напряженности поля угол θ возрастает. В точке z^*, где $\sqrt{\frac{H(z^*)}{H(z_0)}} \approx \frac{1}{\sin\theta_0}$, $\sin\theta = 1$ и $v_\perp = v_0$.

Это означает, что компонента скорости частицы v_z обращается в нуль. Дальше точки z^* частица двигаться не может и отражается в область $z < z^*$. Область $z \geqslant z^*$, непроницаемая для частиц с начальной скоростью $v_\perp = v_0\sin\theta_0$, называется магнитным зеркалом.

Отражение частиц от магнитного зеркала играет существенную роль в различных электронных устройствах. Э. Ферми была высказана идея об ускорении частиц в космических лучах в результате отражения от магнитных зеркал. Роль последних могут играть облака межзвездной материи. Если допустить, что в облаках межзвездной материи напряженность магнитного поля выше, чем в разделяющем их пространстве, то все частицы, заключенные между облаками, будут отражаться от них, как от магнитных зеркал. Предположим, что облака движутся навстречу друг другу со скоростями v. Заряженные частицы, сталкиваясь с движущимися облаками и отражаясь от них, изменяют скорость на $2v$ при каждом отражении. Расчеты показывают, что в космических условиях скорости частиц могут достигать огромных величин.

В заключение подчеркнем, что все полученные результаты относятся только к движению частиц со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света c. В ч. II будет рассмотрено движение со скоростями, сравнимыми со скоростью света c.

§ 41. Функции Лагранжа и функция Гамильтона частицы, движущейся в электромагнитном поле

Уравнения движения частицы в электромагнитном поле

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right) \tag{41,1}$$

могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа, если ввести функцию Лагранжа соотношением

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}. \tag{41,2}$$

Составим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0.$$

Очевидно, имеем для обобщенного импульса

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}. \quad (41,3)$$

Соответственно, обобщенная сила

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}\right)_{\boldsymbol{v}} = -e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}\,\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) = -e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}\,\{(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A} + [\boldsymbol{v}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}]\}.$$

При вычислении частной производной по координатам $\boldsymbol{v}$ считалась постоянной.

Подставляя найденные выражения в уравнения Лагранжа, находим

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) = -e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}],$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}] - e\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Однако полная производная по времени согласно (I, 7) будет

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A},$$

откуда

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\left\{-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi\right\} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}],$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right),$$

что совпадает с (41,1).

Напишем еще функцию Гамильтона для частицы:

$$H = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v} - L = \frac{\boldsymbol{P}}{m}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + e\varphi - \frac{e\boldsymbol{A}}{mc}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + e\varphi. \quad (41,4)$$

В случае системы независимых частиц функции Лагранжа и Гамильтона можно представить в виде

$$L = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum e_i \varphi_i + \sum \frac{e_i}{c} \mathbf{A}_i \mathbf{v}_i =$$
$$= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum e_i \varphi_i + \frac{1}{c} \sum \mathbf{j}_i \mathbf{A}_i \quad (41,5)$$

и, соответственно,

$$H = \sum \frac{1}{2m_i} \left(\mathbf{P}_i - \frac{e_i}{c} \mathbf{A}\right)^2 + \sum e_i \varphi_i, \quad (41,6)$$

где $\mathbf{A}_i$ и φ_i — значения потенциалов поля в месте нахождения i-й частицы; суммирование ведется по всем частицам системы

В дальнейшем нам понадобятся эти выражения для функции Лагранжа и Гамильтона.

Заметим, что если ввести в выражение для обобщенного импульса $\mathbf{P}_i$ вектор-потенциал в постоянном однородном магнитном поле по формуле (19,16), то

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{p}_i + \frac{e}{2c} [\mathbf{H}\mathbf{r}] \quad (41,7)$$

и соответственно

$$H = \sum \frac{1}{2m_i} \left(\mathbf{P}_i - \frac{e_i}{2c} [\mathbf{H}\mathbf{r}]\right)^2 + \sum e_i \varphi_i. \quad (41,8)$$

§ 42. Движение и излучение системы из двух заряженных частиц

До сих пор мы рассматривали движение частиц во внешних полях. Сейчас мы обсудим вопрос о движении заряженных частиц в поле, создаваемом другими частицами.

Рассмотрим прежде всего задачу о движении двух взаимодействующих заряженных частиц [1]).

Эту задачу можно решить, пользуясь методом последовательных приближений. Именно, считая потери энергии частиц на излучение малыми, можно в первом приближении рассчитать траектории частиц. Зная последние, можно затем найти излучение системы.

---

[1]) В дальнейшем мы ограничимся кратким изложением проблемы, поскольку она является частным случаем задачи двух тел, рассматриваемой подробно в курсах классической механики. Детальное изложение этого и других вопросов, затрагиваемых в данном параграфе, можно найти в книгах: Л Д. Ландау и Е М Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958, и Т. Голдстейн, Классическая механика, Гостехиздат, 1957.

Пусть заряженные частицы имеют массы m_1 и m_2; заряды их равны e_1 и e_2. Потенциальную энергию системы можно записать в виде

$$U = e_1\varphi(r),$$

где $\varphi(r)$ — потенциал поля, создаваемого зарядом e_2, находящимся на расстоянии r от заряда e_1.

Функцию Лагранжа системы можно записать в виде

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - e_1\varphi(r), \tag{42,1}$$

где $\boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{r}}_1$; $\boldsymbol{v}_2 = \dot{\boldsymbol{r}}_2$; $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы, проведенные к частицам из произвольного начала координат.

Поскольку потенциальная энергия зависит только от расстояния между зарядами, т. е. $U = U(|\boldsymbol{r}|)$, где

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \tag{42,2}$$

удобно перейти к системе координат центра инерции.

Именно, поместим начало координат в центр инерции — точку пространства, радиус-вектор которой по отношению к произвольной системе координат выражается формулой

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{42,3}$$

Из (42,2) и (42,3) находим

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}$$

и, соответственно, скорости частиц

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{R} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{R}}, \\ \boldsymbol{v}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{R}} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{R}, \end{aligned}\right\} \tag{42,4}$$

где $v_0 = \dot{\boldsymbol{r}}$ — относительная скорость частиц и $\dot{\boldsymbol{R}}$ — скорость центра инерции.

Подставляя значение скоростей в функцию Лагранжа, находим

$$L = \frac{M}{2}(\dot{\boldsymbol{R}})^2 + \frac{\mu}{2}(\dot{\boldsymbol{r}})^2 - U(|\boldsymbol{r}|), \tag{42,5}$$

где $M = m_1 + m_2$ — масса системы, а величина

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{42,6}$$

называется приведенной массой.

Координаты центра инерции $\boldsymbol{R}$ являются циклическими. Соответствующий обобщенный импульс сохраняется:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = (m_1 + m_2)\,\dot{\boldsymbol{R}} = \text{const}. \qquad (42{,}7)$$

Центр инерции движется с постоянной скоростью (в частности, он может оставаться неподвижным).

Для исследования относительного движения зарядов введем координаты, начало которых помещено в центр инерции. Поскольку потенциальная энергия взаимодействия зависит только от расстояния r, поле имеет сферическую симметрию. Координата, отвечающая произвольному повороту системы, является циклической. Это означает, что имеет место закон сохранения момента:

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}] = \text{const}. \qquad (42{,}8)$$

Умножая последнее выражение скалярно на радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, имеем

$$(\boldsymbol{L}\boldsymbol{r}) = 0,$$

так что движение происходит в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{L}$.

Выбирая направление вектора $\boldsymbol{L}$ за ось z и плоскость, в которой происходит движение, за плоскость $z = 0$, можно ввести полярные координаты r, ψ и переписать лагранжиан, относящийся к относительному движению, в виде

$$L_{\text{отн}} = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2\right) - e_1\varphi(r). \qquad (42{,}9)$$

Лагранжиан $L_{\text{отн}}$ формально совпадает с лагранжианом одной частицы, имеющей массу μ и движущейся во внешнем поле сил $e_1\varphi$. Координата ψ является циклической, и ей отвечает обобщенный импульс

$$p_\psi = \mu r^2\dot{\psi} = \text{const}. \qquad (42{,}10)$$

Вычисляя в полярных координатах L_z, имеем, очевидно,

$$L_z = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}]_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r^2\dot{\psi}, \qquad (42{,}11)$$

так что равенство

$$p_\psi = L_z = \text{const} = L$$

выражает закон сохранения момента.

Поскольку функция Лагранжа не зависит от времени, имеет место закон сохранения энергии:

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2\right) + e_1\varphi(r) = \text{const}. \qquad (42{,}12)$$

Выражая из (42,11) $\dot\varphi$ через L_z, находим

$$E = \frac{\mu \dot r^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + e_1\varphi = \frac{\mu \dot r^2}{2} + V(r), \qquad (42,12')$$

где величина $V(r)$, именуемая эффективной или центробежной потенциальной энергией, равна

$$V(r) = e_1\varphi(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \qquad (42,13)$$

Энергия (42,12′) формально совпадает с энергией частицы, совершающей одномерное движение в поле с потенциальной энергией $V(r)$.

Характер относительного движения заряженных частиц определяется видом функции $\varphi(r)$.

Мы рассмотрим здесь случай разноименно заряженных частиц. При этом

$$\varphi = -\frac{e_2}{r}, \qquad (42,14)$$

где e_2 — заряд второй частицы.

Ход центробежной энергии для этого случая изображен на рис. 16. Пунктиром на том же рисунке показан ход кривых $-\frac{e_1e_2}{r}$ и $\frac{L^2}{2\mu r^2}$. Прямая $E=0$ также показана пунктиром. Ход кривой $V(r)$ и положение точки минимума зависят от величины момента L.

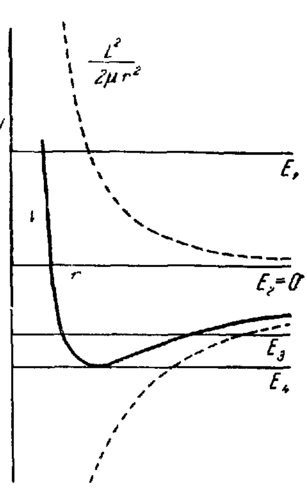


Рис. 16.

Переписав формулу (42,12′) в виде

$$\dot r^2 = \frac{2}{\mu}(E - V(r)), \qquad (42,15)$$

мы видим, что допустимая область относительного движения частиц зависит от взаимоотношения между E и $V(r)$. Области, в которых $V(r) > E$, являются запрещенными; области, где $E > V(r)$ — допустимыми. Если существуют корни уравнения

$$E = V(r), \qquad (42,16)$$

то они определяют точки остановки или апсидальные точки r_0, в которых радиальная скорость обращается в нуль. Если $E \geqslant 0$, то дозволенная область движения простирается от бесконечно удаленной области $r \to \infty$ до точки остановки, отвечающей минимальному расстоянию между частицами и определяемой пересечением прямой E с кривой $V(r)$.

Если $E < 0$, то имеются две точки остановки, отвечающие наименьшему и наибольшему расстояниям между зарядами. Движение совершается между этими точками.

Для нахождения траектории следует исключить время из (42,12) и (42,11).

Тогда имеем

$$d\psi = \frac{L}{\mu r^2}\,dt = \frac{L}{\mu r^2}\,\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - e_1\varphi(r)\right) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}}.$$

Интегрируя, находим

$$\psi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{L^2}\left(E - e_1\varphi\right) - \frac{1}{r^2}}} - \psi_0. \qquad (42,17)$$

В частности, при движении в кулоновском поле притяжения подстановка $\varphi(r)$ из (42,14) дает

$$\psi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{L^2}\left(E + \frac{e_1e_2}{r}\right) - \frac{1}{r^2}}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2e_1e_2\mu}{L^2}u - u^2}} =$$

$$= -\arccos \frac{\frac{L^2u}{e_1e_2\mu} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(e_1e_2)^2}}} - \psi_0,$$

где было обозначено

$$u = \frac{1}{r}.$$

Обращая arccos, находим уравнение траектории

$$\left(\frac{L^2}{\mu e_1e_2}\right)\frac{1}{r} = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(e_1e_2)^2}}\cos(\psi + \psi_0)\right]. \qquad (42,18)$$

Сравнивая последнюю формулу с общим уравнением конических сечений

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos(\psi + \psi_0),$$

где ε — эксцентриситет, мы видим, что движение зарядов происходит по коническому сечению с эксцентриситетом

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu(e_1e_2)^2}}. \qquad (42,19)$$

Параметр конического сечения $p = \frac{L^2}{\mu e_1e_2}$. В зависимости от знака E имеем

$E > 0$, $\varepsilon > 1$ — гипербола,
$E = 0$, $\varepsilon = 1$ — парабола,
$E < 0$, $\varepsilon < 1$ — эллипс,
$E = -\frac{\mu(e_1e_2)^2}{2L^2}$, $\varepsilon = 0$ — окружность.

Найденное решение (42,18) определяет движение каждой из частиц. Именно, частицы движутся по траекториям, представляющим конические сечения с фокусом, находящимся в центре инерции системы.

Найденное решение не отличается от соответствующего решения кеплеровой задачи о движении планет. Значения характерных величин конических сечений приведены в цитированных руководствах по механике.

Найдем теперь излучение системы двух зарядов. Мы ограничимся здесь случаем периодического движения, т. е. случаем притяжения при $E < 0$. Энергия, излучаемая за период T, согласно (27,9) и (28,11), равна

$$-(\Delta E)_T = \frac{2}{3c^3}\int (\ddot{\mathbf{d}})^2\,dt = \frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \int_0^T F^2\,dt,$$

где

$$\mathbf{F} = \frac{e_1e_2}{r^3}\mathbf{r}.$$

Вместо интегрирования по периоду, можно с помощью (42,11) интегрировать по углу ψ. Выражая r через ψ по формуле (42,11), получаем

$$-(\Delta E)_T = \frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 (e_1e_2)^2 \int \frac{dt}{r^4} =$$

$$= \frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 (e_1e_2)^2 \frac{\mu}{L}\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{r^2} =$$

$$= \frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{(e_1e_2\mu)^4}{\mu L^5}\int_0^{2\pi} [1+\varepsilon\cos(\psi+\psi_0)]^2\,d\psi =$$

$$= \frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{(e_1e_2\mu)^4\pi}{\mu L^5}(2+\varepsilon^2). \qquad (42,20)$$

Таким образом, заряд, движущийся по замкнутой орбите, непрерывно излучает энергию. В частности, при движении по круговой орбите $\varepsilon = 0$, $L^2 = -\frac{\mu(e_1e_2)^2}{2E}$, и формула (42,20) приобретает более простой вид:

$$-(\Delta E)_T = \frac{16\pi\sqrt{2\mu}}{3c^3e_1e_2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 |E|^{5/2}. \qquad (42,21)$$

Потеря энергии на излучение приводит к тому, что круговая орбита превращается в свертывающуюся спираль.

Числовой расчет показывает, что система «электрон, обращающийся вокруг протона», высвечивает свою энергию за время $T \approx 10$ *сек* при линейных размерах орбиты $\sim 10^{-8}$ *см*.

Мы видим, что планетарная модель атома коренным образом противоречит законам классической электродинамики. Впоследствии при изложении квантовой механики будет выяснена причина этого противоречия. Оказывается, что нестабильность планетарной модели атома является иллюстрацией общего положения о неприменимости законов классической механики и классической электродинамики к рассмотрению внутриатомных явлений.

§ 43. Рассеяние частиц и излучение при рассеянии

Рассмотрим теперь процессы, возникающие при пролете частиц, отталкивающихся друг от друга или притягивающихся, но обладающих энергией $E > 0$. Из общих соображений, связанных с ходом кривой $V(r)$ (см. рис. 16), ясно, что в обоих этих случаях движение будет происходить по незамкнутой орбите.

Будем для наглядности считать, что одна из заряженных частиц неподвижна относительно лабораторной системы координат. Мы будем называть ее рассеивателем. Другая частица, именуемая рассеиваемой, движется относительно первой. На достаточно большом расстоянии, когда взаимодействием частиц можно пренебречь, движение падающей частицы является прямолинейным. Скорость этого движения v_0 будем считать заданной. При сближении частиц происходит отклонение падающей частицы от прямолинейного полета, а частица, ранее неподвижная, получает импульс и приходит в движение.

Тогда говорят, что произошло столкновение частиц, в результате которого возникло взаимное их рассеяние.

По причинам, которые будут особенно ясны из дальнейшего, изучение процесса рассеяния может дать важнейшую информацию о характере взаимодействия между частицами.

Изучение процессов рассеяния является в настоящее время основным экспериментальным методом ядерной физики. Исследование взаимодействия частиц, например, быстрых электронов или протонов с ядрами, обычно осуществляется следующим путем: пучок частиц, имеющих определенные свойства и известную скорость, падает на образец вещества, содержащий частицы другого сорта. Наблюдая пучок рассеиваемых частиц, можно сделать заключение о характере взаимодействия, которое привело к рассеянию.

При такой постановке опытов рассеяние имеет характер массового процесса. Наблюдается поведение пучка, обычно содержащего огромное число частиц. Однако в основе процесса ле-

жит индивидуальное взаимодействие между рассеиваемой и рассеивающей частицами. Поэтому процесс рассеяния необходимо характеризовать величиной, не зависящей ни от свойств падающего пучка, ни от свойств материала рассеивателя, например, его плотности, но определяемой исключительно взаимодействием одной рассеиваемой и одной рассеивающей частиц.

Будем характеризовать падающий пучок его интенсивностью или плотностью потока частиц $I_0 = nv_0$, где n — число частиц в единице объема пучка, а v_0 — их скорость; I_0 равно, очевидно, числу частиц, проходящих через 1 $см^2$ сечения пучка в 1 секунду.

Выберем положение рассеивающей частицы за начало координат. Пусть через площадку, видимую из рассеивающего центра под телесным углом $d\Omega$, проходит в единицу времени dN рассеянных частиц. Определим основную величину, характеризующую процесс рассеяния — дифференциальное эффективное сечение рассеяния $d\sigma$, как отношение

$$d\sigma = \frac{dN}{I_0}. \qquad (43,1)$$

Эффективное сечение имеет, очевидно, размерность площади. Тогда число частиц пучка, рассеянных в угол $d\Omega$ за время dt объемом рассеивателя V, равно

$$dN_{\text{полн}} = d\sigma I_0 \rho V\, dt, \qquad (43,2)$$

где ρ — плотность числа частиц (ρV — полное число рассеивающих частиц).

Если рассеяние происходит без изменения энергии рассеиваемых частиц, то, умножая числитель и знаменатель (43,1) на энергию ε частицы, может представить дифференциальное сечение в виде

$$d\sigma = \frac{dI}{I_{0\varepsilon}}, \qquad (43.3)$$

где dI — поток энергии, переносимой частицами в единицу времени в телесном угле $d\Omega$, $I_{0\varepsilon}$ — плотность потока энергии в падающем пучке. Формула (43,3) совпадает с определением сечения, данным в § 36.

Наряду с дифференциальным эффективным сечением, рассеяние характеризуют также полным сечением

$$\sigma = \int d\sigma, \qquad (43,4)$$

где интегрирование ведется по всем возможным значениям телесного угла.

Величину $d\sigma$, выражающуюся через непосредственно измеряемые величины, можно связать с параметрами, характеризующими индивидуальный процесс столкновения.

Рассмотрим индивидуальный акт столкновения между двумя частицами. Мы ограничимся случаем, когда внутренняя энергия частиц остается неизменной. Такие столкновения называются упругими. Не следует думать, что при упругих столкновениях энергия рассеянной частицы остается неизменной. Рассеивающая частица получает от рассеянной некоторый импульс и энергию, величина которых зависит от соотношения между массами частиц.

При неупругих столкновениях, например, столкновении электрона с ионом, происходит дополнительная передача энергии иону, внутреннее состояние которого изменяется. Такие процессы более сложны и будут рассмотрены в ч. V.

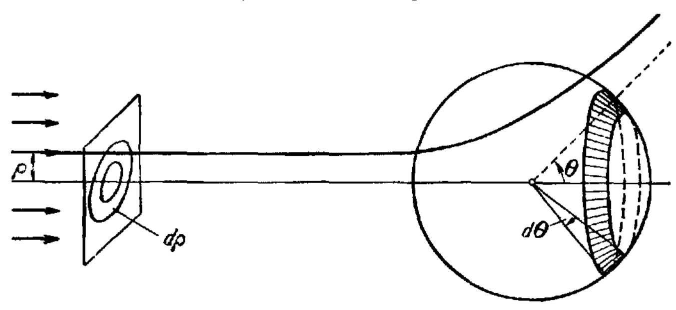


Рис. 17.

Сначала будем относить процесс рассеяния двух частиц к системе центра инерции. Согласно результатам предыдущего параграфа, задача об относительном движении частиц в системе центра инерции сводится к задаче о движении одной частицы с приведенной массой μ относительно неподвижного силового центра, помещенного в центре инерции.

Пусть падающая частица вдали от центра инерции движется прямолинейно со скоростью v_0. Ее энергия и момент соответственно равны

$$E=\frac{\mu v_0^2}{2}; \quad L=\mu v_0\rho=\rho\sqrt{2\mu E}, \tag{43,5}$$

где ρ — расстояние между силовым центром и прямой, по которой прошла бы мимо него частица, если бы взаимодействие отсутствовало. Величина ρ называется прицельным параметром, или прицельным расстоянием.

При заданных значениях E и ρ траектория полностью определена. Процесс рассеяния мы будем характеризовать углом рассеяния (отклонения) θ, представляющим угол между направлением полета частицы вдали от центра до и после рассеяния (рис. 17). Очевидно (рис. 18), что угол θ дополняет угол φ_0 ме-

жду асимптотами к траектории до 180°. В силу симметрии силового поля и картины движения относительно оси пучка, число рассеянных частиц, а вместе с ним и эффективное сечение рассеяния зависят только от угла θ, но не от азимутального угла.

Телесный угол $d\Omega$ можно поэтому представить в виде

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta,$$

а число частиц, рассеянных в телесный угол $d\Omega$, соответственно равно

$$dN = 2\pi I_0 \sigma(\theta) \sin\theta \, d\theta = I_0 \, d\sigma, \qquad (13,6)$$

где обозначено

$$d\sigma = 2\pi\sigma(\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

Поскольку траектория рассеянной частицы однозначно определяется энергией и прицельным параметром (E и ρ), каждому углу рассеяния отвечает траектория с определенным значением прицельного параметра. Отсюда следует, что число частиц, рассеянных на данный угол θ, равно числу частиц, имевших на бесконечно большом удалении от центра данное значение прицельного параметра.

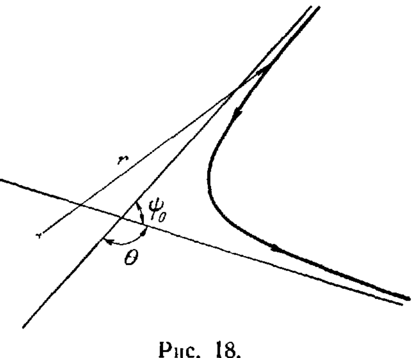


Рис. 18.

Иными словами, в телесный угол $d\Omega$ рассеиваются все частицы, имевшие вдали от центра значение прицельного параметра ρ, лежащего в интервале ρ, $\rho + d\rho$. Поэтому число рассеянных частиц наряду с (43,6) можно написать в виде

$$dN = I_0 2\pi\rho \, d\rho. \qquad (43,7)$$

где $2\pi\rho \, d\rho$ — площадь кольца, изображенного на рис. 17 слева.

Сравнивая (43,6) и (43,7), находим

$$\sigma(\theta) = \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|. \qquad (43,8)$$

Поскольку большим значениям ρ отвечают малые отклонения θ, а сечение по смыслу должно быть величиной положительной, мы написали знак абсолютного значения при производной. Интегрируя формулу (43,8) слева по углам рассеяния в интервале от θ до π, а справа по соответствующим значениям ρ, т. е.

в интервале от $\rho(\theta)$ до нуля, получаем важное соотношение

$$\frac{\rho^2}{2} = \int_{\theta}^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta \, d\theta. \tag{43,9}$$

Для вычисления дифференциального эффективного сечения необходимо установить связь между прицельным параметром ρ и углом рассеяния θ. Для этого достаточно рассчитать траекторию и найти зависимость угла ψ_0 между асимптотами от параметра ρ.

Общая формула (42,17) дает

$$\psi_0 = \int \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} = \rho\sqrt{2\mu E} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2\mu(E - V(r))}} =$$

$$= \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2}\left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) - \frac{1}{r^2}}}. \tag{43,10}$$

Пределы интеграла определяются из следующих соображений: ψ_0 представляет изменение угла ψ при пролете частицы по всей траектории. Траектория имеет две ветви — приближение частицы от бесконечности до точки наибольшего приближения (точки остановки) r_0 и удаление от точки r_0 до бесконечности (см. рис. 18). Траектория частицы всегда симметрична относительно точки остановки r_0. Это следует из обратимости процесса рассеяния — частица, движущаяся в обратном направлении, должна уйти по той асимптоте, по которой движется частица в прямом направлении (см. рис. 18). Поэтому интеграл по траектории можно написать в виде суммы двух равных интегралов, взятых в пределах от r_0 до бесконечности:

$$\psi_0 = 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2}\left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) - \frac{1}{r^2}}}, \tag{43,11}$$

где r_0 — корень уравнения

$$E = V(r_0) = U(r_0) + \frac{\rho^2 E}{r_0^2}. \tag{43,12}$$

Поскольку угол рассеяния $\theta = \pi - \psi_0$, формулы (43,11) и (43,12) связывают искомое значение θ с параметрами столкновения — величинами E и ρ при произвольном виде потенциальной энергии U, зависящей только от расстояния r.

Рассмотрим, в частности, случай кулоновского отталкивания

$$U = \frac{|e_1 e_2|}{r}.$$

Выражения (43,11) и (43,12) приобретают при этом вид

$$E = \frac{|e_1 e_2|}{r_0} + \frac{\rho^2 E}{r_0^2}, \tag{43,13}$$

или

$$\frac{1}{r_0} = -\frac{|e_1 e_2|}{2E\rho^2} + \sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2E\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}} \tag{43,14}$$

и

$$\psi_0 = 2\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2}\left(1 - \frac{|e_1 e_2|}{Er}\right) - \frac{1}{r^2}}}. \tag{43,15}$$

Вводя новую переменную $z = \frac{1}{r}$, получаем

$$\psi_0 = 2\int\limits_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{|e_1 e_2|}{\rho^2 E} z - z^2}} = -2\arccos \frac{\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E} + z}{\sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}}}\Bigg|_0^{z_0} =$$

$$= 2\arccos \frac{\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}}{\sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}}}. \tag{43,16}$$

При вычислении подставлено значение $z_0 = \frac{1}{r_0}$ из выражения (43,14). Обращая arccos, находим

$$\cos\frac{\psi_0}{2} = \frac{\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}}{\sqrt{\left(\frac{|e_1 e_2|}{2\rho^2 E}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}}},$$

или

$$\rho = \frac{|e_1 e_2|}{2E}\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2} = \frac{|e_1 e_2|}{2E}\operatorname{tg}\frac{\pi - \theta}{2} = \frac{|e_1 e_2|}{2E}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{43,17}$$

Формула (43,17) дает искомую связь между ρ и θ. Подставляя значение ρ в (43,8), имеем

$$\sigma(\theta) = \frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \frac{1}{16}\,\frac{(e_1 e_2)^2}{E^2}\,\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{43,18}$$

Формула (43,18) дает дифференциальное сечение рассеяния частиц, отталкивающихся по закону Кулона. Поскольку $\sigma \sim (e_1 e_2)^2$, ясно, что в случае притяжения (при $E > 0$) получается идентичный результат. Найденное выражение для сечения носит название формулы Резерфорда. Она была получена в связи

с опытами по рассеянию α-частиц на атомах, позволившими Резерфорду установить ядерную структуру атомов.

Формулу (43,11) можно обратить и найти вид функции $U(r)$ с помощью известных из опытных данных величин. Для этого нужно рассматривать (43,11) как интегральное уравнение относительно неизвестной функции $U(r)$. При некоторых (весьма общих) допущениях о виде функции $U(r)$ уравнение (43,11) допускает решение[1]).

Именно, запишем θ в виде

$$\theta = \pi - \psi_0 = \pi - \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{2\rho\, dr}{r\sqrt{\left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) r^2 - \rho^2}}. \tag{43,19}$$

Относительно $U(r)$ мы будем предполагать, что она убывает с ростом r при $r \to \infty$. Введем новую функцию

$$E(r) = \left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) r^2, \tag{43,20}$$

и перейдем от интегрирования по r к интегрированию по F. Так как

$$2\frac{dr}{r} = 2d\ln r = \frac{d\ln r^2}{dF}\, dF$$

и, в силу (43,12),

$$F(r_0) = \left(1 - \frac{U(r_0)}{E}\right) r_0^2 = \rho^2, \tag{43,21}$$

то

$$\theta = \pi - \int\limits_{\rho^2}^{\infty} \frac{\rho \frac{d\ln r^2}{dF}\, dF}{\sqrt{F - \rho^2}}. \tag{43,22}$$

Написав

$$\frac{d\ln r^2}{dF} \equiv \frac{d}{dF}\ln\left(\frac{r^2}{F}\right) + \frac{d\ln F}{dF},$$

находим

$$\theta = \pi + \int\limits_{\rho^2}^{\infty} \frac{\rho \frac{d}{dF}\ln\left(\frac{F}{r^2}\right) dF}{\sqrt{F - \rho^2}} - \int\limits_{\rho^2}^{\infty} \frac{\rho \frac{d\ln F}{dF}\, dF}{\sqrt{F - \rho^2}}.$$

Последний интеграл легко вычисляется, так как

$$\int\limits_{\rho^2}^{\infty} \frac{dF}{F\sqrt{F - \rho^2}} = \frac{2}{\rho}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{F - \rho^2}}{\rho}\Bigg|_{\rho^2}^{\infty} = \frac{\pi}{\rho}.$$

[1]) Мы следуем работе О. Б. Фирсова, ЖЭТФ, 24, 279, 1953.

Поэтому

$$\theta=\int_{\rho^2}^{\infty}\rho\frac{d\ln\frac{F'}{r^2}}{dF'}\frac{dF'}{\sqrt{F'-\rho^2}}. \tag{43,23}$$

Умножим обе части (43,23) на множитель $\frac{1}{\sqrt{\rho^2-F}}$ и проинтегрируем по параметру ρ в пределах от $\rho=\sqrt{F}$ до $\rho\to\infty$. Тогда имеем

$$\int_{\sqrt{F}}^{\infty}\frac{\theta(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-F}}=\int_{\sqrt{F}}^{\infty}\rho\,d\rho\int_{\rho^2}^{\infty}\frac{d\ln\left(\frac{F'}{r^2}\right)}{dF'}\frac{dF'}{\sqrt{(\rho^2-F)(F'-\rho^2)}}.$$

Изменим порядок интегрирования по ρ и по F', написав

$$\int_{\sqrt{F}}^{\infty}\rho\,d\rho\int_{\rho^2}^{\infty}\frac{\frac{d\ln\left(\frac{F'}{r^2}\right)}{dF'}dF'}{\sqrt{(\rho^2-F)(F'-\rho^2)}}=$$

$$=\int_{\sqrt{F}}^{\infty}\frac{d\ln\left(\frac{F'}{r^2}\right)}{dF'}dE'\int_{\sqrt{F'}}^{\sqrt{F}}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{-\rho^4+\rho^2(F+F')-FF'}}.$$

Далее,

$$\frac{1}{2}\int_{F'}^{F}\frac{d\rho^2}{\sqrt{-\rho^4+\rho^2(F+F')-FF'}}=\frac{1}{2}\arccos\frac{(F+F')-\rho^2}{\sqrt{(F+F')^2-4FF'}}\Bigg|_{F'}^{F}=\frac{\pi}{2}.$$

То обстоятельство, что в результате интегрирования по ρ получился интеграл, не зависящий от F', позволяет свести интегрирование по F' к элементарному преобразованию. Для получения более прозрачного результата прежде, чем сделать подстановку пределов, вернемся к переменной r, написав

$$\int_{\sqrt{F}}^{\infty}\frac{d}{dF'}\ln\left(\frac{F'}{r^2}\right)dF'=\int_{r}^{\infty}\frac{d}{dr'}\ln\left(\frac{F'}{(r')^2}\right)dr'=$$

$$=\ln\left(1-\frac{U(r')}{E}\right)\Bigg|_{r}^{\infty}=-\ln\left(1-\frac{U(r)}{E}\right)=-\ln\frac{F}{r^2}.$$

При этом согласно сделанному выше допущению мы положили $U\to 0$ при $r\to\infty$.

В итоге приходим к равенству

$$\pi \ln \frac{\sqrt{F}}{r} = -\int\limits_{\sqrt{F}}^{\infty} \frac{\theta(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - F}}, \qquad (43,24)$$

или

$$\frac{\sqrt{F}}{r} = \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sqrt{F}}^{\infty} \frac{\theta(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - F}}\right\}. \qquad (43,25)$$

Последнее выражение содержит интегрирование только по ρ. Если известна зависимость $\sigma(\theta)$, в силу (43,17) задана также функциональная зависимость $\theta(\rho)$. Поэтому формула (43,25) представляет задание функции $F(r)$ в неявном виде.

Особенно простой результат получается для рассеяния частиц с большой энергией, для которых $U(r) \ll E$ при всех значениях r При этом формулу (43,24) можно переписать, воспользовавшись равенствами

$$\ln \frac{\sqrt{F}}{r} = \ln \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) r^2}}{r} \approx -\frac{U(r)}{2E},$$

$$\int\limits_{\sqrt{F}}^{\infty} \frac{\theta(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - F}} = \int\limits_{\sqrt{\left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) r^2}}^{\infty} \frac{\theta(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \left(1 - \frac{U(r)}{E}\right) r^2}} \approx \int\limits_{r}^{\infty} \frac{\theta(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}.$$

Тогда для искомой потенциальной энергии находим

$$U(r) \approx \frac{2E}{\pi} \int\limits_{r}^{\infty} \frac{\theta(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}. \qquad (43,26)$$

Приведенные выше расчеты эффективного сечения рассеяния были выполнены в системе координат центра инерции. Для практического их использования необходимо осуществить переход к лабораторной системе отсчета.

Важность этого перехода видна из сравнения общей картины процесса рассеяния с точки зрения обеих координатных систем. В системе центра инерции каждая из частиц, падающая и рассеивающая, движутся по траектории, определяемой формулой (43,10). Из равенства нулю полного импульса системы из двух частиц, отнесенного к координатам центра инерции, следует, что обе частицы движутся в противоположных направлениях с равными импульсами (рис. 19). Наоборот, с точки зрения лабораторной системы падающая и рассеивающая частицы неэквива-

лентны. До столкновения рассеивающая частица была неподвижна, после столкновения она приходит в движение (рис. 20).

Нашей задачей является установление связи между углами $\theta_{\text{ц и}} = \Theta$ и $\theta_{\text{л}} = \vartheta$. Для этого совместим на одном рисунке скорости рассеянной частицы после соударения в обеих системах

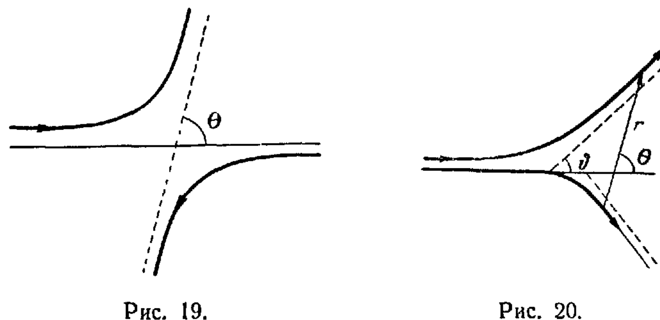


Рис. 19. Рис. 20.

координат — центра инерции $(\boldsymbol{v}'_{\text{ц. и.}})$ и лабораторной $(\boldsymbol{v}'_{\text{л}} = \boldsymbol{v})$. Очевидно, что имеют место равенства (42,4) и (42,7). Вектор $\dot{\boldsymbol{R}}$ совпадает с направлением полета падающей частицы. Поэтому искомые углы равны соответственно (рис. 21)

$$\theta_{\text{ц. и}} = \angle(\boldsymbol{v}'_{\text{ц. и}}, \dot{\boldsymbol{R}}),$$
$$\theta_{\text{л}} = \angle(\boldsymbol{v}'_{\text{л}}, \dot{\boldsymbol{R}}), \qquad (43{,}27)$$

Рис. 21.

где штрих означает, что значения скорости берутся после столкновения и имеющийся в (42,4) индекс 1 нами для краткости опущен.

Из рис. 21 ясно, что

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{л}} = \frac{v'_{\text{ц. и}} \sin \theta_{\text{ц. и}}}{v'_{\text{ц и}} \cos \theta_{\text{ц. и}} + |\dot{\boldsymbol{R}}|}. \qquad (43{,}28)$$

Согласно (42,4) и (42,7) можем написать

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{v}_0,$$
$$\boldsymbol{v}'_{\text{ц. и}} = \frac{\mu}{m_1} \boldsymbol{v}_0.$$

Подставляя в (43,28), имеем

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{л}} = \frac{\sin \theta_{\text{ц. и}}}{\cos \theta_{\text{ц. и}} + \frac{m_1}{m_2}}. \qquad (43{,}29)$$

Формула (43,29) устанавливает[1]) связь между углами $\theta_{ц.и}$ и $\theta_л$.

Заметим, что если масса рассеивающей частицы $m_2 \gg m_1$, то $\theta_л \approx \theta_{ц.и}$. Смысл этого результата очевиден — очень тяжелая частица не получает импульса от пролетающей и остается неподвижной: система центра инерции совпадает с лабораторной.

Зная связь между углами рассеяния в лабораторной системе и системе центра инерции, можно выразить соответствующие эффективные сечения друг через друга. Именно, написав число частиц, рассеянных в телесном угле $d\Omega_л$ и $d\Omega_{ц.и}$ в двух системах координат,

$$dN = 2\pi I_0 \sigma_л(\theta_л) \sin\theta_л \, d\theta_л,$$
$$dN = 2\pi I_0 \sigma_{ц.и}(\theta_{ц.и}) \sin\theta_{ц.и} \, d\theta_{ц.и},$$

находим искомую связь между сечением в системах координат — в лабораторной ($\sigma_л$) и центра инерции ($\sigma_{ц.и}$):

$$\sigma_л(\theta_л) = \sigma_{ц.и}(\theta_{ц.и}) \frac{\sin\theta_{ц.и} \, d\theta_{ц.и}}{\sin\theta_л \, d\theta_л}. \qquad (43,30)$$

Полное сечение, в отличие от дифференциального, является одним и тем же во всех координатных системах:

$$\sigma = 2\pi \int \sigma_л(\theta_л) \sin\theta_л \, d\theta_л = 2\pi \int \sigma_{ц.и}(\theta_{ц.и}) \sin\theta_{ц.и} \, d\theta_{ц.и}. \qquad (43,31)$$

Остановимся еще на вычислении энергии, теряемой рассеиваемой частицей. Из того же рис. 21 на основании теоремы косинусов можем написать

$$(v'_{ц.и})^2 = (v'_л)^2 + \dot{R}^2 - 2\dot{R}(v'_л)\cos\theta_л. \qquad (43,32)$$

Подставляя значения $\dot{R}$ и $v'_{ц.и}$ и обозначив энергии рассеиваемой частицы, отнесенные к лабораторной системе координат до и после соударения, соответственно через E_1 и E'_1, находим

$$\frac{E'_1}{E_1} - \frac{2\mu}{m_2} \frac{\sqrt{E'_1}}{\sqrt{E_1}} \cos\theta_л - \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = 0. \qquad (43,33)$$

Уравнение (43,33) определяет зависимость E'_1 от угла рассеяния $\theta_л$ и масс частиц. Наибольшая потеря энергии имеет место при $m_1 = m_2$ и $\theta_л = \frac{\pi}{2}$ (при этом $\theta_{ц.и} = \pi$). В этом случае $E'_1 = 0$ и энергия полностью передается рассеивающей частице.

[1]) Подчеркнем, что это относится только к упругим столкновениям, так как при таких столкновениях относительная скорость до и после столкновения имеет значение v_0.

Мы не останавливаемся на некоторых деталях теории рассеяния, изложение которых имеется в цитированных руководствах.

Перейдем теперь к расчету излучения, возникающего при пролете пучка заряженных частиц мимо неподвижных зарядов. Это явление, называемое тормозным излучением, служит для получения рентгеновских лучей (со сплошным спектром) и играет важную роль в механизме торможения частиц высоких энергий, движущихся в веществе.

Поскольку основной интерес представляют именно частицы высоких энергий, мы ограничимся этим случаем.

При достаточно большой энергии летящей частицы угол рассеяния ее мал, если исключить маловероятные процессы лобового соударения. Считая траекторию почти прямолинейной, можно упростить соответствующие формулы.

Рассмотрим прежде излучение одной частицы. Поместив начало координат в рассеивающий центр, можно написать следующее выражение для компонент сил, действующих на пролетающую частицу:

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{r^3} x, \quad F_y = \frac{e_1 e_2}{r^3} y. \tag{43,34}$$

Поскольку движение происходит в плоскости (x, y), компонента силы F_z отсутствует.

Считая, что скорость движения частицы постоянна и не изменяется при рассеянии, а отклонение от прямолинейной траектории мало[1]), можно в формулах для компонент силы положить

$$x \approx vt, \quad y \approx \rho, \quad dt \approx \frac{dx}{v}. \tag{43,35}$$

Энергия, излучаемая частицей в телесный угол $d\Omega$ при пролете мимо рассеивающего центра, находится интегрированием формулы (28,11) (в которой нужно положить $m_2 \to \infty$) по времени пролета. С учетом (43,35) имеем

$$-\Delta E\, d\Omega = \int dI\, dt = \frac{1}{4\pi c^3}\, d\Omega \int [\ddot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}]^2\, dt = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{e_1^2}{v m_1^2}\, d\Omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\boldsymbol{F}\boldsymbol{n}]^2\, dx.$$

Распишем выражение $[\boldsymbol{F}\boldsymbol{n}]^2$. Имеем

$$[\boldsymbol{F}\boldsymbol{n}]^2 = F^2 - (\boldsymbol{F}\boldsymbol{n})^2 = F_x^2 + F_y^2 - (F_x n_x + F_y n_y)^2 =$$
$$= (1 - n_x^2) F_x^2 + (1 - n_y^2) F_y^2 - 2 F_x F_y n_x n_y,$$

где n_x и n_y — компоненты единичного вектора $\boldsymbol{n}$ в направлении телесного угла $d\Omega$.

[1]) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958, стр. 73.

Нам следует теперь вычислить три интеграла. Первый из них —

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_x^2\,dx = e_1^2e_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{r^6}\,dx = 2e_1^2e_2^2\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+\rho^2)^3}.$$

Полагая $\frac{x}{\rho}=\operatorname{tg}\varphi$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_x^2\,dx = 2e_1^2e_2^2\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+\rho^2)^3} = 2\frac{e_1^2e_2^2}{\rho^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(\operatorname{tg}^2\varphi+1)^3}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{2e_1^2e_2^2}{\rho^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{e_1^2e_2^2}{2\rho^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi e_1^2e_2^2}{8\rho^3}.$$

Аналогично вычисляются второй и третий интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_y^2\,dx = 2e_1^2e_2^2\rho^2\int_0^{\infty}\frac{dx}{r^6} = \frac{3e_1^2e_2^2\pi}{8\rho^3},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_xF_y\,dx = 0,$$

так как F_xF_y является нечетной функцией x. Окончательно,

$$-\Delta E\,d\Omega = \frac{e_1^4e_2^2}{32c^3vm_1^2}\frac{1}{\rho^3}\left\{(1-n_x^2)+3(1-n_y^2)\right\}d\Omega =$$

$$= \frac{e_1^4e_2^2}{32c^3vm_1^2}\frac{1}{\rho^3}\{4-\sin^2\theta\cos^2\psi-3\sin^2\theta\sin^2\psi\}\sin\theta\,d\theta\,d\psi. \quad (43,36)$$

Излучаемая энергия обратно пропорциональна скорости и кубу прицельного расстояния ρ и довольно сложным образом зависит от углов. Простое вычисление дает для полной излучаемой энергии

$$-\Delta E_{\text{полн}} = -\int\Delta E\,d\Omega = \frac{\pi}{3}\frac{e_1^4e_2^2}{c^3m_1^2v}\frac{1}{\rho^3}. \quad (43,37)$$

На практике основной интерес представляет вычисление потери энергии быстрой заряженной частицы на единице пути в веществе. Рассеивающими центрами, отклоняющими частицу, являются ядра с зарядом $e_2 = Ze$, где Z — порядковый номер элемента, а e — заряд электрона (рассеянием на электронах

можно пренебречь). При рассеянии на каждом ядре частица излучает энергию, определяемую по формуле (43,37). Умножая (43,37) на число ядер на единице длины в цилиндре радиуса ρ, $\rho + d\rho$ и интегрируя по всем прицельным расстояниям, находим для потерь энергий

$$-\frac{dE}{dx} = -\int \Delta E_{\text{полн}} N 2\pi\rho\, d\rho = \frac{2\pi^2 e_1^4 Z^2 e^2 N}{3c^3 m_1^2 v} \int\limits_{\rho_{\text{мин}}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2\pi^2 Z^2 e^2 e_1^4 N}{3c^3 m_1^2 v} \frac{1}{\rho_{\text{мин}}}, \tag{43,38}$$

где N — число ядер в 1 $см^3$ и $\rho_{\text{мин}}$ — некоторое минимальное значение прицельного расстояния.

Если бы не существовало минимального предельного расстояния, формула (43,38) приводила бы к бессмысленному результату: потери энергии частицы вследствие излучения на пути в веществе были бы бесконечно большими. В действительности, оказывается, однако, что законы классической физики становятся неприменимыми на малых расстояниях от ядра. Расчет минимального значения прицельного параметра может быть проведен только на основе квантовой механики (см. также § 17 ч. II).

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Возникновение и значение теории относительности

Развитие теории электромагнитного поля в конце XIX и начале XX века и усовершенствование экспериментальных методов изучения электромагнитных процессов позволили исследователям приступить к настойчивым поискам непосредственных доказательств существования гипотетического эфира. В рамках данной книги мы не можем описывать историю этих поисков, которые привели не к обнаружению эфира, но к развитию нового физического мировоззрения и к полному отказу от системы представлений о пространстве и времени, установившихся в физике в конце прошлого века.

Эта система представлений, которую принято называть классической, была тесно связана с успехами классической механики. Кратко принципы классических воззрений в физике можно выразить следующими словами:

1. Всякое физическое явление можно считать изученным только тогда, когда построена его механическая модель.

2. Единственно возможный вид физической закономерности — динамическая закономерность классической механики. Как известно, в классической механике принимается, что задание действующих сил и начальных условий полностью определяет движение любой механической системы. Таким образом, начальное состояние полностью предопределяет поведение системы в любой последующий момент времени. Это утверждение и составляет содержание понятия о динамической закономерности.

3. Все физические процессы происходят в пространстве и во времени, причем свойства пространства и времени установлены в классической механике; всякая физическая теория должна строиться по образу и подобию механики.

Предполагалось, что свойства пространства сводятся к:

1) равноправию всех направлений (изотропности),

2) равноправию всех точек (однородности) пространства,
3) его евклидовости.

При этом считалось, что, хотя движение физических тел всегда происходит в пространстве, тела никак не влияют на его свойства.

В классической механике принималось, что можно ввести единое мировое время, текущее равномерно и одинаково, независимо от состояния движения физических тел.

Создание Эйнштейном в 1905 г. теории относительности привело к радикальному пересмотру представлений о свойствах пространства и времени, взглядов на характер электромагнитного поля, отрицанию необходимости и возможности создания механических моделей для всех физических явлений. Теория относительности сыграла важнейшую роль в дальнейшем развитии современной физики, в частности, атомной и ядерной физики. Эта роль заключалась не только в использовании важных соотношений теории относительности. Теория относительности впервые показала, что классические представления, почерпнутые из повседневного опыта, казавшиеся наглядными и очевидными, оказываются несостоятельными или неполными при переходе к новым областям исследований. Поэтому с полным правом можно утверждать, что появление теории относительности знаменовало начало развития новой, неклассической физики.

§ 2. Преобразования Галилея

Для того чтобы характеризовать движение тел в пространстве, необходимо располагать некоторой системой физических тел, между которыми существует какое-либо, например, электромагнитное взаимодействие. Кроме того, необходимо располагать некоторым способом измерения времени. Возможность измерения времени дает любой периодический процесс, именуемый часами. Тогда, зная скорость света и время, требующееся для прохождения света от одного тела до другого, можно определить расстояние между телами. Совокупность тел, находящихся на определенных таким способом расстояниях и снабженных часами, называется системой отсчета. Только располагая системой отсчета, можно говорить об определенном законе движения некоторого тела в пространстве. Если относить в каждый момент времени положение тела к системе отсчета, то совокупность всех положений тела в пространстве образует траекторию, а последовательность прохождения различных точек траектории — закон движения.

В качестве системы отсчета может быть выбрана любая совокупность тел, движущихся по произвольным законам. Нас,

однако, в дальнейшем будут интересовать так называемые инерциальные системы отсчета. Под инерциальными системами отсчета мы будем понимать такие, в которых справедлив закон инерции Ньютона. Иными словами, в инерциальных системах отсчета движение тел, не подверженных воздействию внешних сил, происходит равномерно и прямолинейно. Особая роль инерциальных систем отсчета связана с тем, что в них движение имеет наиболее простой вид. В неинерциальных системах отсчета, например, во вращающейся системе отсчета, даже простейшее прямолинейное и равномерное движение описывается весьма сложными соотношениями.

Нашей задачей является сравнение законов движения тела в различных системах отсчета. Если некоторый физический закон не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой, то мы будем говорить, что он инвариантен относительно этого преобразования.

Уже давно было установлено, что механические явления происходят одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Иными словами, законы классической механики инвариантны относительно перехода от одних инерциальных систем отсчета к другим.

Рассмотрим две системы отсчета K и K', движущихся относительно друг друга. Систему K' мы будем называть движущейся, систему K — неподвижной. Условность такой терминологии будет особенно ясна из дальнейшего.

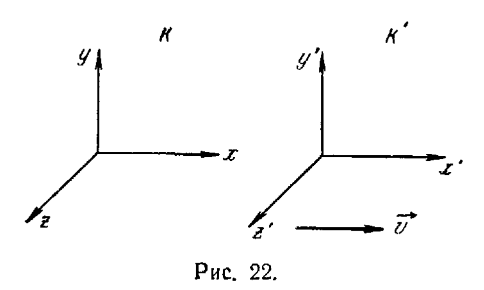


Рис. 22.

Легко получить соотношения, связывающие между собой скорости и положения движущегося тела относительно двух инерциальных систем отсчета. Направим оси x и x' вдоль вектора скорости относительного движения v. Тогда относительное движение будет происходить только вдоль положительного направления оси x. Совместим, кроме того, начала обеих систем в начальный момент времени $t = 0$ (рис. 22).

Для нахождения законов преобразования от системы отсчета K к системе K' заметим, что, согласно сказанному, в обеих инерциальных системах отсчета закон инерциального движения некоторого тела должен иметь один и тот же вид. Именно, в обеих системах ускорение такого тела одинаково и равно нулю, т. е.

$$\ddot{x} = \ddot{x}' = 0; \quad \ddot{y} = \ddot{y}' = 0; \quad \ddot{z} = \ddot{z}' = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\dot{x} = \dot{x}' + v; \quad \dot{y} = \dot{y}'; \quad \dot{z} = \dot{z}'. \tag{2,1}$$

Второе интегрирование дает

$$x = x' + vt; \quad y = y'; \quad z = z'. \tag{2,2}$$

При этом мы молчаливо предполагали, что время имеет абсолютный характер и одинаково во всех системах отсчета. Для полноты системы преобразований следует написать

$$t' = t. \tag{2,3}$$

Формулы (2,2) — (2,3) именуют законом преобразования Галилея, а формулу (2,1) — законом сложения скоростей классической механики. Разумеется, формулы (2,1) — (2,2) можно без труда написать и в векторной форме, не специализируя выбор ориентации осей координат, в виде

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}t. \tag{2,4}$$

Неизменность законов классической механики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой математически выражается в том, что они инвариантны относительно преобразований Галилея. Это означает, что если в уравнениях Ньютона

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

совершить замену $x \to x'$, $y \to y'$, $z \to z'$, т. е. перейти от системы K к системе K', они останутся неизменными, если закон преобразования координат и времени представляет закон преобразования Галилея (2,2) — (2,3). Действительно, поскольку в уравнения движения входят только ускорения, при преобразованиях Галилея имеем

$$m\ddot{x}' = -\frac{\partial U}{\partial x'}; \quad m\ddot{y}' = -\frac{\partial U}{\partial y'}; \quad m\ddot{z}' = -\frac{\partial U}{\partial z'},$$

что совпадает с уравнениями движения в нештрихованной системе отсчета.

Необходимо подчеркнуть, что системы отсчета K и K' совершенно эквивалентны. С равным успехом мы могли бы рассматривать переход от системы отсчета K' к системе K.

Таким образом, равномерное и прямолинейное движение системы отсчета не влияет на механические процессы, происходящие в системе материальных точек. Это утверждение носит название принципа относительности Галилея. Следует отметить, что сам термин «принцип относительности Галилея» был введен в связи с созданием теории относительности. Термин

«относительность» подчеркивает полную равноценность инерциальных систем отсчета. Термины «покой» и «равномерное и прямолинейное движение» имеют относительный характер. Только относительное движение имеет смысл в классической механике. Наоборот, понятие абсолютного покоя и абсолютного движения не имеют реального содержания. Принцип относительности в механике формулируют обычно словами «равномерное и прямолинейное движение системы материальных точек не влияет на внутреннее движение в системе». Принцип относительности классической механики (принцип Галилея) ограничен инерциальными системами отсчета.

В основе принципа относительности Галилея лежат представления классической физики о свойствах пространства и времени. Этот принцип, равно как и вытекающая из него формула сложения скоростей (2,4), подтверждаются таким обширным опытным материалом, в частности, связанным с миром непосредственно окружающих нас явлений, что его принято было считать чем-то самоочевидным.

§ 3. *Попытки определения абсолютной скорости*

Уже вскоре после создания теории электромагнитного поля Максвелла — Лоренца возник вопрос об ее обобщении на случай движущихся тел.

Существует, однако, глубокое различие между уравнениями классической механики и электродинамики.

Именно, в уравнения Максвелла входит характерная скорость, скорость распространения электромагнитных волн в пустоте (скорость света). Поэтому они не инвариантны относительно преобразований Галилея. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой вместо скорости c суммы $(c+v)$.

Естественно, возник вопрос о том, относительно какой системы отсчета измеряется скорость света. Классическая электродинамика Лоренца давала на этот вопрос, казалось бы, однозначный ответ — относительно некоторой гипотетической среды, получившей название мирового эфира.

Эфиру приписывались свойства всепроникающей, однородной и изотропной среды, неподвижной и заполняющей все пространство. В теории Лоренца принималось существование абсолютной выделенной системы отсчета. Двигаться — это значит двигаться по отношению к эфиру, а скорость движения относительно эфира — абсолютная скорость.

Таким образом, в отличие от классической механики, в теории Лоренца была сделана решительная попытка отказаться от принципа относительности. То обстоятельство, что уравнения Максвелла — Лоренца, в отличие от уравнений Ньютона, ока-

зались не инвариантными относительно преобразований Галилея, казалось непосредственным следствием отказа от принципа относительности.

Ясно, что основным вопросом, стоявшим перед электродинамикой на рубеже XIX и XX веков, был вопрос об опытном определении абсолютной скорости и получении прямых доказательств существования эфира.

Мы не можем излагать здесь историю поисков эфира, которые могут до сих пор служить примером изобретательности и упорства многих исследователей.

Мы рассмотрим лишь принципиальную схему двух возможных экспериментов[1]). Пусть на некотором теле, движущемся относительно неподвижного эфира со скоростью v, установлены источник и приемник электромагнитных волн. Если направление источник — приемник совпадает с направлением движения тела относительно эфира v, то расстояние между ними l свет пройдет за время $T_1 = \frac{l}{c-v}$. Измеряя время T_1, можно найти скорость v относительно эфира. Однако, поскольку c очень велико, а доступные в конце прошлого века скорости v малы, такое измерение лежало за пределами возможной точности эксперимента. Можно было, однако, сравнить время T_1 с временем T_2, в течение которого свет проходит такое же расстояние l в направлении, перпендикулярном к скорости v. За время T_2 приемник проходит путь (vT_2) относительно эфира, так что полный путь, проходимый светом от источника до приемника, равен $\sqrt{l^2+v^2T_2^2}$. Соответственно для времени T_2 имеем

$$T_2 = \frac{1}{c}\sqrt{l^2+v^2T_2^2}$$

или

$$T_2 = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Заставляя интерферировать лучи, двигавшиеся от источника к приемнику вдоль направления скорости v и в перпендикулярном направлении, можно было определить разность T_1 и T_2 и скорость v с большой степенью точности.

В 1881 г. подобный опыт был осуществлен Майкельсоном, который воспользовался в качестве скорости источника скоростью орбитального движения Земли.

---

[1]) См., например, Абрагам-Беккер, Электронная теория, ИЛ, 1960; В. Пановский и И. Филлипс, Классическая электродинамика, Физматгиз, 1963 и, особенно, Л. И. Мандельштам, Собр. соч., ч. V, Изд-во АН СССР, 1950. В этих книгах читатель может ознакомиться как с историей вопроса, так и с фактической методикой проведения экспериментов.

Он заставлял интерферировать лучи, прошедшие пути от источника к приемнику по направлению движения Земли и в перпендикулярном к нему направлении. Заметим, что в настоящее время точность измерений молекулярной электроники позволяет измерить разность $(T_1 - T_2)$ непосредственно, не прибегая к интерференции.

К удивлению современников Майкельсона, никакого различия во временах T_1 и T_2 не удалось обнаружить. Оказалось, что с огромной степенью точности T_1 и T_2 были равны друг другу.

Другим принципиальным экспериментом мог бы служить следующий непосредственный опыт. Пусть источник света движется, а приемник покоится относительно эфира. Тогда можно непосредственно найти зависимость скорости света от скорости источника. В качестве излучения, приходящего на Землю от движущегося источника, Де Ситтер (в 1912 г.) предложил выбрать излучение так называемых двойных звезд. Последние представляют две близкие друг к другу звезды, обращающиеся вокруг общего центра тяжести. Наблюдая скорость света, излученного при движении звезды в направлении к Земле и в противоположном направлении (через половину периода обращения), можно было определить скорость звезды относительно эфира. Однако и здесь не было обнаружено никакого влияния движения источника на величину скорости света.

Был сделан целый ряд попыток объяснения отрицательного результата этих и многих других, сходных с ними экспериментов (например, изменение закона взаимодействия между зарядами с величиной их абсолютной скорости, § 20). Однако все эти попытки оказались неудовлетворительными. Решение проблемы было дано лишь в теории относительности Эйнштейна.

§ 4. Постулаты теории относительности Эйнштейна

Отрицательный результат опыта Майкельсона побудил Эйнштейна пересмотреть исходные понятия классической физики и прежде всего представления о свойствах пространства и времени.

В результате им была создана теория относительности, именуемая также частной или специальной теорией относительности.

В основу теории относительности положены два принципа или постулата:

1) принцип относительности Эйнштейна;

2) принцип существования предельной скорости распространения взаимодействий.

Согласно принципу относительности Эйнштейна, равномерное и прямолинейное движение тел не оказывает влияния на происходящие в них процессы. Иными словами, все законы природы одинаковы в инерциальных системах отсчета. Если в некоторой инерциальной системе отсчета произвольный закон природы выражен в виде некоторого уравнения, в котором физическая величина является функцией координат и времени, то, совершая преобразование координат и времени к другой инерциальной системе отсчета, мы обязательно должны получить ту же самую функциональную зависимость физической величины в зависимости от новых координат и времени. Это утверждение кратко формулируется словами «законы природы инвариантны (неизменны) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой». Совершенно очевидно, что принцип относительности Эйнштейна является обобщением принципа относительности Галилея. Последний устанавливал относительность инерциального движения и невозможность введения понятий абсолютного движения и абсолютного покоя в рамках классической механики. Отрицательный результат опыта Майкельсона, как это впервые осознал Эйнштейн, означал, что понятия абсолютного движения и покоя не имеют смысла и в теории электромагнитного поля.

Однако имеется глубокое различие между принципом относительности Галилея и Эйнштейна. В последнем переход от одной инерциальной системы отсчета к другой не связывается с формулами преобразования координат и законом сложения скоростей классической механики. Действительно, например, уравнения Максвелла не удовлетворяют этим преобразованиям. Поэтому закон преобразования координат и времени при переходе от одних инерциальных систем отсчета к другим в теории Эйнштейна должен быть найден заново. Для этой цели служит второй постулат теории относительности, утверждающий, что любые взаимодействия между телами распространяются в пустоте с универсальной конечной скоростью, равной скорости света в пустоте $c=3\cdot 10^{10}$ *см/сек* и не зависящей от движения и состояния тел. Совершенно очевидно, что этот постулат непосредственно выражает результат опыта Майкельсона.

Второй постулат теории относительности был тесно связан с развитием электродинамики. Оно ясно продемонстрировало несостоятельность теории дальнодействия классической механики. В электродинамике было установлено, что существует конечная скорость распространения электромагнитных взаимодействий, численно равная скорости света в пустоте. Теоретические исследования, выполненные Эйнштейном значительно позднее в связи с созданием так называемой общей теории относительности, показали, что гравитационное взаимодействие

также имеет характер волн, распространяющихся в пустоте со скоростью света. Нет никаких сомнений и в том, что специфическое взаимодействие между ядерными частицами имеет характер близкодействия.

Нельзя считать исключенным, что дальнейшее развитие физики может привести к открытию новых видов взаимодействия. Однако принцип предельной скорости распространения взаимодействий выражает гипотезу о том, что скорость распространения взаимодействий в пустоте имеет универсальный характер и связана непосредственно со свойствами пространства и времени, а не с физической природой взаимодействия.

Существование предельной скорости распространения взаимодействия означает, что имеется некоторая связь между пространственными и временны́ми промежутками. Более наглядно эта связь будет продемонстрирована при разборе выводов теории относительности. Вместе с тем, наличие предельной скорости автоматически предполагает ограничение скорости движения материальных тел величиной c. Если бы какие-либо частицы могли двигаться со скоростью большей, чем скорость света, эти частицы могли бы осуществлять взаимодействие между телами также со скоростью, превышающей предельную. Таким образом, второй постулат Эйнштейна ограничивает значение всех возможных в природе скоростей движения и распространения взаимодействия величиной c.

Принцип существования предельной скорости распространения взаимодействий тесно связан с принципом относительности Эйнштейна. Действительно, нетрудно видеть, что если бы скорость распространения взаимодействий зависела от скорости частиц или от природы самого взаимодействия (т. е. была бы различной для электромагнитного и гравитационного взаимодействий), принцип относительности был бы нарушен. Например, если бы скорость света зависела от скорости прямолинейного и равномерного движения источника света, последнюю можно было бы определить на опыте.

Часто распространение взаимодействий в теории относительности называют распространением сигналов. При этом под сигналом понимают любое взаимодействие между телами, находящимися на конечном расстоянии друг от друга в состоянии относительного движения или покоя. Принцип существования конечной скорости распространения взаимодействия называют принципом существования конечной скорости распространения сигналов.

Все содержание теории относительности вытекает из двух ее постулатов. В частности, из основных постулатов Эйнштейна непосредственно следуют формулы преобразования координат и времени, которые заменяют формулы преобразования Гали-

лея. В настоящее время оба постулата теории относительности подтверждаются всей совокупностью экспериментальных данных, полученных при изучении атомных и ядерных процессов, движения быстрых частиц в приборах и инженерных сооружениях (ускорители) и т. п.

В дальнейшем мы приведем целый ряд примеров, иллюстрирующих последнее утверждение.

§ 5. Преобразования Лоренца

Исходя из сформулированных выше постулатов теории относительности Эйнштейна, можно найти закон преобразования, связывающий между собой пространственные координаты и время в двух системах отсчета, движущихся прямолинейно и равномерно относительно друг друга.

Пусть x, y, z, t и x', y', z', t' — координаты и время в инерциальных системах отсчета K и K', а v — скорость их относительного движения.

При этом нет никаких оснований полагать, что время в системе K' совпадает со временем в системе K, как это безоговорочно принималось в классической физике.

Для простоты выкладок мы выберем направление скорости за направление осей x и x', как это показано на рис. 22.

Предположим, что в некоторый момент времени t' в точке с координатами (x', y', z') происходит некоторый физический процесс, который мы для краткости будем именовать событием. Нашей задачей является нахождение «координат» этого события в системе отсчета K, т. е. нахождение величин (x, y, z, t), характеризующих тот же физический процесс в системе K.

Для установления аналитической связи между величинами (x, y, z, t) и (x', y', z', t') рассмотрим распространение сферической электромагнитной волны в обеих системах отсчета.

Выберем за начало отсчета времени $t=0$ тот момент, в который начало координат системы K' совпадало с началом координат системы K.

Пусть в момент $t=0$ из начала координат начала распространяться сферическая электромагнитная волна. В системе K уравнение волновой поверхности имеет вид

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0. \tag{5,1}$$

Поскольку, согласно принципу относительности Эйнштейна, закон и скорость распространения волны должны быть одинаковыми во всех инерциальных системах отсчета, наряду с (5,1) с равным правом можно написать уравнение сферической волны

в системе K':

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \qquad (5,2)$$

Формулы преобразования координат и времени должны, во-первых, не нарушать соотношений (5,1) и (5,2), а во-вторых, быть линейными. Требование линейности связано с однородностью пространства, в котором не существует каких-либо точек, выделенных по своим свойствам.

Заметим прежде всего, что поскольку движение системы K' происходит только вдоль оси x, преобразование координат (y, z) должно иметь вид

$$y' = y; \quad z' = z. \qquad (5,3)$$

Закон преобразования x' через x можно написать, исходя из следующего соображения: если в момент времени $t=0$ начала систем координат K и K' совпадали, то координата плоскости $x' = 0$ в системе K запишется так: $x = vt$. Следовательно, в самом общем случае можно написать

$$x' = \alpha(v)(x - vt), \qquad (5,4)$$

где коэффициент $\alpha(v)$ может зависеть лишь от скорости относительного движения.

Не делая никаких произвольных допущений о совпадении времени в двух системах отсчета, мы можем представить t' в виде линейной однородной функции x и t:

$$t' = \beta t + \gamma x. \qquad (5,5)$$

Коэффициенты β и γ могут, вообще говоря, зависеть от скорости v. Если бы оказалось, что $\gamma=0$, а $\beta=1$, то мы вернулись бы к преобразованиям Галилея.

Для определения коэффициентов α, β и γ, отвечающих требованиям принципа относительности Эйнштейна, мы должны подставить (5,4) и (5,5) в (5,2). Это дает

$$\alpha^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2(\beta t + \gamma x)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Для выполнения тождества необходимо приравнять коэффициенты при x^2, t^2 и xt:

$$\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1,$$
$$\alpha^2 v^2 - c^2\beta^2 = -c^2,$$
$$\alpha^2 v + c^2\beta\gamma = 0.$$

Из этих трех уравнений находим неизвестные величины α, β и γ:

$$\alpha=\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\gamma=-\frac{\alpha v}{c^2}=-\frac{v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

При этом всюду мы выбрали положительный знак корня.

Подставляя значения α, β и γ в формулы преобразования координат (5,4) и (5,5) и учитывая (5,3), находим

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{5,6а}$$

$$y'=y, \tag{5,6б}$$

$$z'=z, \tag{5,6в}$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5,6г}$$

Формулы (5,6а)—(5,6г) носят название формул преобразования Лоренца.

Согласно принципу относительности Эйнштейна эти преобразования должны заменить преобразования Галилея.

Прежде чем перейти к обсуждению следствий из преобразований Лоренца, напишем формулы обратного преобразования от штрихованных к нештрихованным величинам. На основании принципа относительности Эйнштейна системы отсчета K и K' совершенно равноправны. Мы могли бы повторить все предыдущие рассуждения, приняв за исходную систему K', а не K; при этом, однако, скорость относительного движения равна $(-v)$, а не v. Поэтому получаем

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{5,7а}$$

$$y=y', \tag{5,7б}$$

$$z=z', \tag{5,7в}$$

$$t=\frac{t'+\frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5,7г}$$

Тот же результат получается, если уравнения (5,6а)—(5,6г) разрешить относительно нештрихованных величин.

Важность следствий, проистекающих из преобразований Лоренца, заставляет нас еще раз подчеркнуть, что в основу их вывода положен лишь принцип относительности Эйнштейна, принцип постоянства предельной скорости распространения взаимодействий и допущение об однородности всех точек пространства и времени. Эти положения в настоящее время подтверждены огромным опытным материалом и их обоснованность не подлежит сомнению.

Замечательной особенностью преобразований Лоренца является то, что при относительных скоростях движения, малых по сравнению со скоростью света, они переходят в преобразования Галилея. Действительно, при $v \ll c$ можно пренебречь величинами второго порядка малости, содержащими $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, и написать

$$x \approx x' + vt, \qquad t' \approx t,$$

что совпадает с формулами (2,2) и (2,3).

Таким образом, в предельном случае $v \ll c$ законы преобразований теории относительности и классической механики совпадают. Это означает, что теория относительности не отвергает преобразования Галилея как неправильные, но включает их в истинные законы — преобразования Лоренца — как частный случай, справедливый при скоростях движения, малых по сравнению со скоростью света.

В дальнейшем мы увидим, что это отражает общую взаимосвязь между теорией относительности и классической физикой. Законы и соотношения теории относительности переходят в законы классической физики в предельном случае малых (по сравнению со скоростью света c) скоростей.

§ 6. Следствия из преобразований Лоренца. Пространственные и временные промежутки

Преобразования Лоренца приводят к выводам, коренным образом противоречащим привычным представлениям о свойствах пространства и времени, сложившимся на основе повседневного опыта и сформулированным нами в § 2. Действительно, из преобразований Лоренца непосредственно вытекает, что понятия пространственного и временно́го промежутков являются относительными. Иными словами, понятия «размер тела» или «время, прошедшее между двумя физическими явлениями», не имеют абсолютного характера и различны для разных систем отсчета.

Рассмотрим прежде всего понятие пространственной протяженности (длины). Пусть в некоторой системе K' покоится не-

которое тело, которое мы в дальнейшем будем именовать масштабом. На масштаб не действуют какие-либо силы, которые могут его деформировать и изменить его размеры. Длину масштаба в направлении движения (оси x') обозначим через L_0. Эту длину, измеренную в той системе отсчета, в которой масштаб покоится (система K'), мы будем называть собственной длиной масштаба. С помощью преобразований Лоренца найдем длину масштаба в системе отсчета K, т. е. длину масштаба, движущегося относительно системы K со скоростью v. Пусть в системе K' координаты начала и конца масштаба будут соответственно x'_1 и x'_2. Найдем эти координаты в системе K.

Поскольку масштаб движется относительно системы отсчета K, для измерения его размеров необходимо зафиксировать координаты его начала и конца в один и тот же момент времени, измеренного в системе отсчета K. Для фактического осуществления этого измерения можно было бы зафиксировать в момент времени t положения начала и конца масштаба с помощью светового сигнала, выходящего из системы K'.

Пусть в некоторый момент времени t в системе K начало и конец масштаба имеют координаты x_1 и x_2. С помощью формулы (5.6а) находим

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычитая, имеем

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

или, обозначая разность координат начала и конца масштаба (длину масштаба в системе K) через L, получаем

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (6,1)$$

Мы видим, что длина масштаба, движущегося со скоростью v по отношению к системе отсчета K, оказывается меньшей, чем его собственная длина в $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ раз. Это сокращение размеров тела часто именуется лоренцевым сокращением. Поскольку размеры масштаба в направлении, перпендикулярном к скорости, остаются неизменными, объем масштаба оказывается связанным с его собственным объемом формулой

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (6,2)$$

Таким образом, длина и объем масштаба, не подверженного действию внешних сил, оказываются величинами, имеющими относительное значение. Иными словами, утверждение: расстояние между двумя точками пространства равно L, — не имеет смысла без указания, к какой системе отсчета отнесена эта величина. Расстояние между двумя точками зависит от движения системы отсчета.

В классической физике абсолютный характер понятия длины масштаба считался чем-то само собой разумеющимся. В этом состоит фундаментальное различие во взглядах на свойства пространства в теории относительности и классической физике.

Следует иметь в виду, что обе системы отсчета, K и K', являются совершенно равноправными. Поэтому если масштаб покоится в системе K, то его длина в системе K' будет меньше, чем в системе K в том же отношении. Имеется полная взаимность между обеими системами отсчета. В этом можно убедиться непосредственным вычислением с помощью формул преобразования Лоренца (5,7а)—(5,7г).

Нетрудно показать, что отрицательный результат опыта Майкельсона автоматически следует из наличия лоренцева сокращения. Действительно, при прохождении света вдоль направления движения Земли и в обратном направлении, с точки зрения неподвижного наблюдателя (к которому относится все рассуждение § 3), длина l должна быть уменьшена в $1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ раз. При этом время T_1 прохождения лучом света полного пути равно, с точки зрения неподвижного наблюдателя,

$$T_1 = \frac{2l}{c} \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Соответственно, разность времен

$$T_2 - T_1 = 0.$$

Необходимо подчеркнуть, что сокращение длины — сжатие тела в направлении движения — имеет чисто кинематический характер. В теле не возникает каких-либо внутренних напряжений, вызывающих деформацию тела. В этом смысле можно говорить о «твердом» или, точнее, недеформируемом теле в теории относительности. С другой стороны, понятие абсолютно твердого тела несовместимо с выводами теории относительности. Действительно, если допустить существование абсолютно твердого тела, т. е. тела с неизменными расстояниями между всеми образующими его частицами, то такое тело можно было бы использовать

для передачи взаимодействия с какой угодно большой скоростью. Удар по одному его концу передавался бы к другому концу с бесконечно большой скоростью. Поэтому говорят, что с точки зрения теории относительности невозможно допустить существование абсолютно твердых тел, даже как некоторой идеализации.

Такому же фундаментальному изменению подвергается в теории относительности представление о времени.

Пусть в некоторой точке x' в системе K' происходит некоторый физический процесс в течение промежутка времени

$$\Delta t_0 = t_2' - t_1',$$

где t_1' и t_2' время начала и конца процесса. Тогда в системе K для моментов t_1 и t_2 можно написать

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t_1 = \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычитая, находим промежуток времени, прошедший от начала до конца процесса в системе K:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6,3}$$

Время Δt_0, измеренное в системе отсчета, движущейся вместе с телом, в котором происходит процесс, называется собственным временем.

Формула (6,3) показывает, что собственное время Δt_0 между двумя физическими событиями меньше, чем время, прошедшее между этими событиями в системе K в $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ раз.

В теории относительности принято обычно говорить о сравнении хода часов в различных инерциальных системах отсчета. При этом под часами понимают произвольный периодический процесс. Тогда можно сказать, что время, показываемое часами, зависит от скорости их движения. Движущиеся относительно некоторой системы отсчета часы, с точки зрения этой системы, идут медленнее, чем часы, покоящиеся в этой системе отсчета (но совершенно идентичные с движущимися).

Таким образом, в отличие от ньютоновской физики, течение времени оказывается зависящим от состояния движения. Не существует универсального мирового времени, и понятие промежутка времени между двумя физическими событиями оказывается относительным. Необходимо тут же подчеркнуть, что

имеется полная взаимность между системами отсчета K и K'. Предыдущие рассуждения можно было бы обратить. Если физический процесс происходит в точке x в системе K и имеет длительность Δt, то в системе K' он будет иметь длительность

$$\Delta t' = \frac{t_2 - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

как это видно из преобразований Лоренца (5,6а)—(5,6г).

Формула (6,3) для изменения хода часов была проверена на опыте несколькими способами. Наиболее наглядным из них является следующий. В космических лучах наблюдается распад положительного μ^+-мезона и отрицательного μ^--мезона (с массой 215 электронных масс) на позитрон (электрон) и два нейтрино. При этом наблюдался распад μ-мезонов как заторможенных почти до полной остановки, так и на лету, когда они движутся со скоростью, близкой к скорости света. Времена жизни покоящегося и движущегося мезонов связаны релятивистским соотношением

$$\tau_{\text{движ}} = \frac{\tau_{\text{пок}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Поскольку v близко к скорости света, $\tau_{\text{движ}}$ должно быть значительно больше $\tau_{\text{пок}}$.

Ряд экспериментальных методов позволяет определить значение $\tau_{\text{пок}}$, которое оказалось равным $2 \cdot 10^{-6}$ *сек*. Если бы время жизни мезонов не зависело от скорости, они пролетали бы путь, равный $v \cdot \tau_{\text{пок}} \approx 600$ *м* (при $v \approx c$). В действительности, как показывают измерения, мезоны распадаются, пройдя путь около 20 *км*. Такому пробегу отвечает время жизни

$$\tau_{\text{движ}} = \frac{20\ \textit{км}}{c} \approx 7 \cdot 10^{-5}\ \textit{сек} \approx 50\tau_{\text{пок}}.$$

Релятивистское изменение времени жизни оказывается в этом случае весьма большим эффектом.

Естественно, возникают два вопроса: во-первых, почему до появления теории относительности вся совокупность имевшихся опытных фактов находилась в согласии с ньютоновскими представлениями об абсолютном характере длины тела и о едином мировом времени и, во-вторых, являются ли сокращение размеров движущихся тел и замедление хода движущихся часов реальными или кажущимися.

Ответ на первый вопрос весьма прост. До опытов, имевших своей целью обнаружение движения Земли относительно эфира, физики не сталкивались с процессами, происходящими с такими объектами, которые двигались со скоростью, сравнимой со скоростью света c. Иными словами, скорости всех тел, наблюдавшихся в физике до открытия электрона, были малы по сравнению со скоростью света.

При скоростях движения, малых по сравнению со скоростью света, можно с достаточной степенью точности пользоваться старыми представлениями о пространстве и времени. Более того, к моменту создания Эйнштейном теории относительности опыт Майкельсона был единственным бесспорным указанием на недостаточность классической физики. Как будет видно из последующего, за истекшие 50 с лишним лет ситуация коренным образом изменилась. Теория относительности стала одной из основ современной теоретической и ряда областей экспериментальной физики. Многочисленные опытные подтверждения теории относительности будут частично рассмотрены ниже. В частности, атомная и особенно ядерная физика, как правило, изучают процессы и поведение движущихся частиц, скорости которых весьма близки к скорости света. Все основные соотношения теории относительности широко используются в ядерной физике для чисто практических расчетов. Некоторые из них будут приведены ниже.

Переходя ко второму из поставленных вопросов, следует подчеркнуть, что весьма распространенные формулировки «кажущееся сокращение масштаба» и «кажущееся изменение хода часов» является неудачными. Обычно авторы стремятся термином «кажущееся» подчеркнуть чисто кинематический характер сокращения. Вместе с тем, сокращение масштаба и замедление хода часов представляют реальный и объективный факт, отнюдь не связанный с какими-либо иллюзиями наблюдателя. Само собой разумеется, что все значения длины данного масштаба или промежутков времени, полученные в различных системах отсчета, являются равноправными. Все они «правильные». Трудность понимания этих утверждений связана исключительно с нашей привычкой считать понятия длины и промежутка времени абсолютными понятиями, когда в действительности они суть понятия относительные. Поэтому также бессмысленно спрашивать, какая длина масштаба является истинной, а какая — кажущейся, как бессмысленно говорить: «в действительности данное тело движется (или покоится)». Понятия длины и промежутка времени столь же относительны, как и понятия движения и покоя.

Истинный характер сжатия движущегося масштаба можно проиллюстрировать следующим примером. Пусть имеются два

заряженных тела. Если одно из тел, например A, движется вместе с системой K', то с точки зрения системы K его продольные (по отношению к направлению движения) размеры испытают сокращение, поперечные останутся неизменными.

Взаимодействие между телами A и $Б$ отвечает взаимодействию между заряженными сферой $Б$ и эллипсоидом A. При этом с точки зрения системы K' тело $Б$ является сферой, а тело A — эллипсоидом. С точки зрения системы K тело A остается сферой, а тело $Б$ превращается в эллипсоид. Однако величина взаимодействия A — $Б$ будет одной и той же в обеих системах отсчета.

Пример расчета взаимодействия между быстро движущимися электрическими зарядами будет разобран в § 20.

§ 7. Закон сложения скоростей Эйнштейна и преобразование углов

Важным следствием преобразований Лоренца является релятивистский закон сложения скоростей, который в теории относительности заменяет закон сложения скоростей Галилея.

Проще всего найти его, записав формулы преобразования Лоренца для дифференциалов пространственных координат и времени:

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$dy = dy',$$

$$dz = dz',$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{v\,dx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Пусть x', y', z' — координаты материальной точки, движущейся в системе координат K'. Компоненты скорости материальной точки в системе K' будут

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}; \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}; \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'},$$

а в системе K

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Разделив дифференциалы координат на дифференциал времени, находим

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \tag{7,1}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \tag{7,2}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}. \tag{7,3}$$

Формулы (7,1)—(7,3) носят названия закона сложения скоростей Эйнштейна. Они заменяют формулы сложения скоростей классической механики (2,1).

При $v \ll c$ закон сложения скоростей Эйнштейна непосредственно переходит в (2,1), поскольку при этом

$$1 + \frac{u'_x v}{c^2} \approx 1,$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1.$$

Из формул (7,1) и (7,2), как это, впрочем, и следовало ожидать, вытекает, что скорость света c является предельной скоростью. Если, например, частица в системе K' движется вдоль оси x со скоростью $u = u'_x = c$, то в неподвижной системе K ее скорость

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c.$$

Если частица в системе K' движется со скоростью меньшей, чем скорость света, например,

$$u' = u'_x = c - \alpha \qquad (\alpha > 0),$$

а система K' движется относительно K со скоростью $v = c - \beta$ $(\beta > 0)$, то скорость частицы по отношению к неподвижной системе K равна

$$u = \frac{(2c - \alpha - \beta)\, c}{2c - \alpha - \beta + \frac{\alpha\beta}{c}} < c.$$

Таким образом, сумма двух скоростей, каждая из которых меньше скорости света c, всегда будет меньше скорости света. Сумма двух скоростей, одна из которых равна, а другая меньше скорости света, равна скорости света.

Из закона сложения скоростей непосредственно следует, что величина угла имеет относительное значение и изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Поскольку

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u_y}{u_x},$$

где θ — угол, образуемый вектором скорости частицы с осью x, из (7,2) и (7,1) находим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sin\theta'}{v+u'\cos\theta'}, \tag{7,4}$$

где $u'_x = u'\cos\theta'$, $u'_y = u'\sin\theta'$.

Последняя формула выражает закон преобразования углов в теории относительности. Она связывает углы θ' и θ, образуемые вектором скорости с осями x' и x соответственно.

В заключение следует подчеркнуть, что под скоростью тела v следует понимать такую скорость, с которой может перемещаться некоторое реальное тело или распространяться реальный процесс взаимодействия (сигнал). Можно представить себе, не входя в противоречие с теорией относительности, процессы, имеющие скорость, превышающую скорость c, но имеющие кинематический характер и не могущие переносить тела или осуществлять взаимодействия.

Рассмотрим, например, скорость движения воображаемой точки a, в которой пересекается линейка A с линейкой B, при вращении линейки B. Если угол α как угодно мал, а длина подвижной линейки как угодно велика, скорость движения точки a также может быть как угодно велика. Однако движение воображаемой точки пересечения линеек не сопровождается переносом энергии и не может служить способом передачи сигналов и взаимодействий.

§ 8. Одновременность, близко- и дальнодействие

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета K' в точках x'_1 и x'_2 в некоторый момент времени t' одновременно произошли два физических события. С точки зрения классической физики два события, являющиеся одновременными в одной системе отсчета, происходят одновременно во всех других инерциальных системах отсчета.

Иначе обстоит дело в теории относительности.

Рассмотрим инерциальную систему K, по отношению к которой система K' движется со скоростью v в положительном направлении оси x. В системе отсчета K первое событие происходит в момент времени

$$t_1 = \frac{t' + \frac{x_1' v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Второе событие происходит в момент

$$t_2 = \frac{t' + \frac{x_2' v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Следовательно, в системе отсчета K события происходят не одновременно, а по прошествии промежутка времени

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} \frac{(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (8,1)$$

Более того, в зависимости от знака $(x_2' - x_1')$, промежуток времени Δt может быть как положительным, так и отрицательным, т. е. в системе K «первое» событие происходит раньше или позднее «второго».

Таким образом, понятие одновременности оказывается относительным.

Единственным, но очень важным исключением является случай, когда два события происходят одновременно и в одном месте, т. е. в момент времени t' в точке x'. Тогда согласно (8,1) во всех инерциальных системах отсчета (при любом v) $\Delta t = 0$, т. е. оба события совершаются абсолютно одновременно.

Сказанное особенно ясно иллюстрирует тот факт, что теория относительности несовместима с понятием дальнодействия. Два события могут относиться друг к другу как причина и следствие только в том случае, когда они происходят одновременно и в одном и том же месте, как этого требуют представления о близкодействии. Если бы, наоборот, причина и следствие могли быть пространственно разделены (причем взаимодействие распространялось с бесконечно большой скоростью), то всегда существовало бы бесконечное множество инерциальных систем отсчета, в которых следствие предшествовало причине.

Следует подчеркнуть, что представление об относительности одновременности было с самого начала положено в основу теории относительности (в виде принципа конечности предельной скорости распространения взаимодействий) и его можно рассматривать лишь как наглядный пример внутренней согласованности теории.

§ 9. Абсолютные величины в теории относительности. Интервал и собственное время

Теория относительности разрушила учение классической физики об абсолютном характере пространства и времени.

Относительный характер пространственных и временны́х промежутков казался настолько парадоксальным, что авторы ряда многочисленных популярных изложений теории относительности, появившихся в особенности в 20-х годах, передавали идейное содержание теории относительности хлестким, но абсолютно неверным афоризмом: «Теория относительности показала, что все в мире относительно».

В действительности дело обстоит как раз наоборот. Задача, которую ставит перед собой теория относительности, заключается в нахождении абсолютных, не зависящих от выбора инерционной системы отсчета законов природы [1]).

Таким образом, теория относительности отнюдь не отрицает существование абсолютных величин и понятий. Она устанавливает лишь, что ряд понятий, считавшихся в классической физике абсолютными, например, величины пространственных и временны́х промежутков, в действительности являются относительными.

В связи с этим часто высказывалось мнение, что само название «теория относительности» неудачно, так как оно не отражает содержания этого раздела физики. Указывалось, например, что с бо́льшим правом теорию относительности можно было бы именовать «теорией физической инвариантности». Нужно, однако, иметь в виду, что в момент возникновения теории относительности ее критическая сторона — установление относительности пространственных и временны́х промежутков — представлялась более существенной и новой.

Задача о нахождении абсолютного выражения законов природы тесно связана с нахождением инвариантных, абсолютных величин. Первой из таких величин является универсальная скорость распространения взаимодействия — скорость света c. Другой, также весьма важной инвариантной величиной, является так называемый интервал.

---

[1]) В общей теории относительности, которую мы лишены возможности изложить в рамках этой книги, задача о нахождении абсолютных законов природы расширяется на любые системы отсчета.

Понятие интервала в теории относительности является обобщением обычных понятий интервала (т. е. расстояния) между двумя точками и интервала (т. е. промежутка времени) между двумя событиями. Пусть в точке пространства с координатами (x, y, z) в момент времени t происходит некоторое физическое явление, которое мы будем именовать событием. В другой точке x_1, y_1, z_1 в момент времени t_1 происходит другое событие. Тогда интервалом между обоими событиями называется величина

$$s = \sqrt{c^2 (t_1 - t)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2}. \qquad (9,1)$$

Инвариантность интервала относительно преобразования Лоренца может быть проверена непосредственным вычислением. В движущейся системе координат K' имеем

$$s' = \sqrt{c^2(t_1' - t')^2 - (x_1' - x')^2 - (y_1' - y')^2 - (z_1' - z')^2}.$$

Очевидно,

$$(x_1' - x')^2 = \frac{(x_1 - x)^2 + v^2 (t_1 - t)^2 - 2v (x_1 - x)(t_1 - t)}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$c^2(t_1' - t')^2 = \frac{c^2 (t_1 - t)^2 - 2v (x_1 - x)(t_1 - t) + \frac{v^2}{c^2} (x_1 - x)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$(y_1' - y')^2 = (y_1 - y)^2,$$

$$(z_1' - z')^2 = (z_1 - z)^2.$$

Подстановка этих выражений в s' после элементарных вычислений дает

$$s' = s.$$

Таким образом, утверждение: «два физических события разделены интервалом s» имеет абсолютный характер. Оно справедливо во всех инерциальных системах отсчета.

Часто рассматривают интервал между двумя событиями, происходящими в бесконечно близких точках через бесконечно малое время. В этом случае интервал между двумя событиями равен

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \qquad (9\,2)$$

Величина интервала s может быть как вещественной, так и мнимой, в зависимости от знака подкоренного выражения.

Рассмотрим сначала случай вещественного интервала

$$c^2 (\Delta t)^2 > (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

При этом всегда можно найти такую систему отсчета, в которой два события происходят в одном месте. Для этого необходимо, чтобы имело место условие

$$\sqrt{c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2}=c\,\Delta t'.$$

В принципе оно всегда может быть выполнено при вещественном значении подкоренного выражения. Поэтому вещественные интервалы получили название «времениподобных интервалов». Очевидно, в частности, что если два события происходят с одной и той же физической системой, то интервал между этими событиями имеет времениподобный характер. Действительно, за время Δt между двумя последовательными событиями система может пройти путь

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}<c\,\Delta t,$$

поскольку ее скорость всегда меньше скорости света. В виде примера времениподобного интервала можно привести интервал между двумя событиями, представляющими последовательные показания одних и тех же часов.

Мнимый интервал носит название «пространственноподобного». Если два события разделены пространственноподобным интервалом, то всегда можно найти систему отсчета, в которой они происходят в один и тот же момент времени. Для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\sqrt{c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2}=i\,[(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2],$$

которое всегда может иметь место при отрицательном значении подкоренного выражения слева.

Вернемся теперь к определению собственного времени и покажем, что оно, так же как и интервал, является инвариантной, абсолютной величиной.

Пусть дана инерциальная система отсчета K'. В некоторой точке x', y', z' происходят два последовательных события, разделенных промежутком времени dt_0. Подчеркнем, что время t_0 измеряется часами, покоящимися в системе K', как говорят, собственными часами системы K', а время dt_0 является собственным временем, прошедшим между двумя событиями. Интервал между указанными двумя событиями равен, по определению,

$$ds=\sqrt{c^2(dt_0)^2-(dx')^2-(dy')^2-(dz')^2}=c\,dt_0.$$

Таким образом, собственное время связано с интервалом соотношением

$$dt_0=\frac{ds}{c} \qquad (9,3)$$

и является инвариантом.

Собственное время можно выразить через время в произвольной системе отсчета dt, т. е. через время, измеренное часами, движущимися по отношению к K' со скоростью $(-v)$, подставляя в (9,3) выражение для ds:

$$dt_0 = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} =$$

$$= dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (9,4)$$

Конечный промежуток собственного времени t_0 равен

$$t_0 = \int\limits_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt. \qquad (9,5)$$

Следует подчеркнуть, что формула (9,5) выведена для случая движения часов вместе с инерциальной системой отсчета, т. е. движения с постоянной скоростью.

Часто формулу (9,5) применяют к ускоренному движению, считая v функцией времени. Нужно, однако, иметь в виду, что в специальной теории относительности не может рассматриваться ускоренное движение систем отсчета. Поэтому величина t_0, определенная формулой (9,5), в случае ускоренного движения не имеет смысла собственного времени, но является удобной величиной, инвариантной относительно преобразований Лоренца.

§ 10. Инвариантность физических законов относительно преобразований Лоренца. Четырехмерная формулировка теории относительности

Согласно принципу относительности все физические законы — законы механики, электродинамики, статистической физики и т. д., должны быть одними и теми же во всех инерциальных системах отсчета. Это означает, что все законы физики должны быть сформулированы таким образом, чтобы они оставались инвариантными относительно преобразований Лоренца. Соотношения, инвариантные относительно преобразований Лоренца, мы будем в дальнейшем именовать релятивистски- или лоренц-инвариантными.

Уравнения механики, инвариантные относительно преобразований Галилея, не удовлетворяют, очевидно, требованию инвариантности относительно преобразований Лоренца и, следовательно, должны быть видоизменены. Наоборот, законы электродинамики — уравнения Максвелла, как это будет показано позднее, уже с самого начала были сформулированы так, что

они оказались релятивистски-инвариантными. С точки зрения теории относительности, уравнения Максвелла являются образцом «правильно сформулированного» физического закона.

Реализация общей программы, поставленной теорией относительности, — нахождение релятивистски-инвариантной формы физических законов, оказало большое влияние на все дальнейшее развитие физики. Так, например, прогресс, достигнутый в течение последних десятилетий в области квантовой механики и особенно в области квантовой теории поля, был тесно связан с выполнением этой программы теории относительности.

Следует заметить, что требование инвариантности физических законов относительно некоторых преобразований систем координат не является специфической особенностью теории относительности. Хорошо известно, что требование инвариантности физических законов относительно поворота системы непосредственно связано с изотропией пространства.

Действительно, всякий физический закон формулируется так, что входящие в него величины относятся к некоторой системе координатных осей. Ясно, что при этом содержание физического закона не может зависеть от ориентации координатных осей в пространстве. Например, уравнения Ньютона

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z \qquad (10,1)$$

не зависят от того, как ориентирована в пространстве система координатных осей (x, y, z), к которой относятся проекции сил и ускорений. При любом повороте осей этой системы координат уравнения движения остаются неизменными: при повороте каждая из проекций ускорения и силы преобразуется по одному и тому же закону, так что равенства (10,1) не нарушаются. Это свойство инвариантности физических законов относительно поворота системы координат может быть более точно сформулировано следующим образом: в классической физике все физические законы формулируются в виде равенств типа

$$\alpha = \beta \qquad (10,2)$$

или

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}. \qquad (10,3)$$

$$\alpha_{ik} = \beta_{ik}. \qquad (10,4)$$

Первое из них содержит связь между скалярными величинами, которые остаются неизменными при повороте координатных осей. Второе связывает между собой векторные величины. При повороте координатных осей векторные величины изменяются. Именно, если для простоты записи ограничиться поворотом вокруг оси z на угол φ, то x-я и y-я компоненты любых векторов

изменяются по известным формулам аналитической геометрии:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{aligned} \tag{10,5}$$

Поскольку, однако, по этому закону изменяются компоненты любых векторов, в частности, векторов ускорения и силы, равенство (10,3) (или равенство (10,1), являющееся его частным случаем) не нарушается.

Последнее равенство показывает в общем виде, что тензорная размерность величин, стоящих в обеих частях равенства, сохраняется.

Таким образом, всякий физический закон должен быть сформулирован так, чтобы он содержал только величины одинаковой тензорной размерности. В классической механике законы преобразования координат, которые должны оставлять неизменными физические законы, сводятся к следующим:

1) Инвариантность относительно преобразования Галилея.

2) Инвариантность относительно пространственных переносов и поворотов системы координат (10,5).

3) Инвариантность относительно замены t на $(t+\Delta t)$, выражающая однородности течения времени.

4) Инвариантность относительно замены знака времени, указывающая на обратимость законов механики, симметричных относительно будущего и прошедшего.

Теория относительности вместо условия 1) выдвигает более общее требование инвариантности физических законов относительно преобразований Лоренца. Такую инвариантность мы часто будем именовать релятивистской инвариантностью. Условия 2)—4) сохраняются и в теории относительности.

На первый взгляд может показаться, что разнообразие физических законов и фигурирующих в них физических величин исключает общий подход к установлению их релятивистски-инвариантных формулировок. В действительности, однако, это не так.

Для нахождения общего метода составления релятивистски-инвариантных выражений вновь обратимся к выражению для интервала ds.

Введем совершенно формально величину

$$\tau = ict, \tag{10,6}$$

которую мы будем называть четвертой координатой или мнимым временем. Само собой разумеется, что τ, как величина мнимая, не имеет непосредственного физического смысла.

С помощью мнимого времени интервал можно представить в виде

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2. \tag{10,7}$$

В этих обозначениях преобразования Лоренца допускают новую интерпретацию.

Будем считать, пока не вдаваясь в физическое содержание нашего рассмотрения, величины x, y, z, τ ортогональными координатами в некотором воображаемом четырехмерном пространстве.

Преобразование Лоренца представляет такое линейное преобразование четырех координат (x, y, z, τ), которое оставляет неизменной величину ds^2. Нетрудно заметить, что с геометрической точки зрения величина ds^2 представляет квадрат расстояния между двумя точками в четырехмерном пространстве. Следовательно, преобразование Лоренца является таким линейным преобразованием, которое оставляет неизменным расстояние между двумя произвольными точками в этом пространстве. Из геометрии известно, что существует только два таких линейных преобразования: преобразование параллельного переноса и вращение. Параллельный перенос представляет тривиальное преобразование, сводящееся к изменению начала отсчета системы кординат x, y, z, t. Поэтому единственным линейным преобразованием, оставляющим неизменной величину интервала, является поворот в четырехмерном пространстве (x, y, z, t).

Ниже мы подтвердим этот вывод непосредственным вычислением.

Такая геометрическая интерпретация преобразования Лоренца, принадлежащая Минковскому, позволяет непосредственно сделать вывод о релятивистски-инвариантной форме физических законов.

Именно, для того чтобы некоторое выражение было релятивистски-инвариантным, оно должно иметь вид

$$a=b, \tag{10,8}$$

где a и b.— скаляры, или

$$a_\alpha=b_\alpha, \tag{10,9}$$

где a_α и b_α — четырехмерные векторы, имеющие четыре компоненты ($\alpha=x$, y, z, τ), и в общем случае

$$a_{\alpha\beta\gamma\ldots}=b_{\alpha\beta\gamma\ldots}, \tag{10,10}$$

где $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ и $b_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ — четырехмерные тензоры произвольного ранга. При поворотах координатных осей в пространстве (x, y, z, τ) все величины, входящие в релятивистски-инвариантное выражение, преобразуются по одному и тому же закону, так что равенства типа (10,8)—(10,10) не нарушаются. Эти условия инвариантности в случае четырехмерного пространства Минковского представляют непосредственный аналог условий инвариантности при повороте системы координат в реальном трехмерном пространстве.

Необходимо подчеркнуть, что введение представления о четырехмерном пространстве с координатами x, y, z, τ имеет формальный характер. Оно отнюдь не равнозначно утверждению о существовании реального пространства четырех измерений.

Временна́я координата τ является чисто мнимой величиной, что подчеркивает ее особый характер и принципиальное отличие от пространственных координат x, y, z. Тем не менее, введение временно́й координаты τ имеет глубокий физический смысл. Оно указывает на неразрывную связь пространства и времени, о которой мы уже говорили ранее.

В дальнейшем мы должны будем привести к релятивистски-инвариантному виду ряд важных физических законов и соотношений. Для этого необходимо найти их четырехмерное обобщение. Как именно это следует делать, будет видно на конкретных примерах.

Предварительно убедимся, что преобразование поворота в четырехмерном пространстве (x, y, z, τ) идентично преобразованию Лоренца. Для простоты записи мы будем, как и прежде, считать, что движение инерциальных систем координат совершается в направлении совмещенных осей x и x'. При четырехмерной интерпретации это отвечает повороту в плоскости (x, τ) при неизменной ориентации осей (y, z).

Если обозначить через φ угол поворота, то аналогично (10,5) можно написать связь между исходными координатами (x, τ) и преобразованными координатами (x', τ'):

$$x = x' \cos\varphi - \tau' \sin\varphi, \tag{10,11}$$

$$\tau = \tau' \cos\varphi + x' \sin\varphi. \tag{10,12}$$

Угол поворота φ должен, очевидно, быть различным при разных значениях скорости v. Напишем преобразования (10,11) и (10,12) для начала координат системы K', т. е. точки $x' = 0$. Имеем, очевидно,

$$x = -\tau' \sin\varphi,$$

$$\tau = \tau' \cos\varphi.$$

Разделив верхнее выражение на нижнее, получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{x}{\tau},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = i\frac{x}{ct} = i\frac{v}{c}, \tag{10,13}$$

где v — скорость равномерного движения начала координат системы K' (точки $x' = 0$) относительно системы координат K. Из

равенства (10,13) можно без труда найти значения величин $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, входящих в формулы (10,11) и (10,12):

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi\cos\varphi = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

При этом

$$x = \frac{x' - i\frac{v}{c}\tau'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (10,14)$$

$$\tau = \frac{\tau' + i\frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (10,15)$$

Переходя от τ к времени t, мы видим, что формулы (10,14) и (10,15) совпадают с преобразованиями Лоренца.

Нелишне подчеркнуть условный характер графического изображения преобразований Лоренца. Угол поворота на рис. 23 является мнимым. Разумеется, изобразить поворот на мнимый угол мы не можем. Достоинства и недостатки графического представления преобразования Лоренца ясно видны из нижеследующего рассмотрения. Пусть в системе K' в некоторой точке x' покоятся часы. Это физическое событие в момент времени τ_1' изобразится первой точкой, в момент времени τ_2' — второй точкой на оси τ'. Промежуток времени $\Delta\tau'$ равен длине участка от точки 1 до точки 2. При переходе к системе K (повороте на угол φ) отрезок $\Delta\tau'$ переходит в отрезок $\Delta\tau$ на оси τ. Мы ясно видим, что бессмысленно говорить о том, какая система отсчета является более правильной и какой из промежутков времени, $\Delta\tau$ или $\Delta\tau'$, является истинным промежутком времени между двумя физическими событиями. Недостатком геометрического рассмотрения является то, что взаимоотношение между $\Delta\tau$ и $\Delta\tau'$

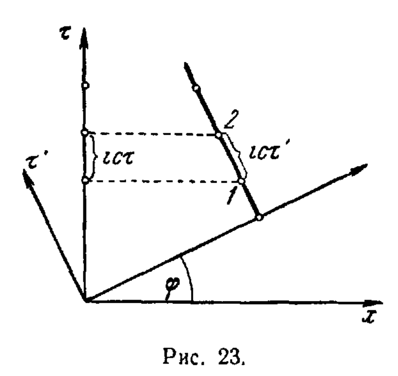


Рис. 23.

на чертеже является обратным истинному: на чертеже $\Delta\tau$ меньше, чем $\Delta\tau'$, в действительности же он больше в отношении $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Искажение возникает потому, что мы не можем изобразить на рисунке мнимое значение угла φ и заменяем его вещественным углом.

Аналогичную геометрическую интерпретацию допускают преобразование длины (рис. 24) и теорема сложения скоростей Эйнштейна. Сложению скоростей v_1 и v_2 соответствуют два последовательных поворота в плоскости (x, τ): повороту на угол φ_1 отвечает переход от системы K к системе K', движущейся со скоростью v_1 по отношению к K; повороту на угол φ_2 соответствует переход от системы K' к системе K'', имеющей скорость v_2 относительно K'. Следовательно, переходу от K к K'', т. е. сложению скоростей v_1 и v_2, отвечает поворот в пространстве (x, τ) на угол

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

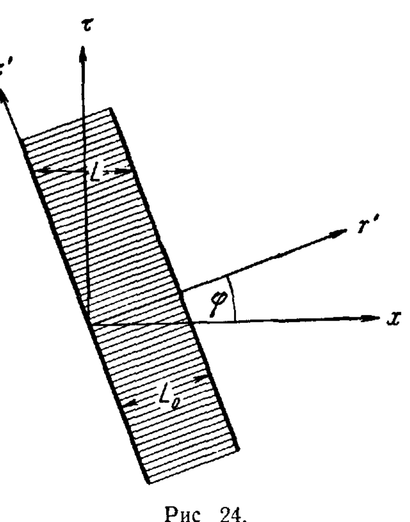


Рис 24.

Скорости v_1 и v_2 связаны с углами поворота φ_1 и φ_2 соотношением (10,13), в которое входит тангенс угла поворота. Углу φ отвечает $\operatorname{tg}\varphi$, равный

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}{1 - \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Подставляя в последнее соотношение значения $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2$ из (10,13), легко прийти к теореме сложения скоростей Эйнштейна.

§ 11. Четырехмерные векторы и тензоры. Четырехмерные скорость и ускорение

Мы перейдем теперь к составлению четырехмерных векторов, которые согласно результатам предыдущего параграфа должны фигурировать в релятивистски-инвариантных выражениях.

Введем, прежде всего, четырехмерный радиус-вектор r_α ($\alpha=1, 2, 3, 4$) — вектор, проекции которого на взаимно ортогональные оси координат равны x, y, z, τ.

При преобразовании Лоренца — повороте в четырехмерном пространстве — компоненты вектора r_α преобразуется по закону

$$r_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} r'_\beta,$$

так чтобы квадрат вектора r_α^2 оставался инвариантным:

$$r_\alpha^2 = r_\alpha r_\alpha = x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2 = \mathrm{const}.$$

Для этого коэффициенты преобразования Лоренца должны, очевидно, удовлетворять требованию

$$\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\lambda} = \delta_{\beta\lambda},$$

часто именуемому условием ортогональности. Действительно, при этом имеем

$$r_\alpha^2 = (\gamma_{\alpha\beta} r'_\beta)(\gamma_{\alpha\lambda} r'_\lambda) = \gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\lambda} r'_\beta r'_\lambda = \delta_{\beta\lambda} r'_\beta r'_\lambda = (r'_\beta)^2.$$

Это требование накладывает существенное ограничение на коэффициенты преобразования $\gamma_{\alpha\beta}$. В частном случае, когда преобразование Лоренца отвечает вращению в плоскости $(x_\lambda\tau)$, при неизменных значениях y и z, для $\gamma_{\alpha\beta}$ легко написать, пользуясь (10,14) и (10,15):

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{vmatrix}. \qquad (11,1)$$

Обобщим определение вектора r_α на случай произвольного 4-вектора. По определению, 4-вектором a_α называется совокупность величин (проекций) a_x, a_y, a_z, a_τ, которые при преобразованиях Лоренца — повороте осей в четырехмерном простран-

стве — преобразуются по тому же закону, что и компоненты радиуса-вектора r_α, т. е. по закону

$$a_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} a'_\beta.$$

Если ограничиться поворотами в ($x\tau$)-плоскости, то, пользуясь определением $\gamma_{\alpha\beta}$ (или аналогией с (10,14) и (10,15)), можно написать закон преобразования в виде

$$a_x = \frac{a'_x - i\frac{v}{c} a'_\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{11,2}$$

$$a_y = a'_y, \qquad a_z = a'_z, \tag{11,3}$$

$$a_\tau = \frac{a'_\tau + i\frac{v}{c} a'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{11,4}$$

Для четырехмерных векторов, как и для трехмерных, можно ввести понятие скалярного произведения

$$c = a_\alpha \cdot b_\alpha = \boldsymbol{ab} + a_\tau b_\tau,$$

где c — скалярная величина. Векторы a_α и b_α называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Мы не касаемся других векторных алгебраических операций, поскольку они не понадобятся нам в дальнейшем.

Важной характеристикой 4-вектора является скаляр, отвечающий квадрату вектора, т. е. скалярному произведению:

$$a_\alpha \cdot a_\alpha = a_\alpha^2 = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z + a_\tau a_\tau = \text{invar}. \tag{11,5}$$

Инвариантность a_α^2 непосредственно ясна из геометрических соображений: преобразования Лоренца являются поворотом в четырехмерном пространстве.

Квадрат 4-вектора как и квадрат 4-радиуса-вектора r_α^2, не является существенно положительным. Если квадрат вектора $a_\alpha^2 > 0$, то a_α мы будем именовать пространственноподобным вектором. Вектор, у которого $a_\alpha^2 < 0$, именуется времениподобным.

Рассмотрим определение двух важных 4-векторов: 4-вектора скорости и 4-вектора ускорения.

Мы должны построить такой 4-вектор скорости, который образуется в виде производной от 4-радиуса-вектора по некоторому инварианту — скаляру. Выбор этого скаляра определяется

тем, что при малых скоростях $v \ll c$ пространственные компоненты 4-вектора скорости должны превращаться в компоненты обычной скорости.

В силу сказанного, естественно определить 4-вектор скорости соотношением

$$u_\alpha = \frac{dr_\alpha}{dt_0}. \qquad (11,6)$$

Для компонент 4-скорости имеем

$$u_x = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (11,7)$$

$$u_y = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (11,8)$$

$$u_z = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (11,9)$$

$$u_\tau = \frac{d\tau}{dt_0} = \frac{ic\, dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (11,10)$$

При $v \ll c$ три пространственные компоненты скорости совпадают с компонентами обычной трехмерной скорости. Четвертая компонента скорости u является чисто мнимой. С точностью до множителя (ic) она представляет коэффициент перехода от собственного времени dt_0 к времени dt.

Важной особенностью 4-вектора скорости является то, что его компоненты не являются независимыми друг от друга. Действительно, составив квадрат вектора u_α^2, находим

$$u_\alpha^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_\tau^2 = -c^2. \qquad (11,11)$$

Таким образом, 4-вектор скорости является времениподобным вектором, а его абсолютная величина является заданной постоянной. Это свойство 4-вектора связано, разумеется, с тем, что скорость движения материальных тел не может превышать скорость света.

Определим теперь четырехмерное ускорение w_α как

$$w_\alpha = \frac{du_\alpha}{dt_0}. \qquad (11,12)$$

Выражая w_α через скорость $\boldsymbol{v}$ и ускорение $\dot{\boldsymbol{v}}$, находим его компоненты:

$$w_x = \frac{du_x}{dt}\frac{dt}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\dot{v}_x}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{v_x(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \qquad (11,13)$$

$$w_y = \frac{\dot{v}_y}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{v_y(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \qquad (11,14)$$

$$w_z = \frac{\dot{v}_z}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{v_z(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \qquad (11,15)$$

$$w_\tau = \frac{dt}{dt_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{i}{c}\,\frac{\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}. \qquad (11,16)$$

Простое вычисление показывает, что квадрат четырехмерного ускорения равен

$$w_\alpha^2 = \frac{\dot{v}^2 - \left[\frac{\boldsymbol{v}}{c}, \dot{\boldsymbol{v}}\right]^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3} > 0. \qquad (11,17)$$

Таким образом 4-ускорение представляет пространственноподобный вектор.

Дифференцируя равенства (11,11) по t_0, находим

$$u_\alpha \frac{du_\alpha}{dt_0} = u_\alpha w_\alpha = 0. \qquad (11,18)$$

Последнее равенство означает, что векторы u_α и w_α ортогональны друг к другу в четырехмерном пространстве.

Наряду с определением 4-векторов можно ввести 4-тензоры. 4-тензором второго ранга называется совокупность величин $A_{\alpha\beta}$, которые преобразуются как произведение двух векторов $a_\alpha \cdot b_\beta$, т. е.

$$A_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\lambda}\gamma_{\beta\mu}A'_{\lambda\mu}. \qquad (11,19)$$

Тензор $A_{\alpha\beta}$ представляет совокупность шестнадцати величин (вместо девяти у тензора второго ранга в трехмерном пространстве). Как и у 4-вектора, τ-компоненты 4-тензора, т. е. величины $A_{\alpha\tau}$, являются чисто мнимыми, а все остальные — вещественными. Всякий тензор $A_{\alpha\beta}$ можно разложить на симметричную и антисимметричную (относительно перестановки значков) части, написав

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}) = A^{s}_{\alpha\beta} + A^{as}_{\alpha\beta}.$$

Нетрудно видеть, что

$$A^{s}_{\alpha\beta} = A^{s}_{\beta\alpha},$$

$$A^{as}_{\alpha\beta} = - A^{as}_{\alpha\beta}.$$

Преобразования Лоренца оставляют это разбиение неизменным.

Важную роль в дальнейшем будут играть чисто антисимметричные тензоры. Из условия антисимметрии вытекает, что у таких тензоров имеется шесть независимых компонент, и их можно представить в виде таблицы

$$A^{as}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & A_{xy} & A_{xz} & A_{x\tau} \\ -A_{xy} & 0 & A_{yz} & A_{y\tau} \\ -A_{xz} & -A_{yz} & 0 & A_{z\tau} \\ -A_{x\tau} & -A_{y\tau} & -A_{z\tau} & 0 \end{vmatrix}. \qquad (11,20)$$

Пользуясь свойствами величин $\gamma_{\alpha\beta}$, можно найти закон преобразования компонент 4-тензора. Мы ограничимся случаем антисимметричного тензора и подробно распишем одну из компонент

$$A_{xy} = \gamma_{x\lambda}\gamma_{y\mu}A'_{\lambda\mu} = \gamma_{xx}\gamma_{yy}A'_{xy} + \gamma_{x\tau}\gamma_{yy}A'_{\tau y} = \frac{A'_{xy} - i\frac{v}{c}A'_{y\tau}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Остальные слагаемые обращаются в нуль в силу определения $\gamma_{\alpha\beta}$ и $A^{as}_{\alpha\beta}$. Закон преобразования других компонент легко найти таким же способом. В результате для преобразования компонент антисимметричного тензора получим

$$\begin{aligned} &A_{xy} = \frac{A'_{xy} - i\frac{v}{c}A'_{y\tau}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad A_{x\tau} = A'_{x\tau}, \\ &A_{xy} = \frac{A'_{xz} - i\frac{v}{c}A'_{z\tau}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad A_{y\tau} = \frac{A'_{y\tau} + i\frac{v}{c}A'_{xy}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ &A_{yz} = A'_{yz}, \qquad A_{z\tau} = \frac{A'_{z\tau} + i\frac{v}{c}A'_{xz}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \qquad (11,21)$$

Важной характеристикой 4-тензоров являются их инварианты,

т. е. комбинации, остающиеся инвариантными при преобразованиях Лоренца. У антисимметричных тензоров второго ранга, которые нам понадобятся в дальнейшем, инвариантами являются скалярные величины:

1) Произведение $A_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$ (квадратичный инвариант).

2) Произведение $A_{\alpha\gamma}A_{\gamma\mu}A_{\mu\alpha}$ (кубический инвариант).

3) Произведение $A_{\alpha\lambda}A_{\lambda\mu}A_{\mu\nu}A_{\nu\alpha}$ (биквадратный инвариант).

Остальные скалярные соотношения выражаются через эти три инварианта или равны нулю. Так, например, скаляр $A_{\alpha\alpha}$, представляющий сумму диагональных элементов, равен нулю при антисимметричных тензорах.

ГЛАВА II

МЕХАНИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 12. Уравнения динамики материальной точки

Перейдем теперь к рассмотрению динамики материальной точки в теории относительности.

Как и в классической механике, под материальной точкой понимают тело, размерами которого можно пренебречь. Часто, имея в виду физические приложения, мы будем говорить не о *движении материальной точки*, а о движении частицы.

Прежде всего заметим, что закон инерции Ньютона является инвариантным относительно преобразований Лоренца. Действительно, если в некоторой инерциальной системе координат K частица движется неускоренно, то при линейном преобразовании координат к другой системе K' движение ее также останется неускоренным. Однако уравнения динамики, инвариантные относительно преобразования Галилея, не обладают свойствами инвариантности относительно преобразований Лоренца.

Для нахождения релятивистски-инвариантной формы уравнений динамики их необходимо представить в виде четырехмерного соотношения типа (10,9).

Инерционные свойства тела или частицы можно охарактеризовать некоторым скаляром — инвариантной массой или массой покоя m. Значение массы покоя является константой, характерной для каждого вида элементарных частиц. 4-импульс частицы p_α определим как

$$p_\alpha = m u_\alpha. \qquad (12,1)$$

В компонентах имеем

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{m v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, & p_y &= \frac{m v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ p_z &= \frac{m v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, & p_\tau &= \frac{icm}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (12,2)$$

В предельном случае $v \ll c$ три пространственные компоненты импульса переходят в обычные компоненты импульса частицы:

$$p_x = mv_x; \quad p_y = mv_y; \quad p_z = mv_z.$$

Естественным релятивистским обобщением уравнений динамики Ньютона являются уравнения

$$\frac{dp_\alpha}{dt_0} = \frac{d}{dt_0} mu_\alpha = F_\alpha, \tag{12,3}$$

где F_α — некоторый четырехмерный вектор, именуемый четырехмерной силой или силой Минковского, и α пробегает значения x, y, z, τ. Релятивистски-инвариантный характер уравнений (12,3) непосредственно следует из сказанного в § 11: в правую и левую части (12,3) входят четырехмерные векторы, изменяющиеся при четырехмерном повороте (преобразовании Лоренца) по одному и тому же закону, и скаляр m, не изменяющийся вовсе.

В дальнейшем соотношения (12,3) мы будем именовать уравнениями релятивистской динамики.

Распишем уравнения релятивистской динамики в компонентах. Имеем

$$\frac{dp_x}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_x$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_x \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{12,4}$$

При $v \ll c$ уравнение (12,4) должно превращаться в обычное уравнение Ньютона.

В левой части формулы (12,4) стоит производная от импульса по обычному времени. Потребуем, чтобы в правой части уравнения (12,4) стояла компонента обычной силы $\mathcal{F}_x$. Следовательно, компонента 4-силы F_x связана с обычной силой $\mathcal{F}_x$ классической механики соотношением

$$F_x \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \mathcal{F}_x. \tag{12,5}$$

Тогда формула (12,4) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathcal{F}_x. \tag{12,6}$$

При $v \ll c$ формула (12,6) превращается в уравнение Ньютона.

Аналогичные соотношения можно написать для двух других пространственных компонент:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathscr{F}_y, \tag{12,7}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathscr{F}_z. \tag{12,8}$$

Напишем теперь четвертую компоненту соотношения (12,3). Пользуясь (11,10), находим

$$\frac{d}{dt}\frac{icm}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=F_\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{12,9}$$

Для нахождения физического смысла компоненты 4-силы F_τ умножим (12,3) скалярно на u_α и просуммируем по всем компонентам α $(\alpha = x, y, z, \tau)$.

Имеем, очевидно, в силу (11,18)

$$u_\alpha\frac{dmu_\alpha}{dt_0}=F_\alpha u_\alpha=0$$

или

$$F_xu_x+F_yu_y+F_zu_z+F_\tau u_\tau=0.$$

Подставляя сюда значения F_x, F_y, F_z, u_x, u_y, u_z и u_τ, имеем

$$\mathscr{F}_x\frac{v_x}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}+\mathscr{F}_y\frac{v_y}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}+$$
$$+\mathscr{F}_z\frac{v_z}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2}+F_\tau\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=0.$$

Отсюда следует, что

$$F_\tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{i}{c}\mathscr{F}v.$$

Правая сторона последнего уравнения содержит работу, производимую силой $\mathscr{F}$ над частицей в единицу времени. Таким образом, компонента 4-силы F_τ оказывается связанной с работой трехмерной силы $\mathscr{F}$:

$$F_\tau=\frac{i}{c}\frac{\mathscr{F}v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{12,10}$$

Пользуясь (12,10), представим (12,9) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathscr{F}v. \qquad (12,11)$$

В правой части (12,11) произведение $\mathscr{F}v$ дает работу силы над частицей, произведенную в единицу времени. Следовательно, в левой части этого уравнения стоит изменение энергии в единицу времени.

Мы определим, таким образом, полную энергию частицы как

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (12,12)$$

Найдем, наконец, выражение для ускорения. Уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathscr{F}$$

или

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{c^2}\frac{dE}{dt}=\mathscr{F}. \qquad (12,13)$$

С помощью (12,11) можно переписать (12,13) в виде

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m}\left\{\mathscr{F}-\frac{v}{c^2}(\mathscr{F}v)\right\}. \qquad (12,14)$$

§ 13. Импульс, энергия и масса в релятивистской механике

Обсудим теперь свойства введенных в предыдущем параграфе механических величин — массы покоя, импульса и энергии.

Связь между массой покоя m и трехмерным импульсом p определяется согласно (12,2) соотношением

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (13,1)$$

которое при $v \ll c$ совпадает с обычным выражением классической механики. Отсюда, казалось бы, можно было заключить, что скаляр m совпадает с массой тела, движущегося с малой скоростью.

Однако, как будет видно из дальнейшего, свойства инвариантной массы (массы покоя) m существенно отличаются от тех, которые приписываются массе в классической механике. Именно, масса покоя не удовлетворяет закону сохранения. Существуют физические процессы, при которых масса покоя частиц до начала процесса не равна массе частиц, остающихся после окончания процесса.

Примеры такого рода явлений будут приведены ниже. Необычность (с точки зрения представлений о массе в классической механике) и возможность несохранения массы покоя m особенно ясны из того факта, что наличие массы покоя не является обязательным свойством частиц.

Именно, не подлежит сомнению существование в природе элементарных частиц, масса покоя которых равна нулю. Такими частицами являются световые кванты (фотоны). По всей совокупности имеющихся экспериментальных (см. § 16) и теоретических данных частицами с массой покоя, равной нулю, являются нейтрино — нейтральные частицы, играющие важную роль в ядерных процессах (в частности, возникающие при β-распаде).

Ясно, что если в процессах взаимного превращения, которые играют важнейшую роль в мире элементарных частиц, имеются процессы перехода частиц с массой покоя, отличной от нуля, в частицы с массой покоя, равной нулю, то масса покоя не сохраняется. Такие процессы действительно происходят в природе и некоторые из них хорошо изучены. Соответствующие примеры будут приведены в § 16.

Несмотря на свои необычные свойства, масса покоя является весьма важной характеристикой тел.

Каждая элементарная частица имеет вполне определенное, не изменяющееся от экземпляра к экземпляру значение массы покоя (включая и значение, равное нулю). Поэтому масса покоя является фундаментальной характеристикой элементарной частицы.

Точно так же, как о массе покоя элементарной частицы, можно говорить о массе покоя тела, состоящего из многих элементарных частиц. Если пренебречь размерами тела, можно считать его материальной точкой с массой покоя m. Вопрос о том, как связана масса покоя тела с массами покоя образующих его частиц, будет обсуждаться ниже.

Часто наряду с массой покоя вводят массу $m(v)$, именуемую релятивистской массой или просто массой и определяемую как

коэффициент пропорциональности между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{p}=m(v)\,\boldsymbol{v}, \tag{13,2}$$

где

$$m(v)=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13,3}$$

Релятивистская масса зависит от скорости и потому является функцией не только свойств частицы, но и состояния ее движения.

Нужно, однако, подчеркнуть, что релятивистская масса $m(v)$ не является релятивистски-инвариантной величиной. Действительно, величина $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ не является инвариантной (закон преобразования $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ проще всего найти из (9,4), учитывая, что dt_0 — инвариант, а закон преобразования времени dt известен).

Если некоторая частица движется по отношению к двум системам отсчета с различными скоростями, то ее масса, измеренная приборами, находящимися в этих системах отсчета, будет различной.

Энергия частицы была определена соотношением (12,12). Прежде чем перейти к обсуждению этого соотношения, заметим, что из (12,12) и (12,2) вытекает следующее важное соотношение, связывающее временну́ю компоненту 4-вектора импульса и энергию

$$p_\tau=i\frac{E}{c}. \tag{13,4}$$

Таким образом p_τ с точностью до постоянного множителя совпадает с энергией частицы. Важность соотношения (13,4) заключается в том, что с его помощью импульс и энергия оказываются объединенными в один 4-вектор, который можно назвать 4-вектором энергии и импульса:

$$p_\alpha=\left(p_x,\ p_y,\ p_z,\ i\frac{E}{c}\right). \tag{13,5}$$

Компоненты 4-вектора энергии и импульса не являются релятивистски-инвариантными величинами. Как трехмерный импульс, так и энергия оказываются относительными величинами. При переходе от одной инерциальной системы к другой компоненты 4-вектора энергии и импульса преобразуются по

формулам (11,1)—(11,4), т. е.

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{E'}{c^2} v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{13,6}$$

$$p_y = p'_y, \tag{13,7}$$

$$p_z = p'_z, \tag{13,8}$$

$$E = \frac{p_\tau c}{i} = \frac{E' + v p'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13,9}$$

Эти соотношения показывают, что при преобразованиях Лоренца энергия и компоненты импульса выражаются друг через друга. Инвариантной величиной является не энергия и импульс порознь, но, как всегда, квадрат 4-вектора, т. е. величина

$$p_a^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + p_\tau^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = \text{invar}. \tag{13,10}$$

Подставляя в (13,10) значения компонент импульса (12,2) и энергии (12,12), можно легко вычислить значение этого инварианта, которое оказывается равным

$$I = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2c^2. \tag{13,11}$$

Таким образом, 4-вектор энергии и импульса является времениподобным вектором.

Вернемся теперь к определению энергии частицы (12,12). При $v \ll c$ формула (12,12) переходит в

$$E = mc^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \ldots\right) \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \tag{13,12}$$

Второе слагаемое совпадает с кинетической энергией частицы в классической механике. Однако при $v=0$ энергия частицы вне поля сил

$$E_0 = mc^2 \tag{13,13}$$

оказывается отличной от нуля.

На первый взгляд могло бы показаться, что такое определение энергии является произвольным. Поскольку энергия найдена из дифференциального соотношения (12,11), ее можно определить как

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \text{const} \tag{13,14}$$

Если выбрать произвольную постоянную равной $(-mc^2)$, то определенная таким образом энергия при $v \ll c$ будет совпадать с энергией частицы в классической механике.

В действительности, однако, легко показать, что const следует положить равной нулю, как это сделано в (12,12). Мы не можем заранее требовать, чтобы все без исключения величины релятивистской механики приобретали классический вид при $v \ll c$. Однако во всяком случае несомненно, что при $v \ll c$ преобразования Лоренца должны совпасть с преобразованиями Галилея, и, следовательно, должен иметь место обычный закон сложения скоростей. Для того чтобы преобразование (13,6) импульса при $v \ll c$ переходило в теорему сложения скоростей классической механики, должно выполняться условие $E' \to mc^2$. При этом из (13,6) следует

$$p_x = p'_x + mv$$

или

$$v_x = v'_x + v.$$

Если бы энергия была определена формулой (13,14), а не (12,12) и при $v \ll c$ стремилась к пределу $E' \to 0$, то преобразование Лоренца для скорости не переходило бы в формулу сложения скоростей классической механики.

Таким образом, теория относительности приводит к новому, весьма важному выводу: энергия покоящейся частицы равна mc^2. Величину mc^2 естественно назвать энергией покоя. Всякая частица или тело, обладающее массой покоя m, обладает вместе с тем энергией покоя mc^2.

Энергию движущейся частицы можно связать с релятивистской массой соотношением

$$E = m(v)c^2, \tag{13,15}$$

аналогичным (13,13).

Формулы (13,13) и (13,15), именуемые часто формулами Эйнштейна, показывают, что всякая частица, обладающая массой m, одновременно имеет энергию E. Энергия и масса неразрывно связаны между собой и пропорциональны друг другу. Часто это утверждение называют законом эквивалентности массы и энергии.

Не следует, разумеется, смешивать понятия эквивалентности и тождественности. Энергия и масса являются различными физическими характеристиками частиц, и закон эквивалентности устанавливает лишь их пропорциональность друг другу. Взаимоотношение между массой и энергией сходно с взаимоотношением между тяжелой и инертной массой в классической механике: обе массы неразрывно связаны между собой и

пропорциональны друг другу, но являются вместе с тем разными характеристиками[1].

В настоящее время как формула Эйнштейна (13,15), так и формулы (13,2) и (13,3) подтверждены обширнейшим опытным материалом и их достоверность не подлежит никакому сомнению.

Если на частицу не действуют внешние силы, то имеет место закон сохранения энергии

$$\frac{dE}{dt}=0 \quad \text{или} \quad E=\text{const} \tag{13,16}$$

и импульса

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=0. \tag{13,17}$$

Из формулы Эйнштейна следует, что одновременно с законом сохранения энергии автоматически имеет место закон сохранения релятивистской массы

$$m(v)=\text{const}. \tag{13,18}$$

В отличие от классической физики, где существуют два независимых закона сохранения — закон сохранения энергии и закон сохранения массы, в теории относительности имеет место лишь один закон сохранения — закон сохранения энергии или релятивистской массы.

К физической интерпретации закона сохранения энергии в теории относительности мы вернемся еще в § 15—17.

В заключение укажем, что обычно E именуют полной энергией. Это не должно повести к недоразумениям: в E не включена потенциальная энергия частицы во внешнем поле, если таковое действует на частицы. Иногда вводят кинетическую энергию $E_{\text{кин}}$, определяя ее как энергию движения частицы, т. е.

$$E_{\text{кин}}=E-mc^2=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)=[m(v)-m]\,c^2. \tag{13,19}$$

Приведем еще полезную формулу, связывающую энергию и трехмерный импульс. Из (12,12) и (13,1) непосредственно следует

$$\mathbf{p}=\frac{E\mathbf{v}}{c^2}. \tag{13,20}$$

С помощью формулы (13,13) можно найти выражение классического радиуса электрона r_0, введенного в ч. I.

[1]) Подробнее см. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, 1955, стр. 144.

Мы обсуждали уже в § 18 ч. I фундаментальную трудность классической теории поля, связанную с проблемой собственной энергии электрона. Для энергии собственного поля электрона получается выражение

$$U = \frac{e}{r_0},$$

расходящееся при $r_0 \to 0$.

Если допустить, что вся масса электрона связана с массой создаваемого им поля, т. е. положить

$$U \sim mc^2$$

для покоящегося электрона, то для r_0 получается значение

$$r_0 \sim \frac{e^2}{mc^2},$$

совпадающее с неравенством (29,6) ч. I. Нужно, однако, иметь в виду, что проблема собственной энергии введением радиуса электрона отнюдь не разрешается.

Мы подчеркивали, что в теории относительности никакое тело, и в том числе электрон, нельзя рассматривать как идеально твердый шарик заданного радиуса. Поэтому величину r_0 нельзя трактовать как истинный «радиус» электрона. Это — минимальный размер области пространства, в которой еще можно пользоваться соотношениями классической теории поля, предел применимости ее понятий, заложенный в ней самой. Напомним, что, как было уже сказано в § 29 ч. I, фактически предел применимости классической теории поля наступает при значительно бо́льших пространственных масштабах.

§ 14. Уравнения Лагранжа; функции Лагранжа и Гамильтона

Как и в классической механике, уравнения движения можно записать в обобщенных координатах в форме уравнений Лагранжа. Для этого прежде всего следует составить функцию Лагранжа.

По определению, функция Лагранжа является величиной, производные от которой по координатам скорости представляют компоненты импульса, а производные по координатам — компоненты силы.

Имеем поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{14,1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \mathcal{F}_i = -\frac{\partial U_{\text{поля}}}{\partial x_i}, \tag{14,2}$$

где $U_{\text{поля}}$ — потенциальная энергия внешнего поля, зависящая только от координат частицы. Уравнениям (14,1) и (14,2) удовлетворяет функция Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - U_{\text{поля}}. \tag{14,3}$$

Мы видим, что в релятивистской механике функция Лагранжа не представляет более разности между кинетической энергией и потенциальной.

С помощью функции Лагранжа можно написать уравнения Лагранжа в обобщенных координатах q_i:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{14,4}$$

или $\frac{d}{dt}p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, где $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ — обобщенные импульсы.

Зная функцию Лагранжа, можно найти функцию Гамильтона H. Если функция Лагранжа явно от времени не зависит, то, по определению,

$$H = \sum \dot{q}_i p_i - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + U_{\text{поля}} =$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + U_{\text{поля}}. \tag{14,5}$$

Скорость может быть выражена через импульс с помощью соотношений (12,2), из которых следует, что

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = p^2 = \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Простое вычисление дает

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + U_{\text{поля}}. \tag{14,6}$$

Формула (14.6) показывает, что в релятивистской механике функция Гамильтона совпадает с полной энергией, выраженной через импульс частицы.

При больших значениях импульса, когда $p \gg mc$, выражение для функции Гамильтона свободной частицы допускает важное упрощение:

$$H \approx pc. \tag{14,7}$$

Движение с таким большим импульсом, при котором справедлива приближенная формула (14,7), называется ультрарелятивистским. Совершенно ясно, что для частиц с массой покоя, равной нулю, формула (14,7) является точной. Мы будем ею неоднократно пользоваться при рассмотрении процессов с участием световых квантов (фотонов).

§ 15. Механика системы частиц в теории относительности

До сих пор мы ограничивались рассмотрением одной частицы. Построение механики системы частиц в теории относительности является гораздо более сложной задачей. Тем не менее и в последнем случае можно установить ряд важных общих законов.

Систему частиц как целое можно характеризовать ее энергией E, импульсом $\boldsymbol{P}$ и массой покоя M. Если нас интересует движение системы как целого, то, пренебрегая внутренними процессами в системе и ее пространственной протяженностью, можно считать систему одной материальной точкой. Для системы как целого можно написать равенство

$$E = Mc^2, \tag{15,1}$$

где M — масса покоя всей системы. Поскольку всегда $M > 0$, энергия системы частиц, как и энергия одной свободной частицы, является существенно положительной величиной.

Однако невозможно в общем случае найти выражения для энергии и импульса системы через соответствующие величины для отдельных частиц или найти общие соотношения между энергией и импульсом. Взаимодействие, существующее между частицами, может приводить, например, к зависимости энергии E от времени (напомним, что E означает сумму энергии покоя и кинетической энергии, но не включает энергию взаимодействия). Поэтому фактическое построение механики системы частиц ограничено сравнительно немногими простейшими случаями. К ним относятся:

1) система невзаимодействующих частиц;

2) система частиц, находящихся на больших расстояниях друг от друга и движущихся с весьма большими скоростями;

3) системы частиц со слабым электромагнитным взаимодействием.

Последний случай будет рассмотрен ниже, в § 25.

В системе невзаимодействующих частиц энергия и импульс обладают аддитивными свойствами, так что

$$E=\sum_{i=1}^{N}E_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_ic^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}, \qquad (15,2)$$

$$\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i=\sum\frac{m_i\boldsymbol{v}_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}, \qquad (15,3)$$

где N — число частиц в системе и индекс i относится к каждой частице. При этом скорости всех частиц постоянны, а следовательно, постоянны во времени полная энергия и полный импульс системы.

Нетрудно видеть, что величины E и $\boldsymbol{P}$ образуют 4-вектор энергии и импульса. Действительно, можно написать

$$E=\sum\frac{m_ic^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}=\text{const}, \qquad (15,4)$$

$$\boldsymbol{P}=\sum\frac{m_i\boldsymbol{v}_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}=\text{const}. \qquad (15,5)$$

Поэтому можно ввести 4-вектор

$$P_\alpha=\sum_{i=1}^{N}p_\alpha^{(i)}. \qquad (15,6)$$

Каждый член суммы $p_\alpha^{(i)}$ является 4-вектором энергии и импульса отдельной частицы.

Прежде чем перейти к обсуждению следствий из этих положений, покажем, что в наиболее важном втором случае свойства системы взаимодействующих частиц можно свести к случаю невзаимодействующих частиц.

Рассмотрим систему частиц, движущихся на больших расстояниях друг от друга. Поскольку, по предположению, скорости частиц весьма велики, порядка скорости света, энергия $E_i=\frac{m_ic^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}$, вообще говоря, велика по сравнению с энергией их взаимодействия на больших расстояниях. Поэтому можно считать, что, как и для свободных частиц, полная энергия и импульс системы выражаются формулами (15,4) и (15,5).

При сближении частиц (часто его называют столкновением) взаимодействие между частицами может становиться не малым и формулы (15,4) и (15,5) теряют свою применимость. Однако после того как столкнувшиеся частицы вновь расходятся на большие расстояния, формулы (15,4) и (15.5) опять применимы. Очевидно, кроме того, что полная энергия и импульс разошедшихся частиц не могут отличаться от этих величин до взаимодействия. Поэтому можно записать законы сохранения в виде

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} = \sum_{k=1}^{N^*} \frac{m_k c^2}{\sqrt{1-\frac{v_k^2}{c^2}}}, \qquad (15,7)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} = \sum_{k=1}^{N^*} \frac{m_k v_k}{\sqrt{1-\frac{v_k^2}{c^2}}}. \qquad (15,8)$$

Здесь индексы i и k относятся к частицам до и после взаимодействия. Звездочка в суммах справа подчеркивает тот факт, что число частиц в системе до и после взаимодействия может быть различным (ср. § 17).

Величины E и $\boldsymbol{P}$, относящиеся к частицам до и после взаимодействия, образуют 4-вектор энергии и импульса. Согласно (13,11) можно написать инвариант для этого 4-вектора:

$$I = P_\alpha^2 = \sum_\alpha \Big(\sum_i p_\alpha^{(i)} \Big)^2 = \mathrm{invar} = -M^2c^2. \qquad (15,9)$$

Постоянство инварианта I выражает общий закон сохранения энергии и импульса.

Преобразуем этот инвариант к виду, удобному для практического использования. Имеем

$$\sum_\alpha \Big(\sum_i p_\alpha^{(i)} \Big)^2 = \sum_{i,\,\alpha} (p_\alpha^{(i)})^2 + 2 \sum_{k<i,\,\alpha} p_\alpha^{(i)} p_\alpha^{(k)} =$$

$$= \sum_i (\boldsymbol{p}_i)^2 - \sum_i \frac{E_i^2}{c^2} + 2 \sum_{k<i} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_k - 2 \sum_{k<i} \frac{E_i E_k}{c^2}.$$

При этом мы провели суммирование по индексу α 4-вектора и воспользовались формулой (13,4) для p_τ. Перегруппировывая члены в сумме, находим

$$I = \Big[\sum_i (\boldsymbol{p}_i)^2 + 2 \sum_{k<i} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_k \Big] - \frac{1}{c^2} \Big[\sum E_i^2 + 2 \sum_{k<i} E_i E_k \Big] =$$

$$= \Big(\sum_i \boldsymbol{p}_i \Big)^2 - \frac{1}{c^2} \Big(\sum_i E_i \Big)^2 = \boldsymbol{P}^2 - \frac{E^2}{c^2} = -M^2c^2. \qquad (15,10)$$

Таким образом, можно написать

$$P^2 - \frac{E^2}{c^2} = (P^*)^2 - \frac{(E^*)^2}{c^2}, \qquad (15,11)$$

где звездочками отмечены значения величин после взаимодействия. Компоненты 4-вектора P_α преобразуются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой по общим формулам (13,6)—(13,9).

Часто оказывается удобным пользоваться системой координат, в которой полный импульс равен нулю. Такая система отсчета, как и в классической механике, называется системой центра инерции $K^{(\text{ц. и})}$.

Пусть задана некоторая система отсчета K, в которой система частиц имеет импульс $\boldsymbol{P}$ и энергию E. Найдем скорость движения системы центра инерции $V^{(\text{ц. и})}$ по отношению к системе K. Скорость $V^{(\text{ц. и})}$ характеризует движение системы как целого. Для простоты допустим, что скорость центра инерции системы направлена по оси x. Тогда по (13,6)—(13,9) имеем

$$P_x^{(\text{ц. и})} = 0 = \frac{P_x - V^{(\text{ц. и})}\dfrac{E}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{(V^{(\text{ц. и})})^2}{c^2}}}, \qquad (15,12)$$

$$P_y^{(\text{ц. и})} = 0 = P_y, \qquad P_z^{(\text{ц. и})} = 0 = P_z, \qquad (15,13)$$

$$E^{(\text{ц. и})} = \frac{E - V^{(\text{ц. и})}P_x}{\sqrt{1 - \dfrac{(V^{(\text{ц. и})})^2}{c^2}}}. \qquad (15,14)$$

Индексом ц. и. снабжены величины, отнесенные к системе центра инерции.

Из (15,12) получаем

$$V^{(\text{ц. и})} = \frac{P_x c^2}{E}. \qquad (15,15)$$

В общем случае произвольной ориентации вектора скорости центра инерции вместо (15,15) получается

$$\boldsymbol{V}^{(\text{ц. и})} = \frac{\boldsymbol{P}c^2}{E}. \qquad (15,16)$$

В отличие от классической механики, в релятивистской механике скорость центра инерции нельзя представить как производную по времени от координаты центра инерции:

$$\boldsymbol{V}^{(\text{ц. и})} \neq \frac{d}{dt}\boldsymbol{R}^{(\text{ц. и})}.$$

Действительно, величину $\frac{Pc^2}{E}$ нельзя, вообще говоря, представить в виде производной по времени от какой-либо величины. Поэтому понятие координаты центра инерции для произвольной системы взаимодействующих частиц в релятивистской механике ввести невозможно. В § 25 будет показано, что в случае системы слабовзаимодействующих частиц можно, в известном приближении, пользоваться понятием о центре инерции.

Обсудим еще некоторые свойства массы покоя системы частиц.

Пусть имеется система центра инерции K'. Запишем инвариант 4-вектора энергии и импульса (15,10) для этой системы в виде

$$\left(\boldsymbol{P}^{(\text{ц. и})}\right)^2 c^2 - \left(E^{(\text{ц. и})}\right)^2 = - M^2 c^4. \tag{15,17}$$

Поскольку $\boldsymbol{P}^{(\text{ц. и})} = 0$, формула (15,17) приобретает в системе K' вид

$$E^{(\text{ц. и})} = Mc^2, \tag{15,18}$$

где M — масса покоя.

С другой стороны, по общей формуле (15,2)

$$E^{(\text{ц. и})} = \sum \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}},$$

где v_i — скорость i-й частицы, отнесенная к системе центра инерции. Тогда для массы покоя получаем

$$M = \sum \frac{m_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}. \tag{15,19}$$

Мы видим, что масса покоя системы частиц не равна сумме масс покоя отдельных частиц $\sum m_i$, но зависит от скоростей их движения по отношению к системе центра инерции.

Рассмотрим, например, случай, когда система частиц представляет идеальный газ. Идеальный газ удовлетворяет, очевидно, тем требованиям к характеру взаимодействия между частицами, о которых мы говорили выше. Тогда, согласно (15,17), масса покоя газа M зависит от внутреннего движения газовых частиц или, что то же самое, от температуры газа.

Различие между массой покоя системы M и суммой масс покоя образующих систему частиц $\sum m_i$, имеет важнейшее значение для процессов, происходящих в природе. Мы обсудим это обстоятельство в следующем параграфе.

В общем случае системы частиц с произвольным взаимодействием формула (15,2) не является выражением для полной

энергии системы; она дает лишь сумму энергии покоя и кинетической энергии частиц.

В полную энергию необходимо ввести энергию взаимодействия между частицами. Оказывается, однако, что в релятивистской механике не существует понятия потенциальной энергии взаимодействия системы частиц. Действительно, потенциальная энергия взаимодействия частиц должна зависеть только от их положения. Если положение какой-либо частицы изменяется, то мгновенно должны измениться потенциальная энергия системы частиц и силы, действующие на отдельные частицы. Иными словами, понятие потенциальной энергии взаимодействия частицы связано с представлением о дальнодействии и не может быть введено в теории относительности. В общем случае написать выражение для энергии системы взаимодействующих частиц не представляется возможным. То же относится и к импульсу системы, который в теории относительности не является величиной, независимой от энергии.

Помимо систем, взаимодействующих путем столкновений, в специальной теории относительности можно найти приближенное выражение для взаимодействия заряженных частиц. Это будет сделано в § 25. Гравитационное взаимодействие тел рассматривается в общей теории относительности, изложение которой выходит за рамки нашей книги.

§ 16. Закон сохранения энергии — импульса в ядерной физике

Закон сохранения энергии — импульса и соотношение между массой и энергией не только нашли экспериментальное подтверждение, но стали основными положениями современной ядерной физики. Еще в первой работе Эйнштейна указывалось, что соотношение между массой и энергией может быть проверено экспериментально при изучении явлений радиоактивности. Действительно, характерной особенностью радиоактивного распада, как, впрочем, и всех остальных ядерных процессов, являются большое изменение энергии системы и высокие энергии образующихся ядерных частиц. Из всего многообразия ядерных процессов, в которых релятивистские эффекты играют существенную роль, в рамках этой книги мы должны ограничиться лишь самыми существенными или типичными.

Цель приведенных ниже примеров — показать, что соотношения релятивистской механики являются необходимой основой для подхода к изучению процессов, происходящих с атомными ядрами и элементарными частицами.

1. Реакции распада частиц. Ряд основных процессов, происходящих с атомными ядрами и элементарными ча-

стицами, заключается в реакциях объединения и распада частиц. Закон сохранения энергии и импульса накладывает существенное ограничение на возможные реакции. Рассмотрим реакцию распада одной частицы или тела на две части. Мы будем предполагать, что распад происходит самопроизвольно, т. е. в результате внутренних изменений в системе, без воздействия на нее внешних сил.

Пусть распадающаяся частица имеет массу M. В системе центра инерции импульс до распада равен нулю. Инвариант 4-вектора энергии и импульса равен

$$I = \mathbf{P}^2c^2 - E^2 = -M^2c^4.$$

После распада возникают части с массами m_1, m_2, импульсами $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и энергиями E_1, E_2.

В системе центра инерции полный импульс после распада равен нулю:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0.$$

Инвариант I можно написать в виде

$$I = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2c^2 - (E_1 + E_2)^2 = -M^2c^4,$$

или

$$Mc^2 = E_1 + E_2.$$

Написав энергии E_1 и E_2 в виде

$$E_1 = m_1c^2 + E_{\text{кин}}^{(1)},$$

$$E_2 = m_2c^2 + E_{\text{кин}}^{(2)},$$

имеем

$$Mc^2 = (m_1 + m_2)c^2 + E_{\text{кин}}^{(1)} + E_{\text{кин}}^{(2)}. \tag{16,1}$$

Поскольку кинетические энергии частей, образовавшихся после распада, $E_{\text{кин}}^{(1)} > 0$ и $E_{\text{кин}}^{(2)} > 0$, из (16,1) следует, что самопроизвольный распад тела возможен только при выполнении неравенства

$$M > m_1 + m_2, \tag{16,2}$$

т. е. если его масса больше суммы масс покоя возникающих частей. Наоборот, в тех случаях, когда масса тела меньше, чем сумма масс возникающих частей, самопроизвольный распад тела невозможен. Для распада в этом случае необходим подвод энергии извне.

Пользуясь равенствами $E_1 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4}$ и $E_2 = \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4}$ и учитывая, что $p_1^2 = p_2^2$, можно легко найти энергии частиц, возникающих при распаде.

Именно, имеем

$$E_2^2 = p_2^2c^2 + m_2^2c^4 = E_1^2 + m_2^2c^4 - m_1^2c^4.$$

С другой стороны,

$$E_1^2 = (Mc^2 - E_2)^2,$$

откуда

$$E_1 = \frac{(M^2 - m_2^2 + m_1^2)\,c^2}{2M}, \qquad E_2 = \frac{(M^2 - m_1^2 + m_2^2)\,c^2}{2M}.$$

2. Устойчивость атомных ядер. Полученные общие результаты позволяют внести ясность в важнейший вопрос об устойчивости атомных ядер.

Рассмотрим атомное ядро, состоящее из Z протонов и $A-Z$ нейтронов (где Z — атомный номер, A — массовое число) и имеющее массу M. Протоны и нейтроны в ядре обладают весьма значительными кинетическими энергиями. Однако действующие между ними весьма мощные силы притяжения — ядерные силы, обеспечивают устойчивость всей системы как целого. Энергия покоя ядра Mc^2 слагается из энергии покоя всех входящих в него частиц $\sum m_ic^2$, и энергии внутреннего движения и ваимодействия частиц. Для того чтобы ядро было устойчивым и движение ядерных частиц не могло привести к его самопроизвольному развалу, необходимо, очевидно, чтобы было выполнено неравенство

$$Mc^2 < \sum m_ic^2. \tag{16,3}$$

Величина

$$\Delta mc^2 = \sum m_ic^2 - Mc^2, \tag{16,4}$$

именуемая энергией связи ядра, является мерой его устойчивости. Если, в частности, Δmc^2 отрицательна, ядро неустойчиво и самопроизвольно распадается на части.

Наряду с энергией связи мерой устойчивости ядра может служить величина

$$\Delta m = \sum m_i - M, \tag{16,5}$$

называемая дефектом массы. Для устойчивости ядра необходимо, чтобы дефект массы был положителен. Если дефект массы ядра положителен, то согласно (16,1) ядро устойчиво по отношению к распаду на образующие его частицы — протоны и нейтроны. Однако это не означает еще, что ядро является абсолютно устойчивым и может существовать неопределенно долго.

Допустим, что в результате распада ядра, например по схеме

$$M \to M_1 + M_2,$$

могут образовываться ядра с массами M_1 и M_2. Такой распад в принципе возможен, если атомные номера Z_1 и Z_2 и массовые числа A_1 и A_2 образующихся ядер удовлетворяют равенствам

$$Z_1 + Z_2 = Z; \quad A_1 + A_2 = A.$$

Пусть Δm_1 и Δm_2 — дефекты масс образующихся ядер. Если дефект массы исходного ядра Δm меньше, чем сумма дефектов масс образующихся ядер, т. е.

$$\Delta m < (\Delta m_1 + \Delta m_2),$$

то система, возникающая после распада, обладает большей устойчивостью, чем исходная. Поэтому при $\Delta m < (\Delta m_1 + \Delta m_2)$ ядро, устойчивое по отношению к распаду на отдельные элементарные частицы, не является устойчивым по отношению к распаду на две части. В результате внутренних преобразований ядерных частиц, по прошествии некоторого промежутка времени, в ядре возникнет распадная конфигурация. Исходное ядро распадается на два ядра с массами M_1 и M_2.

В виде примера можно рассмотреть ядро Be_4^8. Это ядро имеет массу $M = 8{,}00785$, которая меньше, чем массы четырех протонов и четырех нейтронов $\sum m_i = 4 \cdot 1{,}008123 + 4 \cdot 1{,}00893 = 8{,}068212$. Поэтому ядро Be_4^8 устойчиво по отношению к распаду на отдельные протоны и нейтроны. Однако масса Be_4^8 больше, чем масса двух ядер He_2^4: $2M_{He} = 2 \cdot 4{,}00390 = 8{,}00780$ *аем*. Поэтому ядро Be_4^8 неустойчиво и должно самопроизвольно распадаться на две α-частицы, что и имеет место фактически.

Наоборот, дефект массы ядра Be_4^9 не только положителен, но и превышает сумму дефектов масс всех ядер, на которые оно могло бы распадаться. Поэтому ядро Be_4^9 абсолютно устойчиво.

Зная массы всех изотопов, можно без труда определить их устойчивость по величинам дефектов масс.

За деталями отсылаем читателей к специальным руководствам.

3. **Энергетический выход ядерных реакций.** Применение закона сохранения энергии к ядерной реакции типа

$$A + B \to C + D,$$

где A и B — исходные ядра, а C и D — продукты реакции, позволяет найти энергетический выход реакции

$$Q=[(M_A+M_B)-(M_C+M_D)]c^2, \qquad (16,6)$$

если известны массы всех ядер.

В виде важного примера, на котором соотношения теории относительности могут быть проверены особенно наглядно, рассмотрим реакцию

$$Li_3^7+H_1^1\to 2He_2^4.$$

Массы всех фигурирующих в реакции ядер измерены с большой степенью точности. Именно,

$$M(Li_3^7)=7{,}01822 \text{ аем},$$

$$M(H_1^1)=1{,}00812 \text{ аем}.$$

Полная начальная масса $=8{,}02634$ *аем*. Полная конечная масса $=2M(He_2^4)=2\cdot 4{,}00390=8{,}00780$ *аем*.

В результате реакции масса покоя частиц уменьшается на

$$\Delta m=0{,}0185 \text{ аем}.$$

Соответствующая энергия, представляющая кинетическую энергию двух α-частиц, должна быть равна

$$E=\Delta mc^2=17{,}2 \text{ Мэв},$$

что с большой степенью точности совпадает с измеренными значениями энергии.

На этом примере видно, что масса покоя частиц не сохраняется.

В ходе реакции масса покоя, равная Δm, бесследно исчезает. Однако имеют место закон сохранения энергии

$$E_{Li}+E_H=2E_{He}$$

и закон сохранения релятивистской массы

$$m_{Li}(v)+m_H(v)=2m_{He}(v).$$

Приведенная реакция является лишь одним из примеров ядерных реакций, в которых не выполняется закон сохранения массы покоя.

4. Распад элементарных частиц. Целый ряд элементарных частиц оказываются неустойчивыми по отношению к реакции распада. Здесь невозможно обсудить все известные случаи реакций распада, и мы можем остановиться лишь на некоторых из них, наглядно иллюстрирующих важность применения законов сохранения к анализу реакций.

В качестве примера рассмотрим реакции распада заряженных и нейтрального мезонов. Как известно, обнаружено существование трех сортов π-мезонов: π^+ с положительным, π^- с отрицательным зарядом и π^0 — нейтральный мезон. Их массы равны $273\, m_e$ для заряженных мезонов и $264\, m_e$ для нейтрального мезона. Заряд заряженных мезонов по абсолютной величине равен заряду электрона. Кроме π-мезонов, обнаружены два сорта μ-мезонов — положительный μ^+ и отрицательный μ^--мезон, с той же абсолютной величиной заряда и массой, равной 207 электронных масс.

Оказалось, что как π-, так и μ-мезоны неустойчивы. Время жизни заряженных $\pi^\pm$-мезонов составляет $2{,}6\cdot 10^{-8}$ *сек*, нейтрального π^0-мезона — около 10^{-15}—10^{-16} *сек*. Как мы указывали ранее, $\mu^\pm$-мезоны имеют время жизни, равное $2\cdot 10^{-6}$ *сек*.

Совершенно ясно, что установление схемы распада всех этих частиц имеет фундаментальное значение для современной физики.

Начнем с распада заряженных π-мезонов. Заряженные $\pi^\pm$-мезоны распадаются на $\mu^\pm$-мезон и нейтрино ν:

$$\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu.$$

Нейтрино представляет незаряженную частицу с весьма малой массой покоя, которая, в отличие от фотонов, не вызывает на своем пути сколько-нибудь заметной ионизации атомов. Изучение этой реакции позволяет наиболее точно оценить массу покоя нейтрино[1]).

Именно, зная массы покоя π- и μ-мезонов, можно найти кинетическую энергию μ-мезона $E^\mu_{\text{кин}}$ в зависимости от массы покоя нейтрино.

В системе центра инерции до распада импульс π-мезона равен нулю. После распада полный импульс остается равным нулю, так что импульсы μ-мезона и нейтрино равны по величине $p_\mu = p_\nu = p$ и обратны по направлению $(\mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu) = 0$. Закон сохранения 4-вектора энергии импульса сводится к закону сохранения энергии

$$m_\pi c^2 = E^\mu + E^\nu,$$

или

$$m_\pi c^2 = (E^\mu_{\text{кин}} + m_\mu c^2) + \sqrt{p_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4},$$

или, поскольку в системе центра инерции $p_\nu = p_\mu$, имеем

$$m_\pi c^2 = (E^\mu_{\text{кин}} + m_\mu c^2) + \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4}. \qquad (16{,}7)$$

[1]) О свойствах нейтрино см. § 137 ч. V.

Воспользуемся полезным тождеством

$$E_{\text{кин}} + mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4},$$

или

$$E_{\text{кин}}^2 + 2mc^2E_{\text{кин}} = p^2c^2, \qquad (16,8)$$

и перепишем (16,7) в виде

$$m_\pi c^2 = (E_{\text{кин}}^\mu + m_\mu c^2) + \sqrt{(E_{\text{кин}}^\mu)^2 + 2m_\mu c^2E_{\text{кин}}^\mu + m_\nu^2c^4}.$$

Возводя последнюю формулу в квадрат и пользуясь (16,7), находим для энергии μ-мезона (отнесенной к системе центра инерции), который образовался при распаде π-мезона,

$$E_{\text{кин}}^\mu = \frac{(m_\pi c^2 - m_\mu c^2)^2 - m_\nu^2c^4}{2m_\pi c^2}. \qquad (16,9)$$

Кинетическая энергия μ-мезона $E_{\text{кин}}^\mu$ измеряется по вызываемой им ионизации. Она оказывается имеющей всегда определенное значение. Из числового значения $E_{\text{кин}}^\mu$ вытекает, что в пределах точности опыта $m_\nu = 0$. Кроме того, фиксированная величина $E_{\text{кин}}^\mu$ означает правильность принятой схемы распада. Если бы при распаде появлялись две или более нейтральных частиц, то $E_{\text{кин}}^\mu$ не имела бы определенного значения, но зависела от распределения кинетической энергии между нейтральными частицами.

Именно последний случай реализуется при распаде μ-мезонов, который идет по схеме

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + 2\nu.$$

Здесь e^- означает электрон, а e^+ — позитрон.

Теория позитронов будет подробно изложена в ч. V. Здесь укажем лишь, что позитрон имеет положительный заряд, по величине равный заряду электрона, и массу, равную массе электрона. Электрон, π^--мезон и μ^--мезон, с одной стороны, позитрон, π^+-мезон и μ^+-мезон, с другой стороны, образуют группы античастиц. Античастицы образуются парами и могут аннигилировать (сливаться), образуя γ-кванты[1]).

Опыт показывает, что при реакции распада μ-мезонов кинетическая энергия возникающих электронов или позитронов не имеет определенного значения, изменяясь от опыта к опыту.

Таким образом, ясно, что энергия, уносимая ускользающими от непосредственного наблюдения нейтральными частицами, может распределяться между ними разными способами. Это

---

[1]) О свойствах элементарных частиц см. Ю. В. Новожилов, Элементарные частицы, Физматгиз, 1959 (популярное и очень хорошее изложение); Э. В. Шпольский, Атомная физика, т. II, Гостехиздат, 1951.

было бы невозможно при распаде по схеме, справедливой для π-мезонов, т. е. с вылетом одного нейтрино.

В среднем кинетическая энергия заряженной частицы равна $^1/_3$ полной энергии μ-мезона. Остальные $^2/_3$ в среднем поровну распределяются между обоими вылетающими нейтрино.

Рассмотрим, наконец, распад π^0-мезона, который идет по схеме

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma,$$

где γ — гамма-квант. γ-кванты регистрируются по создаваемой ими ионизации. Наблюдается известная связь между углом разлета фотонов и их энергией. Эта связь может быть установлена из законов сохранения.

До распада инвариант 4-вектора энергии и импульса в системе, движущейся вместе с π^0-мезоном, сводится к

$$I = -m_\pi^2 c^4,$$

поскольку в этой системе полный импульс равен нулю.

После распада в лабораторной системе I равно

$$I = (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 c^2 - (E_1 + E_2)^2,$$

где $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, E_1 и E_2 — импульсы и энергии двух фотонов. Поэтому можно написать

$$-m_\pi^2 c^4 = (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 c^2 - (E_1 + E_2)^2$$

или, поскольку масса покоя фотонов равна нулю,

$$m_\pi^2 c^4 = (p_1 + p_2)^2 c^2 - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 c^2 = 2p_1 p_2 c^2 (1 - \cos\varphi) = 4p_1 p_2 c^2 \sin^2\frac{\varphi}{2},$$

где φ — угол между направлениями полета фотонов.

Следовательно,

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{m_\pi c^2}{2\sqrt{E_1 E_2}}. \qquad (16,10)$$

Зависимость угла разлета от энергии фотонов хорошо согласуется с наблюдающейся экспериментально.

5. Образование пар электрон — позитрон γ-квантами и электронами и аннигиляция пар. Опытное обнаружение теоретически предсказанных явлений образования пар электрон — позитрон и их аннигиляции с образованием γ-квантов явилось основным подтверждением правильности релятивистской квантовой механики, с которой читатель ознакомится в ч. V книги. Вместе с тем, явления образования пар и их аннигиляции служат хорошей иллюстрацией соотношений теории относительности.

Рассмотрим прежде всего вопрос о возможности образования пары электрон — позитрон γ-квантом в вакууме. Пусть γ-квант с энергией $E = pc$ создает электрон и позитрон. Нетрудно видеть, что такой процесс несовместим с законами сохранения. Действительно, если фотон создает пару электрон — позитрон с минимальной возможной энергией — энергией покоя и импульсом, равным нулю, то он имеет энергию $E = 2mc^2$ и импульс $p = \frac{E}{c} > 0$, где m — масса электрона. Если импульс пары отличен от нуля, то всегда можно перейти к системе центра инерции, где он равен нулю, и наше рассуждение справедливо.

Таким образом, импульс отличен от нуля до образования пары и равен нулю после ее образования Это явно противоречило бы закону сохранения импульса, и подобный процесс невозможен. Образование пар может происходить только при наличии третьего тела, обычно атомного ядра, принимающего на себя избыток импульса. Поскольку при этом ядро принимает на себя также и некоторую часть энергии, энергетический порог реакции образования пары γ-квантом лежит выше $2mc^2$ Пороговая энергия γ-кванта определяется требованием, чтобы все частицы — электрон, позитрон и ядро — имели в системе центра инерции импульс, равный нулю.

Для нахождения этого порога найдем инвариант 4-вектора энергии и импульса.

До реакции имелся γ-квант с пороговой кинетической энергией $E_{пор}$, импульсом $p = \frac{E_{пор}}{c}$ и покоящееся ядро с массой M; после реакции — пара электрон — позитрон и ядро, принявшее на себя часть импульса и энергии.

Значение инварианта 4-вектора энергии и импульса до реакции

$$I = \left(\frac{E_{пор}}{c}\right)^2 c^2 - (E_{пор} + Mc^2)^2.$$

Значение инварианта после реакции можно взять в любой системе координат, в том числе в системе центра инерции. Достоинством последней является то, что в ней полный импульс всех частиц равен нулю и значение инварианта сводится к величине

$$I = -(Mc^2 + 2mc^2)^2.$$

Таким образом, имеем

$$(Mc^2 + E_{пор})^2 - E_{пор}^2 = (Mc^2 + 2mc^2)^2,$$

откуда для пороговой энергии γ-кванта находим

$$E_{пор} = 2mc^2\left(1 + \frac{m}{M}\right). \qquad (16,11)$$

Совершенно аналогичным образом может быть найдена пороговая энергия других процессов образования электронно-позитронных пар, например, при соударении двух электронов.

Процесс, являющийся обратным процессу образования пар γ-квантами, носит название аннигиляции пар. При аннигиляции происходит слияние электрона и позитрона с образованием γ-квантов. Изложение сущности этого процесса с точки зрения современной квантовой теории будет кратко дано в ч. V. Процесс аннигиляции происходит обычно при малых значениях кинетической энергии позитрона. Поэтому разность энергий начального и конечного состояний составляет

$$\Delta E = mc^2 - (-mc^2) = 2mc^2 = 1{,}02 \ \textit{Мэв}.$$

Одновременное сохранение энергии и импульса требует, чтобы эта энергия излучилась в виде (по меньшей мере) двух γ-квантов, вылетающих в противоположных направлениях и имеющих энергию 0,51 *Мэв* каждый.

6. В ряде опытов было установлено, что аннигиляция позитронов действительно сопровождается таким излучением. Явление аннигиляции позитронов служит одним из наиболее эффектных подтверждений соотношения между массой и энергией. Следует заметить, что процесс аннигиляции иногда неправильно трактуют как «превращение материи в энергию» или как «исчезновение частиц». Совершенно ясно, что возникающие при аннигиляции позитрона γ-кванты так же материальны, как и частицы электрон или позитрон.

В § 13 мы обсудили уже вопрос о свойствах массы покоя и законах сохранения в теории относительности и видели, что превращение частиц с массой покоя, отличной от нуля, в частицы, не имеющие массы покоя, никоим образом не может рассматриваться как исчезновение частиц или превращение массы в энергию.

6. В качестве последнего примера использования законов сохранения в ядерной физике рассмотрим определение энергетического порога реакции образования π-мезона при столкновении протона с протоном:

$$H_1^1 + H_1^1 \to D_1^2 + \pi^+,$$

где π^+ — положительный π-мезон с массой m_π.

Напишем значение инварианта $E^2 - p^2c^2$ до и после столкновения. До столкновения

$$(E_{пор} + 2Mc^2)^2 - p^2c^2 = (E_{пор} + 2Mc^2)^2 - E_{пор}(E_{пор} + 2Mc^2).$$

При этом мы считали, что один из протонов покоится до соударения и воспользовались формулой (16,8). Если налетающий

протон имеет пороговую энергию, то образующиеся в результате реакции частицы, дейтрон и π-мезон, имеют минимальную возможную энергию — энергию покоя (в системе ц. и.). В системе центра инерции можно написать

$$E^2 - p^2c^2 = (2Mc^2 + m_\pi c^2)^2.$$

Из сохранения инварианта $(E^2 - p^2c^2)$ имеем

$$(E_{\text{пор}} + 2Mc^2)^2 - E_{\text{пор}}(E_{\text{пор}} + 2Mc^2) = (2Mc^2 + m_\pi c^2)^2,$$

откуда пороговое значение кинетической энергии

$$E_{\text{пор}} = \frac{\left[(2M + m_\pi)^2 - 4M^2\right]c^2}{2M} = \frac{\left(4m_\pi M + m_\pi^2\right)c^2}{2M} = m_\pi c^2\left(2 + \frac{m_\pi}{M}\right) = 292\ \textit{Мэв}. \quad (16{,}12)$$

Значение $E_{\text{пор}}$ хорошо согласуется с измеренной величиной.

Приведенные примеры носят чисто иллюстративный характер, и в них нарочито затронуты разнообразные вопросы ядерной физики. Они, однако, показывают, что во всех ядерных процессах, при которых приходится учитывать достаточно значительные изменения энергии системы, законы теории относительности и, в частности, соотношение между массой и энергией играют фундаментальную роль.

§ 17. Теория столкновений релятивистских частиц. Эффект Комптона

Большое значение для ядерной физики имеет теория столкновений релятивистских частиц. При отсутствии ядерных реакций между сталкивающимися частицами взаимодействие между ними можно с достаточной степенью точности считать упругим соударением (т. е. происходящим без изменения внутреннего состояния ядерных частиц). Это относится, в частности, к столкновениям элементарных частиц между собой, например, мезонов, протонов или фотонов с электронами.

Мы рассмотрим прежде упругие соударения частиц с массой покоя, отличной от нуля. Предположим, что быстрая частица с массой μ и импульсом $\boldsymbol{p}$ сталкивается со второй частицей, имеющей массу m. Мы будем считать вторую частицу неподвижной и свободной. Такое приближение законно при достаточно большой скорости налетающей частицы. После столкновения первоначально неподвижная частица будет двигаться с импульсом $\boldsymbol{p}_1$, направленным под углом φ к импульсу налетевшей частицы. Последняя при этом отклонится от первона-

чального направления полета на угол θ и будет иметь импульс p_2 (рис. 25).

Мы можем написать закон сохранения энергии и импульса в виде (15,7) и (15,8):

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \tag{17,1}$$

$$mc^2 + E = E_1 + E_2, \tag{17,2}$$

где E и E_2 — энергии налетающей частицы до и после столкновения, E_1 — энергия первоначально покоившейся частицы после столкновения. Этих соотношений достаточно для нахождения всех величин, характеризующих процесс столкновения.

Пусть, например, мы должны найти энергию, приобретаемую первоначально неподвижной частицей в зависимости от угла ее вылета φ. Проще при этом найти не полную энергию последней E_1, а кинетическую $E_1^{(\text{кин})} = E_1 - mc^2$. Имеем, очевидно, из (17,2)

$$\sqrt{p^2c^2 + \mu^2c^4} = \sqrt{p_2^2c^2 + \mu^2c^4} + E_1^{(\text{кин})}. \tag{17,3}$$

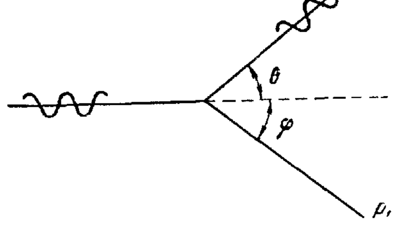


Рис. 25.

Так как на основании (17,1)

$$p_2^2 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi, \tag{17,4}$$

то из (17,3) и (17,4) можно исключить p_2. Кроме того, p_1^2 следует выразить через E_1 с помощью (16,8). Возводя (17,3) в квадрат и заменяя p_2^2 его значением из (17,4), получаем после простых преобразований

$$pp_1c^2\cos\varphi = E_1^{(\text{кин})}\left\{\sqrt{p^2c^2 + \mu^2c^4} + mc^2\right\}.$$

Возводя последнее соотношение в квадрат и вновь выражая p_1^2 через $E_1^{(\text{кин})}$, получаем окончательно

$$E_1^{(\text{кин})} = \frac{2mp^2c^4\cos^2\varphi}{\left\{\sqrt{p^2c^2 + \mu^2c^4} + mc^2\right\}^2 - p^2c^2\cos^2\varphi}, \tag{17,5}$$

т. е. искомую зависимость энергии, переданной неподвижной частице, от p и φ, а также от масс частиц m и μ.

Формула (17,5) показывает, что наибольшее значение передаваемая энергия имеет при $\varphi = 0$, т. е. при вылете неподвижной частицы в направлении полета налетающей частицы (лобовое соударение). Именно,

$$(E_1)_{\text{макс}}^{(\text{кин})} = 2mc^2\frac{p^2c^2}{\left\{\sqrt{p^2c^2 + \mu^2c^4} + mc^2\right\}^2 - p^2c^2}. \tag{17,6}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (17,6). Пусть, например, налетающая частица является протоном или мезоном, а покоившаяся частица — электроном. Тогда $\mu \gg m$. Кроме того, будем считать падающую частицу весьма быстрой, так что $pc \gg \mu c^2$. Тогда из (17,6) находим

$$(E_1)_{\text{макс}}^{(\text{кин})} \approx 2mc^2 \frac{p^2c^2}{2mc^2pc + \mu^2c^4}.$$

Если импульс падающей частицы столь велик, что выполнено неравенство

$$pc \gg \frac{\mu^2c^4}{mc^2} = \frac{\mu}{m}\mu c^2,$$

то максимальная передаваемая энергия достигает значения

$$(E_1)_{\text{макс}}^{(\text{кин})} \approx pc \approx E, \tag{17,7}$$

т. е. энергии падающей частицы.

Рассмотрим теперь случай, когда падающая частица является легкой, например электроном, а неподвижная — тяжелой (т. е. $\mu \ll m$). Если, кроме того, первая частица обладает импульсом $pc \gg \mu c^2$, то из (17,6) получаем для передаваемой энергии

$$(E_1)_{\text{макс}}^{(\text{кин})} \approx 2mc^2 \frac{p^2c^2}{2mc^2pc + m^2c^4}.$$

Если выполняется неравенство

$$pc \gg mc^2,$$

то

$$(E_1)_{\text{макс}}^{(\text{кин})} \approx pc \approx E.$$

Мы видим, таким образом, что при очень больших импульсах законы упругих столкновений в релятивистской механике существенно отличаются от аналогичных законов в классической механике. При достаточно больших импульсах возможна полная передача энергии от тяжелой частицы к легкой и от легкой — к тяжелой. Напомним, что в классической механике в этом случае упругий удар сопровождается лишь незначительной передачей энергии [1]).

Другие предельные случаи могут быть без труда получены из общего выражения (17,5). Нетрудно, в частности, показать, что при малых импульсах $pc \ll \mu c^2$ и $pc \ll mc^2$ передаваемая энергия дается формулой, совпадающей с соответствующим выражением нерелятивистской теории столкновений.

---

[1]) См. § 43 ч. I.

Важным случаем упругого соударения является соударение фотона с электроном. Это явление, носящее название комптон-эффекта, было первоначально тщательно изучено в связи с выяснением квантовой природы света. Комптон-эффект играет роль в ряде практических проблем современной ядерной физики. У фотона масса покоя μ равна нулю и $E = pc$, $E_2 = p_2c$. Поэтому формулы (17,1) и (17,2) приобретают вид

$$E = E_2 + E_1^{(\text{кин})}, \tag{17,8}$$

$$p_1^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{c}\right)^2 - \frac{2EE_2}{c^2}\cos\theta, \tag{17,9}$$

где $E_1^{(\text{кин})} = \sqrt{p_1^2c^2 + m_e^2c^4} - m_ec^2$, m_e — масса электрона, θ — угол между направлением полета фотона до и после столкновения (угол рассеяния).

Выражая в уравнении (17,9) $p_1^2c^2$ через кинетическую энергию электрона с помощью (16,8), представим (17,9) в виде

$$\left(E_1^{(\text{кин})}\right)^2 + 2m_ec^2E_1^{(\text{кин})} = E^2 + E_2^2 - 2EE_2\cos\theta. \tag{17,10}$$

Найдем прежде всего энергию фотона, испытавшего столкновение. Исключая $E_1^{(\text{кин})}$ из (17,8) и (17,10), без труда находим

$$E_2 = \frac{m_ec^2E}{m_ec^2 + E(1-\cos\theta)}. \tag{17,11}$$

Последняя формула связывает энергию рассеянного фотона с энергией падающего и углом рассеяния θ.

Переходя от энергий к длинам волн по известной квантовой формуле $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, можно получить для уменьшения длины волны при комптоновском рассеянии $\Delta\lambda$ значение

$$\Delta\lambda = hc\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E}\right) = \frac{h}{m_ec}(1-\cos\theta) = \Lambda(1-\cos\theta). \tag{17,12}$$

Величина $\Lambda = \frac{h}{m_ec} = 0{,}0242$ Å носит название комптоновской длины волны.

Формула (17,12) показывает, что изменение длины волны происходит независимо от длины волны падающего излучения. Максимальное изменение длины волны равно 2Λ.

Зная энергию рассеянного фотона, можно легко найти энергию, передаваемую электрону. Она оказывается равной

$$E_1^{(\text{кин})} = E - E_2 = \frac{\Lambda(1-\cos\theta)}{\lambda + \Lambda(1-\cos\theta)}E, \tag{17,13}$$

т. е. сравнительно небольшой при $\lambda \gg \Lambda$. Наоборот, при $\lambda \sim \Lambda$

энергия, передаваемая электрону, оказывается значительной, порядка E.

Важность этого вывода состоит, в частности, в том, что он имеет вполне общий характер. Мы неоднократно указывали в ч. I, что классическая электродинамика содержит в себе самой границы применимости. Именно, классическая электродинамика становится неприменимой в области малых длин, порядка классического радиуса электрона $r_0 = 2 \cdot 10^{-13}$ *см*. Мы указывали, однако (см. § 28 ч. I), что фактически граница применимости классической теории лежит гораздо выше, при расстояниях порядка $2 \cdot 10^{-10}$ *см*, что соответствует порядку комптоновской длины волны.

Неприменимость классической электродинамики к явлениям, разыгрывающимся в области пространства с линейным размером порядка Λ, связана, очевидно, с тем, что в этой области начинают проявляться квантовые эффекты. Конкретным примером этого может служить рассеяние света.

При $\lambda \gg \Lambda$ изменение длины волны рассеянного света и энергия, передаваемая свободному электрону, сравнительно малы. Поэтому рассеяние света достаточно хорошо описывается классической теорией. Рассеяние имеет когерентный характер. Изменение длины волны $\Delta\lambda \sim \Lambda$ весьма мало по сравнению с самой длиной волны; никакой передачи энергии свободному электрону не происходит и сечение рассеяния дается формулой Томсона (36,9) ч. I.

По мере приближения λ к Λ (жесткие рентгеновы лучи и γ-лучи) классическое рассеяние заменяется комптон-эффектом. Изменение длины волны света становится сравнимым с длиной волны, излучение выбивает электроны отдачи (движущиеся преимущественно вперед, по направлению падающего фотона), и сечение рассеяния, как это видно на рис. 11, падает с энергией фотона. Явление приобретает ясно выраженный квантовый характер и классическое рассмотрение явления рассеяния становится совершенно невозможным.

Квантовомеханический расчет сечения комптоновского рассеяния будет дан в ч. V.

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 18. Инвариантность заряда, четырехмерный ток и уравнение непрерывности

От релятивистской механики мы перейдем теперь к построению релятивистской электродинамики. В основу релятивистской электродинамики нами будет положено предположение об инвариантности и сохранении электрического заряда. Заряд является основной величиной, характеризующей свойства частиц, а постоянство заряда строго соблюдается во всех известных физических процессах.

Закон сохранения заряда

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (18,1)$$

должен быть справедлив во всех инерциальных системах координат. Для придания закону сохранения заряда релятивистски-инвариантной формы можно, следуя обычному методу, записать его в четырехмерной форме.

Для этого достаточно ввести 4-вектор j_α, именуемый четырехмерным током и определяемый соотношением

$$j_\alpha = (\rho \boldsymbol{u}, ic\rho). \qquad (18,2)$$

Тогда (18,1) легко записывается в четырехмерной форме:

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial j_\tau}{\partial \tau} = 0. \qquad (18,3)$$

Формула (18,3) записана в четырехмерном виде и является релятивистски-инвариантным выражением. Отсюда следует, что формально определенная нами величина j_α действительно представляет 4-вектор.

Из определения 4-вектора j_α непосредственно вытекает, что при переходе от одной системы отсчета к другой его компоненты должны преобразовываться по формулам (11,1)—(11,4). Если применить этот закон преобразования к четвертой компоненте

$j_\tau = ic\rho$, то мы получим закон сохранения электрического заряда $de = \rho\, dV$, заключенного в произвольном элементе объема dV. Действительно, рассмотрим закон изменения j_τ при переходе от системы K', в которой заряды покоятся, к системе K. Система K' движется по отношению к K со скоростью v. В системе K' скорость $u = 0$ и у вектора j_α отлична от нуля только компонента j_τ.

Из формулы (11,4) для преобразования четвертой компоненты 4-вектора находим закон изменения плотности заряда:

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{18,4}$$

Умножив (18,4) на элемент объема dV, имеем

$$\rho\, dV = de = \frac{\rho'\, dV}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Закон изменения объема (6,2) дает при этом

$$dV = dV' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

так что

$$\rho\, dV = \rho'\, dV'.$$

Таким образом, заряд любого элемента объема является инвариантом относительно преобразования Лоренца. Это можно наглядно интерпретировать следующим образом: при уменьшении вследствие лоренцева сокращения величины объема, плотность заряда увеличивается в том же отношении, так что полный заряд не изменяется.

§ 19. Релятивистски-инвариантная формулировка уравнений для потенциалов

Выше мы уже указывали, что теория электромагнитного поля с самого начала была сформулирована «правильно» с точки зрения теории относительности. Это означает, что система уравнений Максвелла — Лоренца является релятивистски-инвариантной, удовлетворяющей требованиям теории относительности.

Проще всего в этом можно убедиться, если рассмотреть уравнения для потенциалов.

Согласно сказанному в § 10 ч. I система уравнений

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho \boldsymbol{u}, \tag{19,1}$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{19,2}$$

при учете условия калибровки

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{19,3}$$

полностью эквивалентна уравнениям Максвелла — Лоренца.

Релятивистская инвариантность системы (19,1)—(19,3) непосредственно вытекает из того, что эта система может быть без всяких изменений записана в четырехмерной форме.

Действительно, умножим (19,2) на i и заметим, что при этом правые части уравнений (19,1)—(19,2) содержат компоненты 4-вектора плотности тока. Отсюда следует, что и левые части представляют компоненты 4-вектора, который мы будем именовать 4-потенциалом A_a,

$$A_a = (\boldsymbol{A},\ i\varphi).$$

С помощью 4-вектора A_a и j_a уравнения (19,1) и (19,2) можно написать в виде

$$\Box A_\alpha = -\frac{4\pi}{c} j_\alpha, \tag{19,4}$$

где $\Box$ означает оператор Даламбера:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}. \tag{19,5}$$

При этом условие калибровки сразу записывается в четырехмерной форме в виде

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{19,6}$$

Таким образом, полная система уравнений для потенциалов представлена в релятивистски-инвариантном виде. Это означает, что законы электродинамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Мы видим, далее, что потенциалы электромагнитного поля, а следовательно, и сами векторы электрического и магнитного полей не являются инвариантными величинами. Относительный характер величины векторов поля никоим образом не является чем-то новым и неожиданным. Достаточно вспомнить, что движущийся заряд создает магнитное поле, которое, однако, отсутствует в системе отсчета, движущейся вместе с зарядом.

Закон преобразования потенциалов может быть написан без труда, поскольку они преобразуются по общей формуле преобразования компонент 4-вектора (11,1)—(11,4).

Имеем, очевидно,

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{v}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{19,7}$$

$$A_y = A'_y, \tag{19,8}$$

$$A_z = A'_z, \tag{19,9}$$

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{v}{c}A'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{19,10}$$

В следующих параграфах мы применим эти формулы к рассмотрению электромагнитного поля движущихся зарядов.

§ 20. Поле движущегося заряда

Рассмотрим простейшую задачу о нахождении электромагнитного поля, создаваемого равномерно движущимся зарядом, когда скорость заряда v сравнима со скоростью света. В системе отсчета K', движущейся вместе с зарядом, магнитное поле отсутствует, а потенциал электрического поля выражается формулой

$$\varphi' = \frac{e}{r'}.$$

В инерциальной системе отсчета K, по отношению к которой заряд движется со скоростью v, потенциал электрического поля согласно (19,10) имеет вид

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{r'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{20,1}$$

Найдем теперь формулу преобразования длины радиуса-вектора. Имеем

$$r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Асимметрия последней формулы связана с тем, что движение происходит вдоль оси x.

Отсюда находим

$$\varphi=\frac{e}{\sqrt{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}}. \tag{20,2}$$

Заметим, что $x = vt$, $y = 0$, $z = 0$ представляют координаты точки, в которой в момент времени t находится заряд, так что радиус-вектор, проведенный от заряда к точке (x, y, z), можно написать в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(x - vt) + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z \tag{20,3}$$

и

$$r=\sqrt{(x-vt)^2+y^2+z^2}. \tag{20,4}$$

Рис. 26.

Удобно упростить (20,2), выразив φ через r и угол ψ, образуемый вектором $\boldsymbol{r}$ и осью x (рис. 26).

Из рис. 26 видно, что

$$x - vt = r\cos\psi,$$
$$y^2 + z^2 = r^2\sin^2\psi$$

и, следовательно,

$$\sqrt{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)} = r\sqrt{\cos^2\psi+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\psi}=r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi}.$$

Поэтому имеем

$$\varphi=\frac{e}{r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi}}. \tag{20,5}$$

Переходя к вычислению вектора-потенциала $\boldsymbol{A}$, заметим, что в системе K' нет магнитного поля и $\boldsymbol{A}' = 0$. По формулам (19,7) и (19,10) находим

$$A_x=\frac{v}{c}\cdot\frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{v}{c}\varphi= \frac{ev}{c\sqrt{(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}}=\frac{ev}{cr\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi}},$$

$$A_y=0,\quad A_z=0.$$

В векторной форме можно написать

$$\boldsymbol{A} = \frac{\varphi \boldsymbol{v}}{c}. \tag{20,6}$$

Зная потенциалы поля, можно найти и самые поля.

При вычислении электрического поля $\boldsymbol{E}$ нужно помнить, что в нашем случае равномерно движущегося заряда дифференцирование по времени сводится к дифференцированию по координате x согласно формуле

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial x}.$$

Действительно, при равномерном движении $\boldsymbol{A}$ и φ зависят от координаты и времени по закону $f(x - vt)$, где f — некоторая функция аргумента $(x - vt)$. Для такой функции всегда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial (x - vt)}\frac{\partial (x - vt)}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Отсюда находим

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= -\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{e(x - vt)}{\left\{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}^{3/2}},$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{ey}{\left\{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}^{3/2}},$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{ez}{\left\{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right\}^{3/2}},$$

или, в векторной форме,

$$\boldsymbol{E} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{e\boldsymbol{r}}{r^3\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi\right)^{3/2}}. \tag{20,7}$$

При $v \ll c$ формула (20,7) превращается, разумеется, в электростатическое выражение для поля неподвижного заряда.

Магнитное поле $\boldsymbol{H}$ также находим без труда:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\varphi) = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\operatorname{grad}\varphi] = \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}], \tag{20,8}$$

Формулы (20,5) и (20,7) показывают, что, в отличие от поля неподвижного заряда, электрическое поле движущегося заряда не имеет сферической симметрии.

Скалярный потенциал φ имеет постоянное значение на поверхности эллипсоида:

$$(x-vt)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)=\text{const}.$$

Этот эллипсоид получается из сферы при сжатии ее в направлении оси x в $1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ раз.

Характер распределения поля яснее всего виден из формулы

$$|\boldsymbol{E}|=\frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{r^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin\psi\right)^{3/2}}. \tag{20,9}$$

На оси x ($\psi=0$) поле меньше электростатического в $1:\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ раз, в плоскости, перпендикулярной к оси x, оно увеличено в отношении $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ раз.

По мере возрастания скорости эллипсоид равных значений потенциала все более сплющивается, величина поля в направлении движения уменьшается, в перпендикулярном направлении — увеличивается. При $v\sim c$ все поле концентрируется в малом интервале углов вблизи плоскости, перпендикулярной к направлению движения. Ширина этого интервала $\Delta\psi\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Магнитное поле $\boldsymbol{H}$ всегда перпендикулярно к направлению движения и вектору электрического поля $\boldsymbol{E}$. При $v\sim c$ $|\boldsymbol{H}|\sim|\boldsymbol{E}|$, при малых скоростях ($v\ll c$) можно положить

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}[\boldsymbol{vE}]\approx\frac{e}{c}\frac{[\boldsymbol{vr}]}{r^3}, \tag{20,10}$$

если считать приближенно, что $\boldsymbol{E}$ имеет электростатическое значение. Последняя формула совпадает с (20,5) ч. I.

Поле, создаваемое движущимся зарядом, было найдено классическими методами[1]) еще до появления теории относительности. И в этом нет ничего удивительного, так как уравнения Максвелла — Лоренца являются релятивистски-инвариантными.

Применим найденные формулы к вычислению силы взаимодействия двух зарядов e_1 и e_2, движущихся с одинаковой скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно лабораторной системы отсчета. В системе отсчета, связанной с зарядами, сила равна, очевидно, $\boldsymbol{F}=\frac{e_1e_2}{r^3}\boldsymbol{r}$ и направлена вдоль вектора, соединяющего заряды. Направление вектора $\boldsymbol{v}$ выберем за ось x.

[1]) См., например, Р. Беккер, Электронная теория, Гостехиздат, 1941.

С точки зрения лабораторной системы поле заряда e_1 выражается формулами (20,8) и (20,10). На заряд e_2 при этом действует сила Лоренца:

$$\boldsymbol{F}=e_2\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]\right)=e_2\boldsymbol{E}+\frac{e_2}{c^2}[\boldsymbol{v}[\boldsymbol{vE}]]=$$
$$=e_2\boldsymbol{E}+\frac{e_2}{c^2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{vE})-\frac{e_2}{c^2}v^2\boldsymbol{E}=e_2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\boldsymbol{E}+e_2\frac{\boldsymbol{v}vE_x}{c^2}.$$

Эта сила не направлена более по радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$. Компонента силы по направлению движения равна

$$F_x=e_2E_x=\frac{e_1e_2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cos\psi}{r^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi\right)^{3/2}}.$$

Компонента силы в перпендикулярном направлении равна

$$F_y=e_2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)E_y=\frac{e_1e_2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\sin\psi}{r^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\psi\right)^{3/2}}.$$

До появления теории относительности полагали, что, наблюдая взаимодействие между движущимися зарядами, можно определить их абсолютную скорость по отношению к эфиру. Однако попытки измерений не привели ни к каким положительным результатам.

В свете теории относительности ясна ошибка этих рассуждений: в формулы для силы, измеренной в лабораторной системе координат, входит лишь общая относительная скорость обоих зарядов $\boldsymbol{v}$.

Полученный результат интересно применить к случаю движения равномерно заряженной сферы. В собственной системе отсчета, движущейся вместе со сферой, плотность заряда постоянна, линии поля нормальны к поверхности. В лабораторной системе отталкивание зарядов должно приводить к неравномерному распределению плотности заряда по сфере. Если провести полярную ось в направлении движения, то плотность заряда должна быть наибольшей у полюсов сферы и минимальной — в плоскости экватора.

С нерелятивистской точки зрения, измеряя это распределение заряда, можно было бы найти абсолютную скорость движения сферы. В действительности это не так: движущаяся сфера с точки зрения лабораторной системы должна испытывать сжатие и превращаться в эллипсоид. Расчет показывает, что эффект сжатия сферы в точности компенсирует эффект накопления заряда у полюсов. В результате плотность заряда, измеренная в

лабораторной системе отсчета, будет постоянной по поверхности сферы.

Приведенный пример очень интересен потому, что показывает, как «правильная» с точки зрения теории относительности теория Максвелла — Лоренца в соединении с классическими представлениями о пространстве и времени приводит к неверным результатам. Только последовательное изменение воззрений на пространство и время в сочетании с законами электродинамики позволяет привести теорию к согласию с экспериментом.

Наряду с полем равномерно движущегося заряда оказывается возможным найти поле заряда, совершающего произвольное движение.

В § 25 ч. I мы нашли выражение для потенциалов Лиенара — Вихерта и указывали, что соответствующие выражения не теряют своей применимости и при скоростях, близких к скорости света.

Чтобы убедиться в этом, напишем потенциалы Лиенара — Вихерта в четырехмерном виде.

Введем 4-вектор R_a, имеющий компоненты $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$, $ic(t-\tau)$, где $\boldsymbol{r}$ — координата точки наблюдения, $\boldsymbol{r}_0$ — координата заряда и $\tau = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}{c}$. При этом связь между компонентами вектора R_a дается формулой

$$R_\alpha^2 = 0.$$

Действительно, подставляя в нее компоненты R_a, имеем

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2 - c^2(t-\tau)^2 = 0.$$

С помощью 4-вектора R_a можно ввести 4-потенциал Лиенара — Вихерта соотношением

$$A_\alpha = -\frac{eu_\alpha}{R_\beta u_\beta},$$

где по индексу β проводится суммирование ($\beta = x, y, z, \tau$). Действительно, пользуясь определением 4-скорости u_β (11,6), имеем

$$R_\beta u_\beta = R_x u_x + R_y u_y + R_z u_z + R_\tau u_\tau =$$

$$= (x-x_0)\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + (y-y_0)\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + (z-z_0)\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} +$$

$$+ ic(t-\tau)\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{v}}{c} - c(t-\tau)\right\} =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{v}}{c} - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|\right\} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c} - R(\tau)\right\},$$

где, в соответствии с обозначениями § 25 ч. I, $\boldsymbol{R}(\tau)=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор, проведенный от мгновенного положения заряда до точки наблюдения в момент времени τ.

Соответственно, компоненты A_a имеют вид

$$A_x=-\frac{ev_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{1}{\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}-R(\tau)\right\}}=\frac{ev_x}{c\left\{R(\tau)-\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}\right\}}\tag{20,11}$$

и аналогичные выражения для A_y, A_z,

$$A_\tau=i\varphi=-\frac{iec}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{1}{\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}-R(\tau)\right\}}=i\frac{e}{\left\{R(\tau)-\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}\right\}}.$$

Отсюда

$$\varphi=\frac{e}{\left\{R(\tau)-\frac{\boldsymbol{R}(\tau)\boldsymbol{v}}{c}\right\}}.\tag{20,12}$$

Формулы (20,11) и (20,12) полностью идентичны формулам (25,3) и (25,4) ч. I.

Таким образом, потенциалы Лиенара — Вихерта действительно можно представить в релятивистски-инвариантной форме и, следовательно, ими можно пользоваться при произвольном значении скорости движения заряда.

§ 21. Тензор электромагнитного поля и уравнения Максвелла

Перейдем теперь к вычислению компонент электрического и магнитного полей.

Пользуясь определением 4-потенциала и вводя координаты 4-радиуса-вектора, мы можем представить компоненты электрического поля в виде

$$\left.\begin{aligned}E_x&=i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial\tau}\right),\\E_y&=i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial\tau}\right),\\E_z&=i\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\tau}\right),\end{aligned}\right\}\tag{21,1}$$

в то время как компоненты магнитного поля выражаются через компоненты вектора-потенциала обычными соотношениями

$$H_x=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\tag{21,2}$$

и аналогично для H_y и H_z.

Симметрия формул (21,1) и (21,2) побуждает нас попытаться записать всю их совокупность в виде одной общей формулы. Именно, введем тензор $F_{\alpha\beta}$ с помощью соотношения

$$F_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}. \tag{21,3}$$

Тензор $F_{\alpha\beta}$ является антисимметричным по определению. Вычисление компонент тензора $F_{\alpha\beta}$ приводит к таблице

$$F_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{21,4}$$

Мы видим, что все компоненты векторов электрического и магнитного полей оказываются компонентами одной тензорной величины $F_{\alpha\beta}$. Уравнения Максвелла представляют собой систему уравнений для тензора $F_{\alpha\beta}$. Именно, если написать для $F_{\alpha\beta}$ уравнение

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x_\beta}=0, \tag{21,5}$$

то, полагая α, β и λ последовательно равными 1, 2, 3 и 4 и пользуясь определением (21,4), мы легко найдем, что четырехмерное уравнение (21,5) представляет запись двух векторных уравнений Максвелла — Лоренца (8,1) и (8,2) (см. ч. I).

Аналогично, написав четырехмерное уравнение

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\frac{4\pi}{c}j_\alpha, \tag{21,6}$$

мы можем убедиться, что оно охватывает два векторных уравнения (8,3) и (8,4). Формулы (4,5) и (26,6) представляют релятивистски-инвариантную форму записи системы уравнений Максвелла — Лоренца. Неразрывная связь между электрическими и магнитными полями выступала в нерелятивистской формулировке теории электромагнитного поля в виде положения, следующего из совокупности опытных данных. В электродинамике теории относительности эта связь оказывается совершенно неизбежной и само собой разумеющейся. Из самого определения поля вытекает, что его свойства характеризуются не двумя векторами, но одним антисимметричным тензором. Уравнения электромагнитного поля являются уравнениями относительно этого тензора. Компоненты полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ фигурируют в тензоре $F_{\alpha\beta}$ на равных правах. При преобразованиях Лоренца, которые мы сейчас можем сформулировать, поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ выражаются друг через друга.

Действительно, по формулам (11,21) имеем (полагая $A_{xy} = H_z$, $A_{xz} = -H_y$, $A_{x\tau} = -iE_x$, $A_{y\tau} = -iE_y$, $A_{z\tau} = -iE_z$):

$$E_x = E'_x, \qquad E_y = \frac{E'_y + \frac{v}{c} H'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad E_z = \frac{E'_z - \frac{v}{c} H'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{21,7}$$

$$H_x = H'_x, \qquad H_y = \frac{H'_y - \frac{v}{c} E'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad H_z = \frac{H'_z + \frac{v}{c} E'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{21,8}$$

Мы видим, что утверждения типа «поле имеет чисто электрический» или «чисто магнитный характер» являются относительными. Электрическое или магнитное поле может быть равно нулю в одной системе отсчета и отлично от нуля в другой. Бессмысленно поэтому приписывать физическую реальность отдельно взятым электрическому и магнитному полям. Физической реальностью является их совокупность, выражаемая тензором электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$.

Естественно установить, какие величины, характеризующие электромагнитное поле, являются инвариантными. Поскольку электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором поля $F_{\alpha\beta}$ согласно результатам, приведенным в § 11, такими инвариантами являются величины $F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}F_{\mu\nu}F_{\nu\alpha}$. Кубический инвариант $F_{\alpha\beta}F_{\lambda\beta}F_{\lambda\alpha}$ оказывается равным нулю. Простое вычисление дает

$$J_1 = F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = H^2 - E^2 = \text{invar}, \tag{21,9}$$

$$J_2 = F_{\alpha\lambda}F_{\lambda\mu}F_{\mu\nu}F_{\nu\alpha} = (\boldsymbol{EH})^2 = \text{invar}. \tag{21,10}$$

Инварианты J_1 и J_2 являются абсолютными характеристиками поля. Утверждения «электромагнитное поле равно нулю» ($J_1 = J_2 = 0$) или «электрическое и магнитное поля равны друг другу по величине и перпендикулярны по направлению» ($J_1 = J_2 = 0$) являются примерами абсолютных утверждений.

Точно так же, если $J_2 = 0$, т. е. поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ перпендикулярны друг к другу, то они останутся перпендикулярными во всех системах отсчета. Если при этом $J_1 > 0$, то во всех системах отсчета $|\boldsymbol{H}| > |\boldsymbol{E}|$. Мы можем найти такую систему отсчета, в которой электрическое (но не магнитное) поле равно нулю. Аналогично при $J_2 < 0$ можно найти систему отсчета, в которой магнитное поле отсутствует.

В предельном случае $v \ll c$ формулы преобразования Лоренца существенно упрощаются. Пренебрегая $\frac{v^2}{c^2}$, их можно записать в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' - \frac{[\boldsymbol{vH}]}{c}, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' + \frac{[\boldsymbol{vE}]}{c}. \tag{21,11}$$

Эти преобразования были получены еще в нерелятивистской теории поля.

В заключение отметим, что связь и сходство между полями **E** и **H** не исключают и существования принципиального различия между ними, о котором мы упоминали в § 7. В электродинамике теории относительности это различие проявляется в том, что компоненты электрического поля являются временными (мнимыми) компонентами тензора электромагнитного поля, тогда как компоненты магнитного поля образуют совокупность его пространственных (вещественных) компонент.

§ 22. Допплер-эффект; эффект Мёссбауэра; наблюдение за быстро движущимися телами; преобразование углов, интенсивности, сечения

Мы видели, что утверждение «электромагнитное поле отсутствует в некоторой точке пространства в определенный момент времени» имеет абсолютный характер. Из этого следует, что величина фазы α в электромагнитной волне

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\alpha},$$
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i\alpha}$$

является инвариантом. Если, например, фаза равна $\frac{\pi}{2}$ или целому кратному $\frac{\pi}{2}$, так что $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} = 0$, то это значение фазы должно сохраниться во всех инерциальных системах отсчета.

Вводя формально 4-вектор k_α,

$$k_\alpha = \left(\boldsymbol{k},\ i\frac{\omega}{c}\right),$$

который носит название четырехмерного волнового вектора, можно записать фазу волны в виде скалярного произведения двух 4-векторов, k_α и r_α,

$$\alpha = k_\alpha r_\alpha = (\boldsymbol{kr} - \omega t).$$

Поскольку фаза является инвариантом, последняя формула показывает, что формально определенная величина k_α действительно является 4-вектором.

Закон преобразования компонент 4-вектора позволяет найти закон преобразования частот в теории относительности. Именно, из определения четырехмерного волнового вектора следует, что его четвертая компонента преобразуется по закону

$$k_\tau = \frac{k'_\tau + i\frac{v}{c}k'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Выражая k_τ через частоту ω, находим

$$\omega = \frac{\omega' + v k'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Написав k'_x в виде $k'_x = \frac{\omega'}{c} \cos\theta'$, где $\cos\theta'$ — направляющий косинус волнового вектора, находим

$$\omega = \frac{\omega'\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta'\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{22,1}$$

Аналогично

$$k_x = \frac{\omega}{c} n_x = \frac{k'_x - i k'_\tau \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{\omega'}{c}\cos\theta' + \frac{v}{c^2}\omega'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{22,2}$$

Выражая ω через ω', находим

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\cos\theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'}, \\ \sin\theta &= \sin\theta' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'}. \end{aligned}\right\} \tag{22,3}$$

Формулы обратного перехода от системы K к системе K' гласят:

$$\omega' = \frac{\omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{22,4}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta' &= \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}, \\ \sin\theta' &= \sin\theta \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{22,5}$$

Формула (22,1) выражает закон доплер-эффекта в теории относительности. Как известно, доплер-эффект заключается в

изменении частоты, излучаемой движущимся источником, по сравнению с частотой, излучаемой неподвижным источником.

Формулы (22,5) приводят к закону преобразования углов. Закон преобразования углов, даваемый этими соотношениями, совпадает с тем, который следует из (7,4). В этом проще всего убедиться, разделив нижнюю формулу (22,5) на верхнюю.

В этих формулах ω' — частота, измеренная в системе отсчета, движущейся вместе с источником излучения, а ω — частота в неподвижной системе. Предполагается, что источник вместе с системой отсчета K' движется вдоль оси x. Угол θ' представляет угол между направлением излученной волны, характеризуемым в системе K' вектором $\boldsymbol{k}'$, и направлением движения источника. При переходе к неподвижной системе отсчета угол θ' преобразуется в угол θ, образуемый с направлением движения вектором $\boldsymbol{k}$.

Для практического использования наиболее важна формула (22,4), которую можно записать в виде

$$\omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}. \qquad (22,6)$$

Формула (22,6) позволяет найти частоту света ω в зависимости от частоты света ω', излучаемого движущимся источником в собственной системе отсчета K', и угла θ, измеренного в системе K.

Если источник света приближается или удаляется от наблюдателя, находящегося, например, в начале системы K', то говорят о продольном допплер-эффекте. Приближению отвечает $\cos\theta = 1$ и частота $\omega > \omega'$, удалению $\cos\theta = -1$ и $\omega < \omega'$.

Интересно сравнить релятивистскую формулу для изменения частоты при допплер-эффекте с классической. Последняя получается из элементарного рассмотрения цуга волн, испускаемых движущимся источником и достигающих наблюдателя, и имеет вид

$$\omega = \omega'\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right). \qquad (22,7)$$

Величина угла в классической физике считалась инвариантной во всех системах отсчета.

Сравнивая классическую и релятивистскую формулы для изменения частоты при допплер-эффекте, мы видим, что при движении источника излучения со скоростью $v \ll c$, так что можно положить $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$ и $\frac{1}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \approx 1 + \frac{v}{c}\cos\theta$, обе формулы совпадают. Однако, если учитывать квадратичные члены,

то между этими формулами возникает существенное различие. В частности, при движении источника в направлении, перпендикулярном к направлению наблюдения, т. е. при $\theta = \frac{\pi}{2}$, классическая формула (22,7) показывает, что изменение частоты не происходит. Наоборот, согласно теории относительности возникает изменение частоты («поперечный» допплер-эффект), равное, согласно (23,6),

$$\omega = \omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (22,8)$$

Изучение законов допплер-эффекта на опыте имело особенно большое значение потому, что изменение частоты непосредственно связано с изменением времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Экспериментальное изучение допплер-эффекта позволило с большой степенью точности подтвердить правильность релятивистских соотношений.

В опытах Айвса изучалось изменение частоты, излучавшейся атомами водорода в каналовых лучах. Скорость атомов составляла приблизительно $6 \cdot 10^{-3}$ *c*. Главная трудность заключалась в выделении эффекта второго порядка по $\left(\frac{v}{c}\right)$, малого по сравнению с обычным (классическим) смещением линии на величину порядка $\frac{v}{c}$. Для этого световые лучи, испускаемые вдоль и против направления движения, совмещались с помощью зеркал. Согласно релятивистской формуле (22,1) среднее значение излучаемых частот линий равно

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega'\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\omega'\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\omega'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \omega'\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]. \qquad (22,9)$$

Классический результат был бы $\bar{\omega} = \omega'$.

Измерения с большой степенью точности подтвердили релятивистскую формулу (22,9).

Опыты Айвса, относящиеся к 1938 г., явились первым непосредственным экспериментальным подтверждением релятивистского закона изменения времени при преобразованиях Лоренца. С этой точки зрения они играли роль, аналогичную опытам Майкельсона. Взяв за основу совокупность этих двух опытов, можно было бы последовательно построить всю схему теории относительности, если бы эксперимент в этой области предшествовал развитию теории.

Чрезвычайно точное измерение квадратичного эффекта Допплера стало возможным в самое последнее время благодаря открытию нового важного явления, так называемого эффекта Мёссбауэра. Хорошо известно, что γ-кванты, излучаемые ядрами, являются в высокой степени монохроматическими. Ширина соответствующих спектральных линий на много порядков меньше естественной ширины линий, излучаемых атомами при оптических переходах. Это обстоятельство служило в течение долгого времени препятствием к наблюдению резонансного поглощения ядрами, т. е. поглощению ими γ-квантов собственных частот.

Ядра, как и атомные системы, весьма энергично поглощают излучение той частоты, которую они сами излучают. Однако, в отличие от излучающих атомных систем, ядра при излучении γ-квантов испытывают очень значительную отдачу. Эта отдача изменяет частоту излучаемого γ-кванта, что, благодаря очень малой ширине линий, приводит к полному нарушению резонанса.

Мёссбауэр показал, что ситуация может быть существенно изменена, если ядра γ-излучатели находятся в кристаллической решетке. Сила взаимодействия атомов в кристаллической решетке с соседями весьма велика. Поэтому импульс отдачи, получаемый ядром при излучении γ-кванта, оказывается недостаточным для того, чтобы ядро было вырвано из своего положения в решетке. Импульс отдачи передается всему кристаллу как целому [1]). Масса последнего чрезвычайно велика и излучение γ-кванта происходит практически без отдачи. γ-лучи, излучаемые ядрами, находящимися в кристаллической решетке, имеют несмещенную частоту ν_0. При пропускании γ-лучей, излученных кристаллическим излучателем без отдачи через поглотитель, содержащий те же ядра, что и излучатель, наблюдается резонансное поглощение

Хотя испускание γ-квантов происходит без отдачи и импульс кристалла можно считать равным нулю, наличие теплового движения приводит к малому изменению частоты. Именно, поскольку скорость излучателя — атомного ядра, совершающего тепловое движение, отлична от нуля, должен иметь место эффект Допплера.

Для вычисления изменения частоты можно воспользоваться следующими соображениями.

Если ядро излучает частоту ν_0, то энергия γ-кванта равна $h\nu_0$. Масса γ-кванта равна $\frac{h\nu_0}{c^2}$. В результате излучения масса

[1]) По крайней мере при достаточно низкой температуре. Более подробно об условиях, при которых импульс передается кристаллу как целому, см. Р. Мессбауэр, УФН, т. 72, вып. 4 (1960), Ф. Л. Шапиро — в том же выпуске журнала.

ядра уменьшается на эту величину. Пусть масса ядра до излучения равна M, а его кинетическая энергия

$$E^{(0)}_{\text{кин}} = \sqrt{p^2c^2 + M^2c^4} - Mc^2 \approx \frac{p^2}{2M}.$$

При излучении масса ядра уменьшается на величину $\frac{h\nu_0}{c^2}$ при постоянном значении импульса. При этом кинетическая энергия изменяется на величину

$$\Delta E_{\text{кин}} = \left\{\sqrt{p^2c^2 + \left(M - \frac{h\nu_0}{c^2}\right)^2 c^4} - \left(M - \frac{h\nu}{c^2}\right)c^2\right\} - \\ - E^{(0)}_{\text{кин}} \approx \left(M - \frac{h\nu_0}{c^2}\right)c^2\left(1 + \frac{p^2}{2\left(M - \frac{h\nu_0}{c^2}\right)^2 c^2}\right) - \\ - \left(M - \frac{h\nu_0}{c^2}\right)c^2 - \frac{p^2}{2M} \approx \frac{p^2}{2M^2}\frac{h\nu_0}{c^2}.$$

Заменяя истинное значение p^2 средним значением $M^2\bar{v}^2$ для теплового движения, получаем

$$\Delta E_{\text{кин}} \approx h\nu_0 \frac{\bar{v}^2}{c^2}.$$

Увеличение кинетической энергии излучающего ядра в процессе излучения движущимся ядром означает, что γ-квант уносит энергию $h\nu_0 - \Delta E_{\text{кин}} = h\nu_0\left(1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}\right)$. Эта энергия меньше, чем энергия γ-кванта, излучаемого неподвижным источником, на величину $\Delta E_{\text{кин}}$. Таким образом, тепловое движение излучающих ядер приводит к смещению частоты от ν_0 до ν, равной

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\bar{v}^2}{2c^2}\right).$$

Это выражение для смещенной частоты совпадает с формулой квадратичного $\left(\text{с учетом членов порядка } \frac{\bar{v}^2}{c^2}\right)$ эффекта Допплера. Отсутствие линейного члена в формуле допплер-эффекта связано с тем, что средняя скорость теплового движения равна нулю.

Сдвиг излучаемой линии на величину $\frac{\nu_0\bar{v}^2}{2c^2}$ хорошо согласуется с опытными данными.

Поскольку среднеквадратичная скорость молекулы в кристалле зависит от температуры, можно найти температурную зависимость величины смещения $\nu - \nu_0$:

$$\frac{d\,\Delta\omega}{dT} = -\frac{\omega_0}{Mc^2}\frac{d}{dT}\frac{M\bar{v}^2}{2}.$$

Но в кристалле теплоемкость при температуре, существенно выше дебаевской, равна (см. (30,1) ч. III):

$$C_V = N\frac{d\bar{\varepsilon}}{dT} = N\frac{d}{dT}\left(\frac{M\bar{v}^2}{2} + \frac{M\omega^2\bar{q}^2}{2}\right) = N\frac{dM\bar{v}^2}{dT},$$

откуда

$$\frac{d\,\Delta\omega}{dT} = -\frac{\omega_0}{2Mc^2N}C_V.$$

Точность измерений эффекта Мёссбауэра настолько велика, что и этот эффект был измерен. Мы не можем останавливаться здесь на ряде других весьма важных результатов, полученных при изучении эффекта Мёссбауэра [1]).

Остановимся теперь на некоторых формулах преобразования величин, играющих важную роль в физике. Мы начнем с рассмотрения излучения частицы, движущейся со скоростью, близкой к скорости света.

Предположим, что в системе координат, движущейся вместе с излучающей частицей, излучение может происходить под большим углом к направлению движения, т. е. $\cos\theta'$ изменяется в пределах

$$0 \leqslant \cos\theta' \leqslant 1.$$

Посмотрим, каков будет угол, который будет образовывать излучение в неподвижной (лабораторной) системе отсчета.

Формулу (22,3) удобно преобразовать, положив в ней

$$v \approx c - \frac{c}{\alpha^2},$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

При v, близких к c, величина $\alpha^2 \gg 1$. Вводя это обозначение, получаем при $\alpha \gg 1$

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + 1 - \frac{1}{\alpha^2}}{1 + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\cos\theta'} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\alpha^2(1+\cos\theta')}}{1 - \frac{\cos\theta'}{\alpha^2(1+\cos\theta')}} \approx 1 + \frac{\cos\theta' - 1}{\cos\theta' + 1}\frac{1}{\alpha^2} = 1 - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\theta'}{2}}{\alpha^2}.$$

[1]) См. цитированную статью Ф. Л. Шапиро (сноска на стр. 289), а также статьи Мёссбауэра и Паунда в том же номере УФН.

Поскольку $\cos\theta$ близок к единице, сам угол θ равен

$$\theta \sim \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta'}{2}}{\alpha} \sim \mathrm{tg}\frac{\theta'}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

и весьма мал при достаточно большом значении α, т. е. при малом значении разности $c - v$. Это означает, что в неподвижной системе все излучение направлено вперед и заключено в узком конусе углов $\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Раствор этого конуса тем меньше, чем ближе скорость источника v к скорости света.

Получим, далее, важную для приложений формулу преобразования элемента телесного угла $d\Omega$. Имеем, по определению,

$$d\Omega = 2\pi\sin\theta\,d\theta = -2\pi\,d\cos\theta,$$
$$d\Omega' = -2\pi\,d\cos\theta'.$$

Поэтому

$$d\Omega = \frac{d\cos\theta}{d\cos\theta'}\,d\Omega'. \qquad (22,10)$$

Из формулы (22,5) находим

$$1+\frac{v}{c}\cos\theta' = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{1}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}. \qquad (22,11)$$

Дифференцируя (22,11) по $\cos\theta$, находим

$$\frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta} = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}.$$

Поэтому окончательно

$$d\Omega' = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}\,d\Omega. \qquad (22,12)$$

Найдем закон преобразования энергии в электромагнитной волне. Из общего соотношения (13,9) и формулы (33,12) ч. I имеем

$$E = \frac{E' - \frac{E'}{c}(\boldsymbol{nv})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E'\frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (22,13)$$

Инвариант 4-вектора энергии — импульса для электромагнитного поля в силу соотношения (27,10) ч. I равен нулю:

$$I = g^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0. \qquad (22,14)$$

Заметим, что выписывая формулы для энергии и импульса поля, которые были определены в ч. I как плотности соответствующих величин и отнесены к единице объема, движущегося вместе с полем, т. е. со скоростью света, мы должны были бы более строго определить, что означает такой объем в теории относительности [1]).

Сравнивая (22,13) с формулой (22,4) для преобразования частоты, приходим к важному равенству:

$$\frac{E}{\omega} = \frac{E'}{\omega'} = \text{invar}. \qquad (22,15)$$

Найдем теперь выражение для преобразования полной интенсивности излучения:

$$I = -\frac{dE}{dt}.$$

Поскольку полный импульс, излучаемый системой в той системе отсчета, в которой она в момент излучения покоилась, равен нулю (ср. (28,5) ч. I), можно написать

$$E = \frac{E'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отсюда в силу (6,3)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{E'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dE'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{dt'} = \frac{dE'}{dt'}$$

и, следовательно,

$$I = -\frac{dE}{dt} = -\frac{dE'}{dt'} = \text{invar}. \qquad (22,16)$$

Таким образом, полная интенсивность (энергия, излучаемая в единицу времени) является инвариантом. Интенсивность излучения в элементе телесного угла $d\Omega$ преобразуется по формуле

$$dI = I(\theta)\, d\Omega = I'(\theta')\, d\Omega' = \text{invar},$$

---

[1]) Это преобразование можно найти, например, в книге В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947 или в неоднократно цитированной книге Беккера.

откуда следует, что

$$I(\theta) = I'(\theta')\frac{d\Omega'}{d\Omega} = I'(\theta')\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}. \qquad (22,17)$$

Комбинируя формулы (22,4) и (22,12), приходим к выражению

$$\omega^2\, d\Omega = \omega'^2\, d\Omega' = \mathrm{invar}. \qquad (22,18)$$

На практике часто приходится рассматривать закон преобразования величин dk_x, dk_y, dk_z. Из (22,2) находим

$$dk_x = \frac{dk'_x + \frac{v\, d\omega'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dk'_x\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{d\omega'}{dk'_x}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Учитывая, что $\omega' = c\sqrt{k'^2_x + k'^2_y + k'^2_z}$, имеем

$$\frac{d\omega'}{dk'_x} = \frac{k'_x c^2}{\omega'},$$

так что

$$dk_x = \frac{dk'_x\left(1+\frac{vk'_x}{\omega'}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dk'_x}{\omega'}\,\frac{\omega' + vk'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dk'_x}{\omega'}\,\omega.$$

Кроме того, можно написать

$$dk'_y = dk_y; \qquad dk'_z = dk_z,$$

откуда находим

$$\frac{dk_x\, dk_y\, dk_z}{\omega} = \frac{dk'_x\, dk'_y\, dk'_z}{\omega'} = \mathrm{invar}, \qquad (22,19)$$

или, в сферических координатах,

$$\frac{k^2\, dk\, d\Omega}{\omega} = \frac{k'^2\, dk'\, d\Omega'}{\omega'} = \mathrm{invar}. \qquad (22,20)$$

Важным вопросом в современной физике частиц высокой энергии является вопрос о преобразовании полного сечения рассеяния при переходе от одной инерциальной системы к другой.

В § 43 ч. I мы видели, что полное сечение в классической физике является инвариантом. В теории относительности эффективное сечение в общем случае не является инвариантом.

Согласно (43,2) и (43,4) ч. I полное число частиц, рассеянных за время dt объемом V в системе отсчета K, в которой рассеиватель покоится, равно

$$dN = \sigma I_0 \rho V\, dt,$$

где ρ — плотность числа частиц рассеивателя и

$$I_0 = n\,|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1| = n v_{\text{отн}},$$

n — плотность частиц в рассеиваемом пучке, v_2 — скорость рассеиваемых частиц, v_1 — скорость частиц рассеивателя, равная нулю в системе K.

Пусть в системе K' рассеиватель движется со скоростью $\boldsymbol{v}'_1$. Тогда ввиду инвариантности числа частиц dN имеем

$$dN = \sigma I_0 \rho V\, dt = \sigma' V' I'_0 \rho'\, dt',$$

где

$$I'_0 = n'\,|\boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{v}'_1|.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma n \rho\,|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1|\,V\, dt = \sigma' n' \rho'\,|\boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{v}'_1|\,V'\, dt'.$$

В силу формул (6,2) и (6,3) произведение $V\,dt$ является инвариантом. Плотность рассеиваемых частиц n и плотность рассеиваемых частиц ρ удовлетворяют уравнению непрерывности. Соответственно этому, можно построить 4-векторы $(\rho\boldsymbol{v}_1,\ ic\rho)$ и $(n\boldsymbol{v}_2,\ icn)$. Образуем их скалярное произведение, являющееся инвариантом. Имеем, очевидно,

$$(\rho\boldsymbol{v}_1,\ ic\rho)\cdot(n\boldsymbol{v}_2,\ icn) = n'\rho'\boldsymbol{v}'_2\boldsymbol{v}'_1 - c^2\rho' n' = -\,c^2\rho n,$$

поскольку в системе K рассеиватель покоится и $\boldsymbol{v}_1 = 0$.

Преобразуя, имеем

$$\rho' n'\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}'_1\boldsymbol{v}'_2}{c^3}\right) = \rho n.$$

Таким образом, можно написать

$$\sigma\,|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1| = \sigma v_{\text{отн}} = \frac{\sigma'\,|\boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{v}'_1|}{\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{v}'_1\boldsymbol{v}'_2}{c^2}\right)}\,.$$

Поскольку $\boldsymbol{v}_1 = 0$, последнюю формулу можно записать в симметричном виде:

$$\frac{\sigma\,|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1|}{\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}{c^2}\right)} = \frac{\sigma'\,|\boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{v}'_1|}{\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{v}'_1\boldsymbol{v}'_2}{c^2}\right)}. \qquad (22,21)$$

Мы видим, что полное эффективное сечение рассеяния не является инвариантной величиной.

В частном случае, когда скорости рассеиваемых частиц и рассеивателя направлены навстречу друг другу или в противоположных направлениях, мы можем выбрать направление движения за ось x и воспользоваться формулой сложения скоростей. Согласно (7,1) имеем

$$v_2 = \frac{v_2' - v_1'}{1 - \frac{v_1' v_2'}{c^2}}.$$

Таким образом, в этом частном случае

$$\sigma = \sigma' = \text{invar}. \tag{22,22}$$

Интересным является вопрос о том, в каком виде представляются быстро движущиеся объекты при их регистрации на фотопластинку или визуальном наблюдении. Иными словами, спрашивается, будет ли заметным лоренцево сокращение? Например, будет ли наблюдаться шар в виде эллипсоида, а куб в виде параллелепипеда и т. д.? Недавно соответствующее исследование было проведено Террелом [1]). Оказалось, что быстро движущиеся объекты должны наблюдаться не сплюснутыми, но повернутыми, причем угол поворота зависит от скорости объекта по отношению к наблюдателю и от угла наблюдения. Для того чтобы понять этот на первый взгляд неожиданный результат, уточним различие между результатами измерения формы быстро движущегося тела и специальным случаем регистрации этой формы на фотопластинке. В общем случае для измерения формы тела, например, регистрируя излучение, одновременно выходящее с различных точек его поверхности, мы должны учесть конечное значение скорости света.

Различные точки объекта наблюдения — движущегося тела — находятся на различных расстояниях от регистрирующего прибора. Поэтому электромагнитные волны, излучаемые различными точками поверхности тела, до попадания в прибор проходят различные пути за разное время. Для получения правильной формы объекта наблюдения необходимо внести соответствующие коррективы в данные измерений.

При фотографировании или визуальном наблюдении тела ситуация изменяется. Фотопластинка (или глаз) регистрирует излучение, дошедшее до нее в данный момент времени. Следовательно, на фотопластинке одновременно регистрируются электромагнитные волны, излученные разными точками объекта на-

---

[1]) J. Terrel, Phys. Rev. 116, 1041, 1959. См. также работу W. Weiskopf, Physics to day 13, 24, 1960.

блюдения в различные моменты времени. Пусть в некоторой системе отсчета покоится фотопластинка $\alpha\alpha$ (рис. 27). Предположим, что по направлению к ней движется протяженное тело. Скорость тела (и связанной с ним системы отсчета K') обозначим через $\boldsymbol{v}$. Назовем углом наблюдения ϑ угол между прямой, проведенной от фотопластинки к телу, и вектором скорости $\boldsymbol{v}$.

Излучение тела можно характеризовать в системе отсчета K', связанной с телом, волновым вектором $\boldsymbol{k}'$. Угол наблюдения в системе отсчета K' будет равен ϑ'. При этом угол θ', образуемый волновым вектором $\boldsymbol{k}'$ со скоростью $\boldsymbol{v}$, равен, очевидно, $\theta' = \pi - \vartheta'$.

В системе отсчета K волновой вектор $\boldsymbol{k}$ образует с вектором $\boldsymbol{v}$ угол θ, причем $\theta = \pi - \vartheta$. Будем считать телесный угол, под которым виден объект наблюдения, достаточно малым. При этом излучение, испускаемое разными его точками, можно характеризовать одним значением волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Назовем «картинкой» изображение тела на фотопластинке, полученное в некоторый момент времени. Посмотрим, каким образом получается картинка, т. е. как фиксируют электромагнитные волны, излучаемые разными точками A, B, C поверхности тела (см. рис. 27). Одновременно с волной, излученной точкой C на поверхности тела, до фотопластинки доходят волны, излученные точками A и B в тот момент времени, когда они находились в положениях соответственно A' и B'. Иными словами, на фотопластинке в точках A'', B'', C'' одновременно регистрируется излучение точек A, B, C. Однако при этом до пластинки доходят волны, излученные в более далеких точках A и B в более ранние моменты времени. Найдем связь между углами наблюдения ϑ и ϑ'.

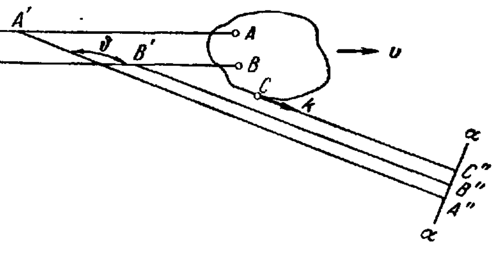


Рис. 27.

Учитывая указанную выше связь между углами наблюдения ϑ и ϑ' и углами излучения θ, θ' и формулу (22,5), мы можем написать

$$\sin\vartheta' = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sin\vartheta}{1+\frac{v\cos\vartheta}{c}}. \qquad (22,23)$$

При этом в формуле (22,5) мы заменили углы θ и θ' на $\pi - \vartheta$, $\pi - \vartheta'$. Графически зависимость $\vartheta' = f(\vartheta)$ представлена на

рис. 28. Пунктиром на том же рисунке показана прямая $\vartheta' = \vartheta$, отвечающая случаю $v = 0$, т. е. регистрации на фотопластинке неподвижного по отношению к ней объекта. Рассмотрим прежде случай $\vartheta = \pi$. Это означает, что фотографируемое тело движется прямо к фотопластинке. При этом $\vartheta' = \pi$, т. е. мы получаем на пластинке изображение передней поверхности тела.

Пусть теперь угол ϑ имеет значение, меньшее $\pi - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Это значит, что угол наблюдения лежит вне узкого конуса около направления движения.

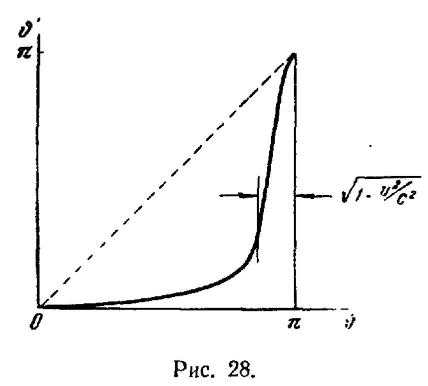


Рис. 28.

Из формулы (22,23) и графика на рис. 28 видно, что при $v \approx c$ значениям угла наблюдения $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ отвечают значения угла ϑ', близкие к нулю. Углам ϑ', близким к нулю, отвечают углы θ', близкие к π. Это значит, что при скоростях движения тела, близких к скорости света, на фотопластинку попадает излучение с тыльной стороны тела.

Подчеркнем, что этот результат относится к телу, движущемуся по направлению к фотографирующему устройству $\left(\vartheta > \frac{\pi}{2}\right)$. Наблюдаемая при этом интенсивность может быть найдена из формулы (22,17). Именно, имеем

$$I_0(\vartheta) = I_0(\vartheta') \frac{d\Omega'}{d\Omega} = I_0(\vartheta') \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2}.$$

Если угол $\vartheta < \pi - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, то наблюдаемая интенсивность света мала. Этот результат имеет простой смысл: при $v \sim c$ в системе K все излучение сконцентрировано в узком конусе с раствором $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ в направлении скорости тела.

В общем случае можно сказать, что если фотографируемый объект движется со скоростью v и наблюдается под некоторым углом ϑ, то получается такая же картинка, что и при фотографировании неподвижного объекта, но видимого под углом ϑ'. Таким образом, изображение движущегося объекта на фотопластинке получается таким же, как на пластинке, неподвижной по отношению к объекту. Однако объект фотографирования ока-

зывается повернутым на угол $\vartheta' - \vartheta$. Так, при фотографировании шара на фотопластинке должен получиться круг, при фотографировании куба — куб, повернутый под разными углами, и т. п.

На рис. 29 схематически показано, как должно изменяться изображение куба на фотопластинке по мере приближения относительной скорости к скорости света. Точкам A, B, C, D куба отвечают на фотопластинке точки A', B', C', D'.

Мы видим, как постепенно происходит «поворот» изображения.

Приведенные соображения делают особенно ясной бессмысленность терминологии «кажущееся сокращение» в применении к лоренцеву сокращению.

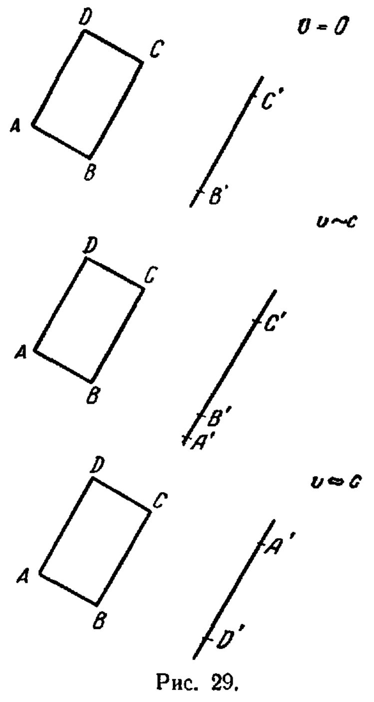


Рис. 29.

Заметим, что вся картина усложняется, если объект наблюдается под большим телесным углом. В этом случае каждой точке объекта соответствует свой угол наблюдения ϑ, а следовательно, и свой поворот. Однако и в этом случае изображение сферы на фотопластинке должно быть кругом.

§ 23. Сила Лоренца; функции Лагранжа и Гамильтона частицы, движущейся в электромагнитном поле

В электродинамике было приведено выражение для силы, действующей на заряд, движущийся в электромагнитном поле. Эта сила, называемая силой Лоренца, была взята из опытных данных. Сейчас мы приведем простой вывод формулы для лоренцевой силы, основанный на преобразованиях векторов электромагнитного поля.

Рассмотрим некоторый заряд e, движущийся с произвольной скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно неподвижной системы отсчета K. Пусть в системе отсчета, движущейся вместе с зарядом, имеется электрическое поле $\boldsymbol{E}'$. Тогда на заряд в системе отсчета K' действует сила

$$\mathcal{F}' = e\boldsymbol{E}'. \tag{23,1}$$

Нашей задачей является нахождение силы, действующей на заряд в неподвижной системе отсчета (в которой он движется со скоростью v). Для этого необходимо выразить поле E' через электромагнитное поле E, а силу $\mathcal{F}'$ — через силу $\mathcal{F}$ в неподвижной системе отсчета. Первое преобразование дается непосредственно формулами § 21.

Формулы для преобразования силы можно получить следующим образом: найдем прежде всего формулы для преобразования компонент силы Минковского. Сила Минковского является 4-вектором, и ее компоненты преобразуются по общим формулам (11,1)—(11,4). В нашем случае в системе, движущейся вместе с зарядом, скорость $v'=0$ и поэтому $F'_4=0$. При этом

$$F_1=\frac{F'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad F_2=F'_2;\quad F_3=F'_3.$$

Компоненты силы Минковского связаны с компонентами обычной силы $\mathcal{F}$ соотношениями типа (12,5).

В системе, движущейся вместе с зарядом, $v'=0$ и

$$F'_1=\mathcal{F}'_x;\quad F'_2=\mathcal{F}'_y;\quad F'_3=\mathcal{F}'_z.$$

В неподвижной системе по определению § 12

$$F_1=\frac{\mathcal{F}_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad F_2=\frac{\mathcal{F}_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad F_3=\frac{\mathcal{F}_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Поэтому находим [1]) без труда

$$\mathcal{F}_x=\mathcal{F}'_x;\quad \mathcal{F}_y=\mathcal{F}'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}};\quad \mathcal{F}_z=\mathcal{F}'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (23,2)$$

Комбинируя (23,1), (23,2) и формулы преобразований (21,1)—(21,3), получаем выражения для компонент силы:

$$\mathcal{F}_x=\mathcal{F}'_x=eE'_x=eE_x, \qquad (23,3)$$

$$\mathcal{F}_y=\mathcal{F}'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=eE'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=e\left(E_y-\frac{vH_z}{c}\right), \qquad (23,4)$$

$$\mathcal{F}'_z=\mathcal{F}'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=eE'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=e\left(E_z+\frac{vH_y}{c}\right). \qquad (23,5)$$

---

[1]) Подчеркнем, что приведенные формулы справедливы только для перехода от системы координат, движущейся вместе с частицей, к неподвижной системе.

В векторном виде:

$$\mathscr{F} = e\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right\}. \tag{23,6}$$

Таким образом, выражение для силы Лоренца получено чисто расчетным путем из общих соотношений теории относительности.

Напишем уравнения движения (12,3) для случая движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Первые три уравнения имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right\}. \tag{23,7}$$

При составлении четвертого уравнения нужно учесть, что работа силы в магнитном поле равна нулю (так как $\boldsymbol{v}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}] = \boldsymbol{H}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}] = 0$) и, следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = \mathscr{F}\boldsymbol{v} = e\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}. \tag{23,8}$$

В последующих параграфах мы рассмотрим некоторые частные случаи движения частицы в электрическом и магнитном полях. Для дальнейшего нам понадобится выражение лоренцевой силы через электромагнитные потенциалы.

Имеем

$$\mathscr{F} = e\left\{-\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}]\right\}.$$

Воспользуемся формулой векторного анализа (I, 47)

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{A}\operatorname{grad})\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{A} + [\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}] + [\boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}] = (\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{A} + [\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}].$$

При этом мы учли, что дифференцирование по координатам производится при постоянном значении скорости $\boldsymbol{v}$.

Пользуясь этой формулой, перепишем $\mathscr{F}$ в виде

$$\mathscr{F} = e\left\{-\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{A}\right\} = e\operatorname{grad}\left(\frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}}{c} - \varphi\right) - \frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt},$$

где полная производная (см. I, 7)

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{A}.$$

Уравнения движения приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e\operatorname{grad}\left\{\frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})}{c} - \varphi\right\} - \frac{e}{c}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}. \tag{23,9}$$

Эти уравнения движения можно рассматривать как уравнения Лагранжа, если функция Лагранжа имеет вид

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}). \qquad (23,10)$$

Действительно, при этом обобщенный импульс

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}. \qquad (23,11)$$

Соответственно обобщенная сила

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{e}{c}\,\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) - e\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Уравнение Лагранжа гласит:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}},$$

или

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}. \qquad (23,12)$$

Подстановка значений $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ в (23,12) вновь приводит нас к (23,9).

В нерелятивистском приближении функция Лагранжа приобретает вид

$$L \approx -mc^2\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right) + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\varphi = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}). \qquad (23,13)$$

При этом мы опустили постоянную ($-mc^2$), поскольку в уравнения Лагранжа входят лишь производные от L и сама L определена лишь с точностью до полной производной по времени[1]).

Сравнивая функцию Лагранжа в обычном поле сил,

$$L = \frac{mv^2}{2} - U,$$

мы видим, что при движении в поле функция Лагранжа содержит еще член, зависящий от скорости и вектора-потенциала. Поэтому даже в нерелятивистском приближении функция Лагранжа в электромагнитном поле не может быть представлена в виде разности кинетической и потенциальной энергий.

---

[1]) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1958, стр 13.

Найдем еще функцию Гамильтона заряженной частицы в электромагнитном поле. Очевидно, имеем

$$H = \sum_{i=x,\,y,\,z} \dot{q}_i P_i - L = \boldsymbol{v}\boldsymbol{P} - L = \boldsymbol{v}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) + \\ + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\varphi - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \quad (23{,}14)$$

Для получения функции Гамильтона следует еще выразить скорость $\boldsymbol{v}$ через обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$. Проще всего это сделать, исходя из равенств

$$(H - e\varphi)^2 = \frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad (23{,}15)$$

$$\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2, \quad (23{,}16)$$

которые получаются после возведения в квадрат (23,14) и (23,11). Переписывая (23,16) в виде

$$\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + m^2c^2 - m^2c^2 = \frac{m^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - m^2c^2 = \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2$$

и сравнивая с (23,15), получаем

$$(H - e\varphi)^2 = c^2\left\{m^2c^2 + \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\right\},$$

или

$$H = \sqrt{m^2c^4 + \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 c^2} + e\varphi. \quad (23{,}17)$$

Как и следовало ожидать из общих соображений, функция Гамильтона в электромагнитном поле, по существу, совпадает с функцией Гамильтона в электростатическом поле: магнитное поле не изменяет энергию частицы.

В нерелятивистском приближении получаем из (23,17)

$$H \approx mc^2\sqrt{1 + \frac{\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{m^2c^2}} + e\varphi \approx mc^2 + \frac{\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m} + e\varphi. \quad (23{,}18)$$

Последнее выражение, если не считать энергии покоя, совпадает с классическим выражением функции Гамильтона частицы в электромагнитном поле (см. ч. I, (41,4)).

§ 24. Движение частиц в постоянных электрическом и магнитном полях

Простейшим случаем движения релятивистских частиц является движение их в постоянных полях — электрическом и магнитном. Вместе с тем, движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях имеет очень большой практический интерес. Достаточно привести несколько примеров: изучение движения электронов в электрическом и магнитном полях позволило с большой степенью точности проверить релятивистское выражение для импульса; релятивистские формулы, определяющие закон движения частиц в электрическом и магнитном полях, представляют основу проектирования современных ускорителей ядерных частиц, позволяющих получать частицы релятивистских энергий. Изучение движения весьма быстрых частиц в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле, служит для определения их импульса. Сочетание измерений импульса с определением энергии (производимым, например, по создаваемой частицами ионизации) дает возможность определить массу частиц.

Рассмотрим сначала движение релятивистской частицы в постоянном во времени и однородном в пространстве электрическом поле $\boldsymbol{E}$. Направление вектора $\boldsymbol{E}$ выберем за ось x. Согласно § 12 уравнения движения имеют вид

$$\frac{dp_x}{dt} = eE_x,$$

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_z}{dt} = 0,$$

$$\frac{dE}{dt} = eE_x v_x = eE_x \frac{dx}{dt}.$$

В качестве первого примера рассмотрим движение заряда в поперечном электрическом поле. Пусть в момент времени $t=0$ заряд находился в точке $x=0$ и имел импульс $p_x=0$, $p_y=p_0$, $p_z=0$ и энергию

$$E_0 = \sqrt{p_0^2c^2 + m^2c^4}.$$

Это означает, что в начальный момент заряд двигался в направлении, перпендикулярном к полю. Интегрирование уравнений для компонент импульса в постоянном электрическом поле выполняется непосредственно и с учетом начальных условий дает

$$p_x = eE_xt, \quad p_y = p_0, \quad p_z = 0. \tag{24,1}$$

Уравнение для энергии также интегрируется непосредственно:

$$E = eE_xx + E_0.$$

С другой стороны,

$$E = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)c^2 + m^2c^4} =$$
$$= \sqrt{[(eE_xt)^2 + p_0^2]c^2 + m^2c^4} = \sqrt{(ecE_xt)^2 + E_0^2}.$$

Сравнивая два выражения для энергии, можем написать

$$\sqrt{(ecE_xt)^2 + E_0^2} = eE_xx + E_0. \tag{24,2}$$

Формулы (24,1) показывают, что движение является плоским и происходит в плоскости (xy). Для нахождения траектории можно составить отношение

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} : \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{v_y} = \frac{dx}{dy}. \tag{24,3}$$

Подставляя в (24,3) значение $\frac{p_x}{p_y}$ из (24,1), получаем

$$\frac{dx}{dy} = \frac{eE_xt}{p_0}. \tag{24,4}$$

Для исключения времени воспользуемся формулой (24,2), которая дает

$$t = \frac{\sqrt{(eE_xx + E_0)^2 - E_0^2}}{ecE_x}.$$

Подставляя это выражение в (24,4), приходим к дифференциальному уравнению траектории

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(eE_xx + E_0)^2 - E_0^2}}{cp_0}.$$

Интегрирование дает уравнение траектории

$$\frac{y}{cp_0} = \int \frac{dx}{\sqrt{(eE_xx + E_0)^2 - E_0^2}} = \frac{1}{eE_x} \operatorname{arch} \frac{eE_xx}{E_0},$$

или

$$x = \frac{E_0}{eE_x} \operatorname{ch} \frac{eE_xy}{cp_0}. \tag{24,5}$$

Формула (24,5) показывает, что в поперечном электрическом поле заряд движется по цепной линии. При $v \ll c$ можно написать

$$E_0 \approx mc^2; \quad p_0 \approx mv_0 \quad \text{и} \quad x \approx \frac{mc^2}{eE_x} \operatorname{ch} \frac{eE_xy}{mv_0c}. \tag{24,6}$$

Если аргумент гиперболического косинуса, содержащий c в знаменателе, мал, то, разлагая (24,6) в ряд, приходим к классической формуле для траектории, найденной нами ранее (см. ч. I, § 39).

Вторым важным случаем является движение заряда вдоль электрического поля, т. е. случай начальных условий

$$p_x^{(0)} = 0; \quad p_y^{(0)} = 0; \quad p_z^{(0)} = 0; \quad E^{(0)} = mc^2.$$

При этом поле будет считаться постоянным во времени, но произвольно изменяющимся в пространстве вдоль оси x.

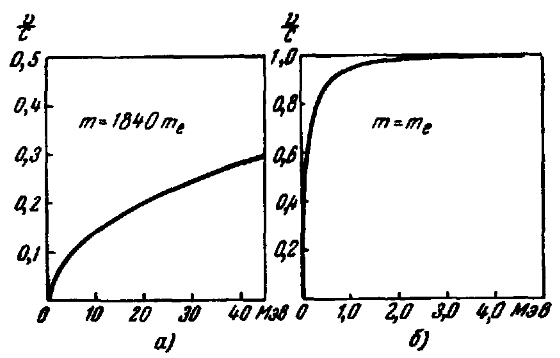


Рис. 30.

Интегрирование уравнений для компонент импульса дает

$$p_x = eE_x(x)t, \quad p_y = 0, \quad p_z = 0. \tag{24,7}$$

Уравнение для энергии запишем в виде

$$\frac{dE}{dt} = -e\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt} = -e\frac{d\varphi}{dt},$$

где φ — электростатический потенциал. Отсюда находим интеграл энергии

$$E + e\varphi = \text{const} = mc^2 + e\varphi_0,$$

или

$$\Delta E = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = eV, \tag{24,8}$$

где V — пройденная частицей разность потенциалов и ΔE — соответствующее изменение энергии. Скорость частицы, прошедшей разность потенциалов V, равна

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}\,\frac{1+\frac{e}{m}\frac{V}{2c^2}}{\left(1+\frac{e}{m}\frac{V}{c^2}\right)^2}}. \tag{24,9}$$

Это выражение постоянно используется на практике для вычисления скорости частицы, разгоняющейся в электрическом поле (рис. 30).

При $\frac{eV}{mc^2} \ll 1$ формула (24,9) переходит в классическое выражение (39,1) ч. I. Наоборот, при $\frac{eV}{mc^2} \gg 1$ с увеличением потенциала, скорость частицы стремится к постоянному пределу: $v \to c$.

Если поле однородно в пространстве, то зависимость скорости и координаты от времени получается непосредственно из (24,7). Именно, из (24,7) имеем

$$v = \frac{c\left(\frac{eE_x t}{mc}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{eE_x t}{mc}\right)^2}}. \qquad (24,10)$$

Формула (24,10) дает закон равномерно-ускоренного движения в механике теории относительности. Под равномерно-ускоренным движением в теории относительности понимают следующее: введем множество инерциальных систем отсчета K_1', K_2', K_3', ..., движущихся со скоростями, равными скорости движения частицы в различные моменты времени. Каждая из систем отсчета K' называется мгновенно-сопутствующей частице. В мгновенно-сопутствующей системе скорость частицы равна нулю.

Поэтому согласно (11,12) и (11,16) компоненты 4-ускорения равны в K':

$$w_x' = \dot{v}_x' = \dot{v} = \frac{eE_x}{m}, \quad w_\tau' = 0.$$

В неподвижной системе отсчета, в силу (11,1),

$$w_x = \frac{w_x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{eE_x}{m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\dot{v}}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2\dot{v}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}.$$

Отсюда найдем величину $\dot{v}$, которую мы и будем называть ускорением:

$$\dot{v} = \frac{eE_x}{m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}. \qquad (24,11)$$

Интегрируя (24,11), вновь приходим к формуле (24,10). Интегрируя (24,10), получаем закон движения:

$$x - x_0 = \frac{mc^2}{eE_x}\sqrt{1 + \left(\frac{eE_x}{mc}t\right)^2}. \qquad (24,12)$$

Это — уравнение гиперболы. Поэтому движение в постоянном поле в релятивистской механике часто именуется гиперболи-

ческим, в отличие от параболической траектории классической механики.

Наконец, рассмотрим движение частицы в постоянном и однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Направление последнего выберем за ось z. Тогда уравнения движения приобретают вид

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c} v_y H, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{e}{c} v_x H, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = 0. \quad (24,13)$$

Интегрируя уравнение для энергии, имеем

$$E = \text{const} = E_0.$$

При этом с помощью (13,20) получаем

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c^2} v_x\right) = \frac{E_0}{c^2}\frac{dv_x}{dt}; \quad \frac{dp_y}{dt} = \frac{E_0}{c^2}\frac{dv_y}{dt}.$$

Поэтому уравнения для x-й и y-й компонент импульса можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{v_y}\frac{dv_x}{dt} &= \frac{ecH}{E_0}, \\ \frac{1}{v_x}\frac{dv_y}{dt} &= -\frac{ecH}{E_0}. \end{aligned}\right\} \quad (24,14)$$

Уравнениям (24,14) можно удовлетворить, положив

$$v_x = a\cos(\omega t + \alpha); \quad v_y = -a\sin(\omega t + \alpha). \quad (24,15)$$

При этом для ω находим

$$\omega = \frac{ecH}{E_0}. \quad (24,16)$$

Кроме того, подстановка (24,15) в (24,14) с учетом (24,16) дает

$$v_x^2 + v_y^2 = (v_\perp)^2 = (v_\perp)_0^2 = \text{const}.$$

Величина $(v_\perp)_0$ представляет начальную скорость движения частицы в плоскости (xy), которая остается постоянной во времени.

Вторичное интегрирование приводит к уравнению траектории в плоскости (xy):

$$x = x_0 + \frac{(v_\perp)_0}{\omega}\sin(\omega t + \alpha); \quad y = y_0 + \frac{(v_\perp)_0}{\omega}\cos(\omega t + \alpha).$$

Вдоль оси z, как видно из (24,13), частица движется с постоянной скоростью:

$$z = z_0 + (v_z)_0 t.$$

Если, в частности, заряд в начальный момент не имел скорости вдоль оси z, т. е. $(v_z)_0 = 0$, траектория его представляет окружность в плоскости (xy), радиус которой равен

$$R = \frac{(v_\perp)_0}{\omega} = \frac{(v_\perp)_0 E_0}{ecH} = \frac{cp_0}{eH}, \tag{24,17}$$

где p_0 — начальный импульс.

Частота обращения по окружности ω пропорциональна напряженности магнитного поля и зависит от энергии E_0, которая остается постоянной при движении. При малых энергиях

$$E_0 \approx mc^2 \quad \text{и} \quad \omega \approx \frac{eH}{mc}, \tag{24,18}$$

т. е. переходит в циклотронную частоту, определенную в § 39 ч. I и не зависящую от энергии частицы.

Формулы (24,16) и (24,17) имеют весьма важное значение для современной ядерной физики и техники.

Измерение отклонения частиц в магнитном поле позволяет найти их импульс по формуле (24,17).

Формула (24,16) служит основой расчета современных циклотронов, позволяющих получить тяжелые частицы (протоны, дейтроны и α-частицы) с релятивистскими скоростями.

Как известно, в циклотроне частицы движутся в магнитном поле по окружности в разрезных коробках, именуемых дуантами, к которым приложено переменное напряжение. Промежуток между дуантами частицы проходят в ускоряющем электрическом поле. Таким образом описав полуокружность с неизменной скоростью, частица ускоряется, описывает следующую полуокружность с новым значением скорости и т. д. Для непрерывного разгона поле в ускоряющем промежутке в момент подхода частицы должно быть в определенной фазе. До тех пор, пока частицы не приобретут релятивистских скоростей, частота электрического поля, подаваемого на дуанты, определяется формулой (24,18) и не зависит от энергии частицы. Если, однако, скорость частиц достигает релятивистских значений, частота их обращения согласно (24,16) оказывается изменяющейся с энергией. Поэтому для дальнейшего разгона частиц необходимо изменять частоту ускоряющего поля в соответствии с формулой (24,16). Циклотроны, работающие в режиме переменной частоты, называются релятивистскими циклотронами или синхротронами.

Впервые расчет синхротронов был осуществлен 1944 г. В. И. Векслером, показавшим, что благодаря особым свойствам движения заряженных частиц (так называемой автофази-

ровке) в синхротроне подвергаются ускорению частицы, поступающие в камеру ускорителя с различными начальными фазами движения.

Ускорение легких частиц — электронов — уже при сравнительно малых энергиях проводится в релятивистском режиме.

Одним из важнейших типов ускорителей является индукционный ускоритель — бетатрон. Принцип действия бетатрона заключается в следующем: в бетатроне электроны движутся в магнитном поле с аксиальной симметрией между полюсами электромагнита.

Если бы магнитное поле было постоянным во времени, движение электрона с постоянной скоростью совершалось бы по окружности радиуса R, даваемого формулой (24,17). В бетатроне, однако, напряженность магнитного поля изменяется во времени. Для конкретности будем считать, что напряженность магнитного поля возрастает во времени. Это изменение напряженности магнитного поля влечет за собой:

1) появление индуцированного электрического поля с напряженностью $\boldsymbol{E}$, определяемой формулой

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S}$$

или

$$E_\varphi = -\frac{1}{2\pi R c}\frac{d\Phi}{dt},$$

где $\Phi = \int \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{S}$ — поток индукции через площадь круговой орбиты радиуса R; в силу осевой симметрии магнитного поля ясно, что электрическое поле направлено по касательной к окружности радиуса R; соответственно, на электрон будет действовать сила $(-eE_\varphi)$, также направленная по касательной к этой окружности; возрастание импульса электрона будет отвечать, согласно (24,17), возрастанию радиуса орбиты, т. е. стремлению электрона двигаться по развертывающейся спирали;

2) уменьшение радиуса окружности в (24,17) при росте напряженности H; это отвечает тенденции электрона двигаться по свертывающейся спирали.

Если подобрать закон изменения $\boldsymbol{H}$ во времени (и, как это будет видно из дальнейшего, в пространстве) так, чтобы обе тенденции точно компенсировали друг друга, электрон будет двигаться по окружности постоянного радиуса R с возрастающим импульсом. Это — так называемый бетатронный режим движения частицы.

Перейдем к выяснению условий, при которых будет иметь место подобный режим.

Изменение импульса электрона можно написать в виде

$$\frac{dp}{dt} = -eE_{\varphi} = \frac{e}{2\pi cR}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{24,19}$$

Если считать, что электрон движется по окружности постоянного радиуса, то, интегрируя (24,19), получаем

$$p = \frac{e}{2\pi cR}\Phi.$$

Постоянная интегрирования положена равной нулю в предположении, что в момент времени $t=0$ имеют место равенства $H=0$ и $v=0$.

Если подставить p в (24,17), то условие постоянства радиуса орбиты во времени можно представить в виде

$$R = \frac{cp}{eH} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Phi}{RH}. \tag{24,20}$$

Поток магнитной индукции через площадь орбиты равен

$$\Phi = \pi R^2 \overline{H},$$

где $\overline{H}$ — среднее поле внутри орбиты.

Тогда условие (24,20) сводится к равенству

$$H_{r=R} = \frac{\overline{H}}{2}.$$

Последнее означает, что для движения ускоряемого электрона по круговой орбите необходимо создать не только переменное во времени, но и неоднородное в пространстве магнитное поле. Поле на орбите должно быть равным половине средней напряженности внутри орбиты. Для выполнения этого требования поле должно спадать с увеличением радиуса r. Ясно, что ускорение частиц в бетатроне имеет прерывистый характер — оно происходит только при возрастании магнитного поля во времени. Мы не можем осветить здесь вопросы устойчивости движения частиц на орбите бетатрона, а также детали устройства реальных ускорителей [1]).

§ 25*. Система слабо взаимодействующих заряженных частиц

Мы можем теперь вернуться к системе частиц в релятивистской механике и рассмотреть упоминавшийся в § 15 случай частиц, связанных между собой электромагнитным взаимодействием [2]).

---

[1]) См., например, А. П. Гринберг, Методы ускорения заряженных частиц, Гостехиздат, 1950.

[2]) В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, 1955, стр. 105; Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, 1960, стр. 203.

Мы указывали уже, что для системы взаимодействующих частиц нельзя ввести потенциальную энергию взаимодействия, поскольку запаздывающее взаимодействие зависит не от взаимного положения частиц в данный момент времени, но от движения их в предшествующее время. Кроме того, при ускоренном движении заряженные частицы излучают и часть энергии уходит из системы, так что система в целом является неконсервативной.

Оказывается, однако, что если движение частиц совершается достаточно медленно, так что $v \ll c$, то в известном приближении можно ввести понятие о взаимодействии системы зарядов, зависящем только от их взаимного расстояния. Это позволит характеризовать состояние системы движущихся зарядов с помощью механических величин и рассматривать движение системы вне непосредственной связи с состоянием электромагнитного поля, по законам механики.

Действительно, если заряды движутся с малыми скоростями, так что запаздыванием можно полностью пренебречь, то их энергия взаимодействия выражается формулой электростатики

$$U = \sum_{i<k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}, \tag{25,1}$$

где r_{ik} — фиксированное расстояние между зарядами i и k. Для произвольно выбранного k-го заряда можно написать функцию Лагранжа в виде

$$L_k = \frac{m_k v_k^2}{2} - e_k \varphi_k, \tag{25,2}$$

где φ_k — потенциал поля, действующего на заряд k.

Функция Лагранжа системы зарядов получается простым суммированием:

$$L = \sum L_k = \sum_k \left(\frac{m_k v_k^2}{2} - e_k \varphi_k \right). \tag{25,3}$$

Зная функцию Лагранжа, можно найти закон движения системы.

Дальнейшие расчеты покажут, что и в следующих приближениях разложения по степеням отношения $\frac{v}{c}$, вплоть до членов порядка $\frac{v^2}{c^2}$, можно найти функцию Лагранжа системы. Это в свою очередь позволит осуществить указанную программу чисто механического описания системы зарядов.

Вместе с тем ясно, что если не отбрасывать величины порядка $\left(\frac{v}{c}\right)^3$, то подобное описание станет, вообще говоря, невозможным. Действительно, согласно результатам § 27 ч. I, дипольное излучение системы определяется величиной порядка $1/c^3$,

Сохранение старших членов разложения потенциалов отвечает учету дипольного излучения. Это делает незаконным механический подход к рассмотрению состояния системы.

В системах, в которых нет дипольного излучения, разложение потенциалов можно провести до членов следующего порядка малости. Напишем функцию Лагранжа k-й частицы с учетом движения зарядов в системе:

$$L_k = -m_k c^2 \sqrt{1 - \frac{v_k^2}{c^2}} - e_k \varphi_k + \frac{e_k}{c}(\boldsymbol{v}_k \boldsymbol{A}_k), \tag{25,4}$$

где φ_k и $\boldsymbol{A}_k$ — потенциалы поля, существующего в той точке, где находится k-й заряд. Эти потенциалы с учетом конечности скорости распространения взаимодействия можно представить в виде запаздывающих потенциалов (ср. § 24 ч. I):

$$\varphi(\boldsymbol{r}_k, t) = \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|} dV',$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_k, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|}{c}\right) dV'}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|}.$$

При медленном движении ($v \ll c$) плотность заряда и плотность тока можно разложить в ряд по степеням времени запаздывания. Важное отличие этого разложения от аналогичных формул § 26 ч. I заключается в том, что нас интересуют потенциалы в точке $\boldsymbol{r}_k$, находящейся в пределах рассматриваемой системы зарядов. Поэтому нельзя разбить полное время запаздывания на собственное запаздывание и запаздывание системы, и разложение следует вести по полному запаздыванию:

$$\tau = \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}|}{c}.$$

Тогда имеем

$$\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|}{c}\right) \approx \rho(\boldsymbol{r}', t) - \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\boldsymbol{r}', t) + \frac{1}{2} \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(\boldsymbol{r}', t),$$

$$\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|}{c}\right) \approx \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t).$$

Отсюда

$$\varphi(\boldsymbol{r}_k, t) \approx \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|} dV' - \frac{1}{c} \int \frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}', t)}{\partial t} dV' + \frac{1}{2c^2} \int |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'| \frac{\partial^2 \rho(\boldsymbol{r}', t)}{\partial t^2} dV' = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|} dV' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho(\boldsymbol{r}', t) dV' + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'| \rho(\boldsymbol{r}', t) dV'.$$

Порядок дифференцирования и интегрирования может быть изменен, поскольку вектор $\boldsymbol{r}_k$ фиксирован, а $\boldsymbol{r}'$ является совокупностью трех независимых переменных.

Поскольку интеграл во втором члене берется в момент времени t, он представляет полный заряд системы. Соответственно

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho(\boldsymbol{r}', t)\,dV' = \frac{\partial e}{\partial t} = 0.$$

Окончательно находим

$$\varphi(\boldsymbol{r}_k, t) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|}\,dV' + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|\,\rho(\boldsymbol{r}', t)\,dV', \qquad (25,5)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_k, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}'|}\,dV'. \qquad (25,6)$$

Дальнейшие вычисления становятся более прозрачными, если перейти к точечным зарядам, положив

$$\rho(\boldsymbol{r}', t) = \sum_i{}' e_i\,\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_i(t)). \qquad (25,7)$$

Штрих при знаке суммы показывает, что в ней отсутствует член $i = k$. В дальнейшем мы не будем писать штрих при сумме, чтобы не загромождать формул, но будем подразумевать его во всех суммированиях по зарядам.

Подставляя выражение (25,7) для $\rho(\boldsymbol{r}', t)$ в (25,5) имеем

$$\varphi(\boldsymbol{r}_k, t) = \sum \varphi_i = \sum \frac{e_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i(t)|} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e_i|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i(t)| =$$
$$= \sum \frac{e_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i(t)|} + \frac{1}{2c^2}\sum e_i\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i(t)|. \qquad (25,8)$$

Подчеркнем, что в результате интегрирования (устранения δ-функции) вместо $\boldsymbol{r}'$ в соответствующих выражениях появился радиус-вектор $\boldsymbol{r}_i(t)$ i-го заряда, явно зависящий от времени. Поэтому результат интегрирования по переменным $\boldsymbol{r}'$ следует дифференцировать по времени.

Аналогично, полагая

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t) = \sum_i{}' e_i\boldsymbol{v}_i\,\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_i(t)), \qquad (25,9)$$

имеем из (25,6)

$$\boldsymbol{A} = \sum \boldsymbol{A}_i = \sum \frac{e_i\boldsymbol{v}_i}{c\,|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|}. \qquad (25,10)$$

Здесь φ_i и $\boldsymbol{A}_i$ — потенциалы, создаваемые в момент времени t в точке $\boldsymbol{r}_k$ i-м зарядом.

Выражение (25,8) для скалярного потенциала с учетом запаздывания (второе слагаемое) содержит вторую производную

по времени от вектора $\boldsymbol{r}_i$, т. е. ускорение i-й частицы, создающей поле в точке $\boldsymbol{r}_k$. Между тем, в функцию Лагранжа могут входить только координаты и скорости частиц. Поэтому целесообразно произвести градиентное преобразование (см. § 11 ч. I) и подобрать функцию ψ так, чтобы в скалярном потенциале второй член отсутствовал. Именно, полагая

$$\varphi_i \to \varphi_i' + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_i}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{A}_i' - \operatorname{grad}\psi_i,$$

где

$$\psi_i = \frac{e}{2c}\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i(t)| = \frac{e}{2c}\operatorname{grad}|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i) =$$
$$= -\frac{e}{2c}\left\{-\frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|}\right\}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = \frac{e}{2c}\frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|}, \quad (25,11)$$

находим из (25,5)

$$\varphi' = \sum \varphi_i' = \sum_i \frac{e_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|}. \quad (25,12)$$

При дифференцировании по времени положение точки наблюдения $\boldsymbol{r}_k$ является фиксированным, градиент направлен от заряда i к точке наблюдения, $\boldsymbol{v}_i$ означает скорость движения i-го заряда в момент времени t.

Соответственно, для $\boldsymbol{A}'$ получаем

$$\boldsymbol{A}_i' = \boldsymbol{A}_i + \operatorname{grad}\psi_i = \sum_i \frac{e_i \boldsymbol{v}_i}{c|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} + \operatorname{grad}\frac{e_i}{2c}\frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|}. \quad (25,13)$$

По формуле

$$\operatorname{grad}_{\boldsymbol{r}_i}\frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} = -\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} + \frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|^3},$$

где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор, находим

$$\operatorname{grad}\frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} = -\frac{\boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} + \frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|^3}.$$

Отсюда для полного вектора-потенциала находим

$$\boldsymbol{A}' = \sum \boldsymbol{A}_i' = \sum_i \left\{\frac{e_i \boldsymbol{v}_i}{2c|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} + \frac{e_i}{2c}\frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|^3}\right\}. \quad (25,14)$$

Найденные выражения (25,12) и (25,14) для φ' и $\boldsymbol{A}'$ следует подставить в функцию Лагранжа (25,4) k-й частицы. Предварительно в ней следует разложить первый член в ряд по

степеням $\frac{v^2}{c^2}$ и ограничиться членами того же порядка малости, что и удержание в φ' и $\boldsymbol{A}'$. Это дает

$$m_k c^2 \sqrt{1 - \frac{v_k^2}{c^2}} \approx m_k c^2 \left(1 - \frac{v_k^2}{2c^2} - \frac{1}{8} \frac{v_k^4}{c^4}\right). \tag{25,15}$$

В результате находим

$$L_k = -m_k c^2 + \frac{m_k v_k^2}{2} + \frac{1}{8} \frac{m_k v_k^4}{c^2} - e_k \varphi' + \frac{e_k (\boldsymbol{v}_k \boldsymbol{A}')}{c} =$$
$$= -m_k c^2 + \frac{m_k v_k^2}{2} + \frac{1}{8} \frac{m_k v_k^4}{c^2} - \sum_i \left\{ \frac{e_i e_k}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2c^2} \frac{e_i e_k \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_k}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} - \frac{e_i e_k}{2c^2} \frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_k)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|^3} \right\}. \tag{25,16}$$

Первый член в функции Лагранжа L_k относится к покоящейся частице, второй имеет смысл кинетической энергии в приближении классической механики, третий — релятивистской поправки к кинетической энергии. Слагаемое в фигурных скобках зависит только от мгновенных положений и скоростей частиц.

Величину

$$U_{ik} = \frac{e_i e_k}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} - \frac{1}{2c^2} \frac{e_i e_k \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_k}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} - \frac{e_i e_k (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_k)}{2c^2 |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|^3}, \tag{25,17}$$

зависящую от расстояния между i-й и k-й частицами в данный момент времени, можно рассматривать как обобщенную энергию взаимодействия между частицами. Первое слагаемое имеет очевидный смысл — это потенциальная энергия взаимодействия между двумя неподвижными i-м и k-м зарядами. Два других члена, пропорциональных $\frac{\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_k}{c^2}$, представляют поправку к энергии взаимодействия, учитывающую движение зарядов и запаздывание. Ясно, однако, что хотя U_{ik} — энергия взаимодействия, она не имеет смысла потенциальной энергии, зависящей только от положения частиц.

Выражение (25,17) совершенно симметрично в обоих зарядах. Поэтому легко написать функцию Лагранжа для системы частиц. Именно,

$$L = \sum_k \left\{ -m_k c^2 + \frac{m_k v_k^2}{2} + \frac{m_k v_k^4}{8c^3} \right\} - \sum_{k>i} \left\{ \frac{e_i e_k}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} - \right.$$
$$\left. - \frac{e_i e_k}{2c^2} \frac{\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_k}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|} - \frac{e_i e_k}{2c^2} \frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_k)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i|^3} \right\} = L_1 + L_2, \tag{25,18}$$

где L_1 — функция Лагранжа системы зарядов в пренебрежении релятивистскими поправками и запаздыванием, даваемая фор-

мулой (25,3), и L_2 — добавка к ней, найденная с точностью до членов порядка $\left(\frac{v}{c}\right)^3$:

$$L_2=\frac{1}{4c^2}\left\{\sum_k \frac{m_k v_k^4}{2}+2\sum_{k>i} e_i e_k\left[\frac{v_i v_k}{|r_k-r_i|}+\frac{(r_k-r_i, v_i)(r_k-r_i, v_k)}{|r_k-r_i|^3}\right]\right\}. \tag{25,19}$$

Зная функцию Лагранжа, можно найти энергию, массу и импульс системы.

Энергия системы находится по обычным правилам и равна

$$E_{\text{полн}}=\sum_k v_k\frac{\partial L}{\partial v_k}-L=E_0+E_1+E_2, \tag{25,20}$$

где

$$E_0=\sum_k m_k c^2, \quad E_1=\frac{1}{2}\sum_k m_k v_k^2+\sum_{k>i}\frac{e_i e_k}{|r_k-r_i|}$$

и E_2 — релятивистская поправка к энергии, которая равна

$$E_2=\frac{3}{8}\sum_k \frac{m_k v_k^4}{c^2}+\frac{1}{2c^2}\left\{\sum_{k>i} e_i e_k\left[\frac{v_i v_k}{|r_k-r_i|}+\frac{(r_k-r_i, v_i)(r_k-r_i, v_k)}{|r_k-r_i|^3}\right]\right\}. \tag{25,21}$$

Мы видим, прежде всего, что энергия системы не может быть представлена в виде суммы кинетической и потенциальной энергий. Релятивистская поправка к энергии E_2 зависит как от координат, так и от скоростей, так что с учетом этой поправки потенциальной энергии системы не существует. Лишь в случае неподвижных зарядов, точнее, зарядов, движущихся так медленно, что величинами порядка $\frac{v^2}{c^2}$ можно полностью пренебречь, возможно опустить величину E_2 и пользоваться потенциальной энергией (25,1).

Пользуясь обычным определением массы, находим массу системы

$$M=\frac{E_{\text{полн}}}{c^2}=\sum_k m_k+\frac{E_1+E_2}{c^2}. \tag{25,22}$$

Таким образом, масса системы слагается из масс покоя частиц и масс, обязанных своим происхождением кинетической энергии и энергии взаимодействия частиц системы (в приближении неподвижных зарядов — потенциальной энергии). Масса M не обладает, очевидно, аддитивными свойствами и не равна сумме масс отдельных частиц. Энергия системы E и ее масса M сохраняются. Однако для отдельных слагаемых, входящих в $E_{\text{полн}}$ и M, написать закон сохранения нельзя.

Импульс системы $\boldsymbol{P}$, по определению, равен

$$\boldsymbol{P}=\sum_k \frac{\partial L_k}{\partial \boldsymbol{v}_k}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2, \tag{25,23}$$

где $\boldsymbol{P}_1=\sum\limits_k m_k\boldsymbol{v}_k$ — обычное значение импульса в классической механике и $\boldsymbol{P}_2$ — релятивистская поправка к нему:

$$\boldsymbol{P}_2=\frac{1}{2c^2}\sum m_k v_k^2\boldsymbol{v}_k+\frac{1}{2c^2}\sum_{k>i} e_i e_k\left[\frac{\boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_i|}+\frac{(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_i,\ \boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_i|^3}\right]. \tag{25,24}$$

Мы видим, что поправка $\boldsymbol{P}_2$ к импульсу зависит от координат частиц системы.

Легко показать, что в рассматриваемом приближении можно ввести понятие о центре инерции системы, которое не существует в произвольной системе взаимодействующих частиц. Из определения (15,16) скорости центра инерции $\boldsymbol{V}_{\text{ц. и}}=\frac{c^2\boldsymbol{P}}{E_{\text{полн}}}$ видно, что вектор $\boldsymbol{V}_{\text{ц. и}}$ можно представить в виде производной по времени от радиуса-вектора центра инерции:

$$\boldsymbol{R}_{\text{ц. и}}\approx\frac{\sum\limits_k\left\{m_kc^2+\frac{1}{2}m_kv_k^2+e_k\sum\limits_i{}'\frac{e_i}{|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_i|}\right\}\boldsymbol{r}_k}{E_0+E_1}. \tag{25,25}$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой равенства

$$\boldsymbol{V}_{\text{ц. и}}=\frac{d\boldsymbol{R}_{\text{ц. и}}}{dt}=\frac{\boldsymbol{P}c^2}{E_{\text{полн}}},$$

справедливого с точностью до величин порядка $\frac{v^2}{c^2}$.

Помимо интеграла энергии и импульса, система материальных точек обладает интегралом момента

$$\boldsymbol{L}=\sum_k\left[\boldsymbol{r}_k,\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_k}\right]=\boldsymbol{L}_0+\boldsymbol{L}_1, \tag{25,26}$$

где $\boldsymbol{L}_0$ — момент импульса классической механики, а $\boldsymbol{L}_1$ — релятивистская поправка, зависящая от скоростей и координат всех точек системы.

Мы видим, что в этом приближении $\left(\text{с учетом поправок }\frac{v^2}{c^2}\right)$ в релятивистской механике системы можно ввести те же основные понятия, что и в классической механике. Однако и в этом приближении система не обладает потенциальной энергией.

Таким образом, кроме разобранного в § 15 случая системы частиц, взаимодействующих путем столкновений, в теории отно-

сительности можно построить общую механику системы взаимодействующих заряженных частиц. Однако в этом случае теория имеет приближенный характер и наименьшие удерживаемые в ней члены имеют порядок $\frac{v^2}{c^2}$. Учет последующих членов разложения по степеням $\left(\frac{v}{c}\right)$ возможен лишь в конкретных системах, не обладающих дипольным $\left(\text{члены } \left(\frac{v}{c}\right)^3\right)$, квадрупольным $\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$ и т. д. излучениями.

В дальнейшем нам понадобится другое представление энергии взаимодействия в том случае, когда система состоит из двух частиц. Записав функцию Лагранжа первой частицы в виде

$$L_1 = -m_1c^2\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} - e_1\varphi_1 + \frac{e_1}{c}(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{A}_1),$$

будем считать φ_1 и $\boldsymbol{A}_1$ потенциалами поля, создаваемого второй частицей в той точке пространства, в которой в момент времени t находится первая частица. С учетом запаздывания и при произвольном законе движения потенциалы φ_1 и $\boldsymbol{A}_1$ представляют потенциалы Лиенара — Вихерта. Потенциалы Лиенара — Вихерта φ_1 и $\boldsymbol{A}_1$ связаны между собой формулой (25,5) ч. I:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_2\varphi_1}{c}.$$

Поэтому

$$L_1 = -m_1c^2\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} - e\left(1-\frac{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}{c^2}\right)\varphi_1.$$

Отсюда следует, что для энергии взаимодействия двух частиц можно написать выражение

$$U_{\text{вз}} = e\left(1-\frac{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}{c^2}\right)\varphi, \tag{25,27}$$

где φ — потенциал поля, зависящий от мгновенного расстояния $R(\tau)$ между зарядами.

§ 26. Излучение движущегося заряда

Формула (28,4) ч. I для излучения движущегося заряда применима лишь при скоростях, малых по сравнению со скоростью света. Для получения аналогичного выражения, справедливого при скоростях, близких к скорости света, введем в рассмотрение совокупность сопутствующих систем координат, в которых в каждый данный момент времени частица покоится.

В каждой из них для излучения справедлива формула (28,4) ч. I. Излучение, описываемое этой формулой, имеет характер сферических волн, так что полный импульс излученных электромагнитных волн равен нулю. Энергия, излучаемая зарядом в единицу времени, согласно (22,16) является инвариантом:

$$-\frac{dE}{dt}=-\frac{dE'}{dt'}=\ \dots\ =\text{invar}. \qquad (26,1)$$

Для потери энергии на излучение за единицу времени можно написать, согласно (28,4) ч. I,

$$\frac{dE'}{dt'}=-\frac{2e^2}{3c^3}(w')^2=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(w'_\alpha)^2, \qquad (26,2)$$

поскольку в сопутствующей системе координат $w'_\tau=0$. Импульс, теряемый на излучение в единицу времени, согласно (28,5) ч. I равен нулю:

$$\frac{dp'}{dt'}=0. \qquad (26,3)$$

Для нахождения излучения в произвольной системе (нештрихованной) отсчета следует лишь преобразовать квадрат ускорения $(w'_\alpha)^2$ по формуле (11,17) к ускорению в нештрихованной системе.

Тогда имеем

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dE'}{dt'}=-\frac{2e^2}{3c^3}\,\frac{\dot v^2-\left[\frac{v}{c},\,\dot v\right]^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}=-\frac{2e^2}{3c^3}\,\frac{\dot v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{1}{c^2}(v\dot v)^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}. \qquad (26,4)$$

При этом для изменения импульса в единицу времени с помощью (13,6), (26,2) и (26,4) получаем

$$\frac{dp}{dt}=\frac{v}{c^2}\frac{dE'}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\frac{2e^2}{3c^3}\,\frac{\dot v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{1}{c^2}(v\dot v)^2}{\left(1-\frac{v_2}{c^2}\right)^3}\,\frac{v}{c^2}. \qquad (26,5)$$

Очевидно, при $\frac{v}{c}\ll 1$ формулы (26,4) и (26,5) переходят в (26,2) и (26,3).

Формулы (26,4) и (26,5) позволяют находить в произвольной, например лабораторной, системе отсчета энергию и импульс поля излучения, создаваемого ускоренно движущимся зарядом.

Обычно ускоренное движение быстро движущихся частиц связано с воздействием на них электромагнитного поля. Для преобразования формул (26,4) и (26,5) к этому частному слу-

чаю воспользуемся выражением (12,14) для ускорения частицы в электромагнитном поле; подставляя значение лоренцевой силы, находим

$$\boldsymbol{w}=\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})\right\}. \quad (26,6)$$

Используя это выражение для ускорения, имеем

$$\dot{v}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}}^2)=\frac{e^2}{m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\left\{\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{v^2}{c^4}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2-\frac{2(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2}{c^2}\right\}+\frac{e^2}{m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3\frac{(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2}{c^2}=$$
$$=\frac{e^2}{m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\left\{\left(E+\frac{[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]}{c}\right)^2-\frac{(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2}{c^2}\right\}. \quad (26,7)$$

Излучение энергии в единицу времени зарядом, движущимся в электромагнитном поле, равно

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{2e^4}{3m^2c^3}\frac{\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)^2-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=$$
$$=-\frac{2e^4}{3m^4c^7}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2\left\{\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)^2-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2\right\}=$$
$$=-\frac{2e^4}{3m^4c^7}E^2\left\{\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)^2-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2\right\}. \quad (26,8)$$

Рассмотрим несколько случаев формулы (26,8) для ультрарелятивистского случая $v\approx c$.

Пусть имеется только электрическое поле (т. е. $\boldsymbol{H}=0$). Тогда

$$\frac{1}{E^2}\frac{dE}{dt}=-\frac{2e^4}{3m^4c^7}\left\{(\boldsymbol{E})^2-\frac{(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})^2}{c^2}\right\}. \quad (26,9)$$

При $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{E}$ потеря энергии

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{2e^4}{3m^4c^7}(\boldsymbol{E})^2E^2. \quad (26,10)$$

При $\boldsymbol{v}\parallel\boldsymbol{E}$ потеря энергии

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{2e^4E^2}{3m^4c^7}(\boldsymbol{E})^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=-\frac{2e^4}{3m^2c^3}(\boldsymbol{E})^2 \quad (26,11)$$

и от энергии не зависит.

При движении в магнитном поле, перпендикулярном к направлению скорости ($v \perp H$), и $E=0$ находим

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^4}{3m^2c^5}\frac{v^2H^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{2e^4}{3m^4c^5}p^2H^2 \approx -\frac{2e^4}{3m^4c^7}E^2H^2, \quad (26{,}12)$$

где p — импульс частицы.

Формулы (26.9)—(26,12) используются в ядерной физике для определения потерь энергии ультрарелятивистскими частицами при движении в электрических и магнитных полях. Примером движения ультрарелятивистских частиц в магнитном поле может служить движение заряженных частиц в космических лучах в магнитном поле Земли и в магнитном поле бетатрона. Расчеты показали, что потери энергии на излучение в магнитном поле определяют верхний предел энергии частиц, могущих достигать поверхности Земли, а также верхний предел энергий, до которых электроны могут быть ускорены в бетатроне.

Важным применением полученных формул является расчет тормозного излучения ультрарелятивистских частиц в электрическом поле ядра. Ультрарелятивистский электрон, пролетающий мимо ядра, испытывает весьма малое отклонение. Его скорость можно считать постоянной, а ускорение — перпендикулярным к направлению скорости и равным $w_\perp = \frac{eE_\perp}{m}$, где

$$E_\perp = \frac{Ze\rho}{r^3}$$

— компонента поля ядра, перпендикулярная к скорости (направление последней выберем за ось x). Для поперечного ускорения можно пользоваться нерелятивистским выражением, поскольку соответствующая компонента скорости весьма мала. Как и в § 43 ч. I, ρ — прицельный параметр, а r — расстояние между ядром и электроном. При движении с постоянной скоростью можно считать, что

$$r = (\rho^2 + v^2t^2)^{1/2}.$$

Формула (26,10) дает для потери энергии в единицу времени

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3m^2c^3}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}(E_\perp)^2 = -\frac{2Z^2e^4}{3m^2c^3}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\rho^2}{(\rho^2+v^2t^2)^3}.$$

Интегрируя по времени пролета, получаем полную потерю энергии ультрарелятивистской частицы на тормозное излучение

$$\Delta E = -\frac{2Z^2e^4}{3m^2c^3}\frac{\rho^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(\rho^2+v^2t^2)^3}.$$

Имеем, очевидно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(1+\frac{v^2t^2}{\rho^2}\right)^3} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(1+\frac{v^2}{\rho^2}t^2\right)^3} = 2\frac{\rho}{v}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 z\,dz = \frac{3}{8}\frac{\pi\rho}{v};$$

поэтому

$$\Delta E = -\frac{\pi}{4}\frac{Z^2e^4}{m^2c^3v}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{1}{\rho^3}. \qquad (26,13)$$

Величина потерь энергии быстро растет с увеличением атомного номера Z вещества, в котором движется частица. Формула (26,13) определяет потери энергии одной частицы, пролетающей на расстоянии ρ от ядра. Она показывает, что потери быстро растут с уменьшением ρ.

На практике частица может пройти на любом расстоянии от ядра. Умножая (26,13) на $2\pi\rho\,d\rho n$, где n — плотность пучка, и интегрируя по всем значениям ρ, мы находим эффективное излучение пучка частиц

$$E_{\text{эфф}} = -\frac{\pi^2}{2}\frac{Z^2e^4}{m^2c^3v}\frac{n}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\int_{\rho_{\text{мин}}}^{\infty}\frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{\pi^2}{2}\frac{Z^2e^4}{m^2c^3v}\frac{n}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{1}{\rho_{\text{мин}}}. \qquad (26,14)$$

В формулу (26,14) введено минимальное приближение электрона к ядру $\rho_{\text{мин}}$, поскольку интеграл расходится на нижнем пределе. Введение этой неизвестной означает, что классическая теория излучения оказывается неприменимой для расчета тормозного излучения.

В квантовой механике будет показано, что классическое рассмотрение движения электрона неприменимо на малых расстояниях. Квантовомеханический расчет приводит к значению

$$\rho_{\text{мин}} = \frac{h}{mc}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

так что

$$E_{\text{эфф}} = -\frac{\pi^2}{2}\frac{Z^2e^4}{mc^2h}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (26,15)$$

Формула (26,15) позволяет найти потери на тормозное излучение при прохождении весьма быстрых частиц в веществе.

Сравнение ее с формулой для потерь энергии на ионизацию показывает, что тормозное излучение является основным фактором, определяющим торможение быстрых электронов в веществе. Потери на тормозное излучение являются основными для электронов при энергиях порядка 200 mc^2 (100 *Мэв*) в воздухе и 20 mc^2 (10 *Мэв*) в свинце. У тяжелых частиц, например протонов, почти все потери связаны с ионизацией вплоть до очень больших энергий.

В заключение заметим, что нельзя непосредственно переходить от формулы (26,14) к нерелятивистской формуле (43,17) ч. I, полагая $v \ll c$. Формула (26,14) найдена для $v \approx c$, а не для общего случая произвольной скорости.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Задачи статистической физики. Необходимые сведения из классической и квантовой механики

В ч. III мы ознакомимся с основами атомной теории макроскопических тел. Под макроскопическими телами мы будем понимать системы, построенные из весьма большого числа частиц. Обычно принято разделять атомную теорию макроскопических тел на два раздела — статистическую физику и физическую кинетику.

В статистической физике ограничиваются рассмотрением свойств макроскопических систем, состояния которых не изменяются во времени. Состояния макроскопической системы, в которых она может находиться неопределенно долгое время, называют равновесными. Поэтому можно сказать, что задачей статистической физики (ее называют иногда статистической механикой или физической статистикой) является исследование свойств и поведения макроскопических систем, находящихся в состоянии равновесия, на основании известных свойств образующих их частиц.

Частицами, из которых построены макроскопические тела, могут быть элементарные частицы — электроны, протоны, нейтроны и т. п. или их образования — ядра, атомы и молекулы. Для краткости все частицы, т. е. молекулы, атомы, электроны, протоны и т. д., мы будем называть микрочастицами. Большая часть тел в обычных физических условиях построена из атомов или молекул, как из структурных единиц. Лишь в высокотемпературной плазме (см. ч. IV) приходится учитывать возможность диссоциации (распада) атомов на электроны и ядра.

В статистической физике свойства и законы движения элементарных частиц, атомов и молекул считаются известными. Задача состоит в том, чтобы описать поведение систем, содержащих весьма большое число частиц с известными свойствами.

Исследования методами статистической физики свойств макроскопических систем, состоящих из очень большого числа частиц, позволили выявить важную принципиальную особенность таких систем. Она заключается в том, что поведение макроскопических систем определяется закономерностями особого типа, получившими название статистических закономерностей.

Оказалось при этом, что общие равновесные свойства систем сравнительно мало зависят от конкретных свойств частиц, из которых построены тела, и законов их взаимодействия. Поэтому в статистической физике удается установить общие законы поведения всех макроскопических систем, находящихся в состоянии равновесия. В частности, статистическая физика позволяет найти универсальные законы теплового поведения макроскопических тел (законы термодинамики). Однако применение ряда общих соотношений статистической физики к конкретным системам требует некоторых, хотя и весьма ограниченных, сведений о законах, определяющих поведение атомных систем.

Мы неоднократно подчеркивали, что классическая физика оказалась неприменимой в области атомных явлений. Поэтому применение законов статистической физики к реальным системам фактически невозможно, если попытаться ограничиться классическими представлениями о движении атомных частиц. Мы будем вынуждены поэтому, забегая вперед, привести ограниченный круг сведений из квантовой механики.

Наряду с установлением свойств макроскопических тел, находящихся в состоянии равновесия, большой интерес для физики представляет нахождение поведения тел, состояния которых изменяются во времени. Изучение свойств макроскопических систем, не находящихся в равновесии, является задачей физической кинетики. Ясно, что законы изменения состояния макроскопических систем — законы физической кинетики, являются существенно более сложными, чем законы, определяющие поведение равновесных систем. В физической кинетике практически не удалось выявить конкретные законы изменения состояния систем во времени, имеющие универсальный характер. Поэтому в настоящее время найдены законы поведения неравновесных систем, имеющих простейший характер.

Перейдем теперь к изложению необходимых сведений из классической и квантовой механики. Для наглядного описания поведения механических систем, движение которых описывается уравнениями Гамильтона,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, f) \tag{1,1}$$

(где p_i и q_i — обобщенный импульс и обобщенная координата, f — число степеней свободы, равное $3N$, N — число материальных точек в системе, и H — функция Гамильтона), в механике часто пользуются графическими приемами. Одним из таких приемов служит изображение состояния механической системы в фазовом пространстве.

Фазовым пространством называется изобразительное пространство, в котором в качестве осей координат выбраны обобщенные координаты и импульсы.

Рассмотрим сначала случай системы с одной степенью свободы. Пусть нам известна зависимость координаты q и импульса p от времени. Тогда можно построить графики $q(t)$ и $p(t)$, показывающие изменение этих величин во времени. Удобнее, однако, иметь график, представляющий последовательность состояний системы, а не отдельные графики, изображающие изменения ее положения и импульса. Для получения графика последовательности состояний нужно совместить два графика $q(t)$ и $p(t)$, исключив из них время. Выберем в качестве оси абсцисс обобщенную координату q, а в качестве оси ординат — обобщенный импульс p. Кривая на рис. 31 показывает изменение состояний системы. Так, например, в точке 1 система имела координату q_1 и импульс p_1, в точке 2 — аналогично q_2 и p_2 и т. д. По мере возрастания времени координата системы q и ее импульс изменяются по закону, изображенному графиком. Согласно определению пространство, изображенное на рис. 31, и есть фазовое пространство. Необходимо решительно подчеркнуть, что фазовое пространство не имеет ничего общего с реальным пространством и является чисто условным понятием.

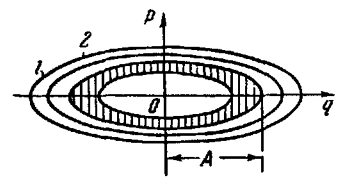


Рис. 31.

Каждой точке фазового пространства соответствует вполне определенное состояние системы. Точку, положение которой в фазовом пространстве характеризует состояние системы, называют изобразительной точкой. При изменении состояния системы, т. е. ее положения в реальном пространстве и импульса, положение изобразительной точки в фазовом пространстве изменяется, и она описывает некоторую фазовую траекторию. Форма этой траектории совершенно не похожа на форму реальной траектории. Однако она связана с ней, так же как и с законом изменения импульса, причем соответствие взаимно однозначно.

Для того чтобы представить себе все сказанное нагляднее, рассмотрим движение линейного гармонического осциллятора, движущегося под действием квазиупругой силы $F = -\varkappa q$ около

начала координат $q=0$. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{q} = -\varkappa q. \tag{1,2}$$

Оно легко интегрируется:

$$q = A\sin(\omega t + \alpha), \tag{1,3}$$

где A — амплитуда и α-фаза, определяемые начальными условиями. При этом импульс осциллятора

$$p = m\omega A\cos(\omega t + \alpha) \tag{1,4}$$

и частота

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{\varkappa}{m}}.$$

Формула (1,3) представляет уравнение реального движения. Чтобы найти траекторию изобразительной точки в фазовом пространстве, нужно найти связь между p и q. Возведя уравнения (1,3) и (1,4) в квадрат и складывая, находим

$$\left(\frac{q}{A}\right)^2 + \left(\frac{p}{m\omega A}\right)^2 = 1.$$

Это — уравнение эллипса. Таким образом, при колебаниях осциллятора около точки $q=0$ с амплитудой A изобразительная точка в фазовом пространстве описывает эллипс с полуосями $a=A$ и $b=m\omega A$. Площадь эллипса $S=\oint p\,dq=\pi ab=\pi m\omega A^2$. С другой стороны, вычисляя энергию осциллятора ε, имеем

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{\varkappa q^2}{2} = \frac{\varkappa}{2}A^2, \tag{1,5}$$

откуда находим важное соотношение

$$\varepsilon = \frac{S\varkappa}{2\pi m\omega} = \nu\oint p\,dq. \tag{1,5'}$$

Понятие о фазовом пространстве может быть введено и для системы с бо́льшим, чем одна, числом степеней свободы. В этом случае число измерений в фазовом пространстве равно, очевидно, удвоенному числу степеней свободы, так как за одну ось принимается координата, а за другую — импульс. В случае систем с большим числом степеней свободы фазовое пространство имеет очень большое число измерений и уже не может быть представлено графически. Тем не менее, и в этом случае использование представления о фазовом пространстве оказывается очень полезным. Нам в дальнейшем понадобится выражение для элемента объема в фазовом пространстве. Обобщая обычное определение элемента объема $dV=dx\,dy\,dz$ на случай мно-

гих измерений, можно написать для элемента фазового объема следующее выражение:

$$d\Gamma = dq_1 dq_2 \ldots dq_{3N} dp_1 dp_2 \ldots dp_{3N}, \tag{1,6}$$

где dq_i — дифференциал i-й координаты, а dp_i — дифференциал i-го импульса, соответствующего этой координате ($i=1, 2, \ldots, 3N$). В произведение в правой части выражения (1,6) входят в качестве множителей дифференциалы $3N$ обобщенных координат и стольких же импульсов.

Часто наряду с фазовым пространством пользуются понятиями пространства конфигураций и пространства импульсов.

Изобразительное пространство $3N$ измерений, в котором в качестве осей выбраны обобщенные координаты, называется пространством конфигураций. Совокупность всех положений частиц системы характеризуется положением изобразительной точки в пространстве конфигураций. Элементом объема пространства конфигураций служит

$$dV_{\text{конф}} = dq_1 \ldots dq_{3N}. \tag{1,7}$$

В пространстве импульсов координатными осями служат $3N$ компонент импульсов частиц $p_1, p_2 \ldots p_{3N}$. Изобразительная точка характеризует значение всех импульсов частиц. Элемент объема пространства импульсов равен

$$dV_{\text{имп}} = dp_1 \ldots dp_{3N}, \tag{1,8}$$

так что

$$d\Gamma = dV_{\text{конф}}\, dV_{\text{имп}}. \tag{1,9}$$

Понятия о фазовом пространстве, а также пространстве конфигураций и импульсов, очень полезны для наглядного представления законов статистической физики.

Движение механических систем определяется так называемыми динамическими закономерностями. Характерной особенностью динамической закономерности является то, что если известно начальное состояние системы и воздействие на нее со стороны окружающих тел, состояние системы в любой последующий момент движения может быть однозначно определено. Иными словами, при заданных силах, действующих на систему, начальное состояние системы однозначно определяет все дальнейшее ее движение.

Общие черты, характерные для динамической закономерности, проявляются не только в механике, но и в широком круге других физических явлений, в частности в электродинамике. Было бы, однако, принципиально неправильным утверждать, как это делалось рядом исследователей, начиная с Лапласа, что динамическая закономерность исчерпывает все виды причинности и взаимной обусловленности явлений в природе.

Как мы увидим ниже, поведение макроскопических тел не подчиняется динамическим закономерностям, но определяется закономерностями другого типа — статистическими закономерностями.

В дальнейшем мы будем предполагать, что атомы, молекулы и другие частицы, образующие макроскопические системы, движутся по законам квантовой механики. Изложению последних посвящена ч. V этой книги. Здесь мы без доказательства приведем самые необходимые сведения и соотношения.

Отличительной особенностью всех микросистем (атомов, молекул) является то, что в известных условиях они могут находиться в дискретных, или квантованных, состояниях. Опытное и теоретическое (см. ч. V) изучение состояний атомов и молекул показало, что их энергия может принимать дискретный ряд значений ε_1, ε_2, ε_3, ..., причем переход между этими состояниями, например ε_1 и ε_2, происходит без прохождения состояний с промежуточными энергиями между ε_1 и ε_2. Таким образом, атом может поглощать или отдавать энергию определенными порциями, квантами. Состояний с промежуточными энергиями у атома не существует.

Дискретный, квантовый, характер имеет не только энергия, но и ряд других величин, характеризующих состояние атомных систем, например, момент количества движения, который также принимает в атоме дискретный ряд значений и может изменяться лишь скачкообразно. Энергию и подобные ей величины называют квантованными, а совокупность их возможных значений — спектром. Квантованные значения энергии часто называют также уровнями энергии.

Существование квантованных состояний коренным образом противоречит законам классической механики, в которой состояния системы всегда изменяются непрерывно.

В начале развития атомной теории были получены некоторые формальные правила, с помощью которых из всех возможных с точки зрения классической механики состояний отбирались те, которые фактически могут реализоваться в атоме. Эти правила были названы квантовыми условиями Бора.

Дальнейшее развитие атомной физики показало, что представления классической физики требуют еще более глубокого изменения.

В настоящее время законы движения микрочастиц выяснены в квантовой механике с достаточной полнотой. Откладывая подробное знакомство с ними до ч. V, приведем пока некоторые из них.

1. Квантованное движение частицы в потенциальном ящике. В § 8 ч. V будет рассмотрена простейшая квантовомеханическая система — микрочастица с массой

m, заключенная в одномерном потенциальном ящике с непроницаемыми стенками. Область движения такой частицы ограничена размерами потенциального ящика (областью $0 \leqslant x \leqslant a$, где потенциальная энергия равна нулю). На границах области при $x=0$, $x=a$ потенциальная энергия отталкивания бесконечно велика и частица не может удалиться из ящика.

Из общих положений квантовой механики следует, что энергия и импульс такой частицы пробегают дискретные ряды значений. Допустимые значения энергии и импульса даются формулами:

$$p_n = \frac{nh}{2a}, \tag{1,10}$$

$$\varepsilon_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2 n^2}{8ma^2}. \tag{1,11}$$

Здесь h — величина, именуемая мировой квантовой постоянной, или постоянной Планка ($h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*); n — величина, пробегающая ряд целочисленных значений ($n = 1, 2, 3, \ldots$), именуемая квантовым числом.

Формула (1,11) показывает, что уровни энергии частицы образуют дискретный ряд или спектр; расстояние между соседними уровнями энергии равно

$$\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \frac{h^2}{8ma^2}(2n+1). \tag{1,12}$$

Мы видим, что эти расстояния тем меньше, чем больше масса частицы и размеры области движения a.

В случае движения частицы в области достаточно больших размеров расстояние между уровнями энергии настолько мало, что они образуют практически непрерывный спектр. Точно так же непрерывный спектр энергии и у любой частицы с большой, макроскопической массой.

Найдем еще относительное расстояние между уровнями энергии, которое равно, очевидно,

$$\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{2n+1}{n^2}. \tag{1,13}$$

При $n \gg 1$ относительное расстояние между уровнями или величина «ступенек» энергетического спектра равна

$$\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \approx \frac{2}{n}. \tag{1,14}$$

При больших квантовых числах относительное расстояние между уровнями быстро убывает с ростом n, так что дискретный характер спектра сглаживается.

Мы видим, таким образом, что дискретность уровней энергии квантовой частицы проявляется: 1) при малой массе, 2) при движении частицы в малой области и 3) при малых квантовых числах. Наоборот, при больших массах, при движении в большой области и больших квантовых числах квантование проявляется сравнительно слабо.

Чтобы представить себе порядки величин, рассмотрим несколько чисел. Пусть, например, протон с массой $m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-24}$ *г* движется в ящике, сторона которого имеет размеры, близкие к атомным ($a = 10^{-8}$ *см*). Выражая энергию в электрон-вольтах, имеем

$$\varepsilon_n = 0{,}02 n^2 \text{ эв}$$

и

$$\Delta\varepsilon_n = 0{,}02(2n+1) \text{ эв}.$$

При не очень больших n расстояния между уровнями энергии оказываются одного порядка величины с самими энергиями (например, при $n=3$ $\varepsilon_3 \approx 0{,}2$ *эв*, $\Delta\varepsilon_3 \approx 0{,}1$ *эв*).

Однако иначе дело обстоит в том случае, когда протон движется в области макроскопических размеров (например, $a = 1$ *см*). Тогда

$$\varepsilon_n = 2 \cdot 10^{-18} n^2 \text{ эв} \tag{1,15}$$

и расстояние между соседними уровнями

$$\Delta\varepsilon_n = 2 \cdot 10^{-18}(2n+1) \text{ эв}. \tag{1,16}$$

Пусть протон имеет энергию $2 \cdot 10^{-2}$ *эв* (как будет видно в дальнейшем, такую энергию имеют атомы, находящиеся в тепловом движении при нормальной температуре). Тогда из (1,15) находим: $n \approx 10^8$. При таких значениях n относительное расстояние между уровнями оказывается ничтожно малым. Таким образом, уже при движении протона в области достаточно больших размеров дискретный, квантовый, характер его состояний проявляется весьма слабо. То же самое в еще большей степени относится к макроскопическому шарику с массой, равной, скажем, 1 *г*. Движение такого шарика с огромной степенью точности описывается законами классической механики.

Закономерности, проявляющиеся в рассмотренном специальном случае частицы, движущейся в потенциальном ящике, имеют общий характер.

В ч. V будет показано, что классическая механика представляет предельный случай квантовой механики, в которую последняя переходит, когда эффектами, пропорциональными постоянной Планка, можно пренебречь. Это возможно при изучении явлений сравнительно большого масштаба, когда массы частиц, размеры области движения и т. д. достаточно велики.

Оказывается, что переход от квантовой механики к классической можно сделать двояким образом: можно просто, полагая $h=0$, полностью пренебречь всеми квантовыми эффектами — существованием у микрочастиц волновых свойств, квантованием энергии и других величин и т. д.; можно однако, считать h малой, но все же отличной от нуля величиной. Оказывается, что в последнем приближении волновые свойства частиц проявляются очень слабо. Частицы можно считать движущимися по определенным траекториям, таким же, как в классической механике. Однако квантование состояний все еще проявляется в том, что оказываются возможными не все, а только некоторые из классических траекторий. Такое приближение называется квазиклассическим (в отличие от классического приближения, в котором квантовые свойства частиц совсем не учитываются). Чтобы представить себе, в чем состоит характер ограничений, накладываемых на классические траектории, вновь обратимся к примеру частицы в одномерном ящике. Будем считать, что можно пользоваться представлениями классической механики и рассматривать частицу как материальную точку, движущуюся между отражающими стенками. Фазовая диаграмма на рис. 32 изображает последовательность ее состояний. Учтем теперь квантование состояний и выделим из всех возможных состояний те, которые удовлетворяют условию квантования (1,10). Возможными оказываются не все состояния $p=\text{const}$, а отстоящие друг от друга на расстоянии, определяемом соотношением (1,10). На рис. 32 изображено n-е (сплошная линия) и $(n-1)$-е (пунктирная линия) состояния. Число возможных квантовых состояний с импульсом, лежащим между $p_n=\frac{hn}{2a}$ и $p=\frac{h}{2a}$, равно n.

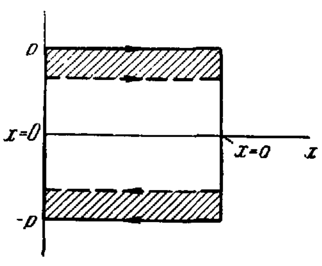


Рис. 32.

Вычислим теперь площадь S_n на фазовой плоскости, отвечающую этим n состояниям. Очевидно,

$$S_n=\oint p\,dx=2p_na=hn.$$

Интеграл $\oint p\,dx$ означает интеграл от p, взятый по полному периоду движения, т. е. по площади, ограниченной жирными прямыми на рис. 32. Этот интеграл равен

$$\oint p\,dx=\int_0^a p\,dx-\int_a^0 p\,dx=2\int_0^a p\,dx.$$

Если провести на рисунке линии, отвечающие остальным возможным состояниям, то вся плоскость разобьется на клетки. Нетрудно видеть, что площадь всех клеток одинакова и равна h. Действительно, расстояние между возможными состояниями по оси p равно

$$\frac{hn}{2a}-\frac{h(n-1)}{2a}=\frac{h}{2a}.$$

Площадь клетки (заштрихованная на рисунке) равна $2\cdot\frac{h}{2a}\times$ $\times a=h$.

Таким образом, в квазиклассическом приближении каждому возможному состоянию соответствует клетка в фазовом пространстве, имеющая площадь h. Стационарными, возможными состояниями системы являются те, для которых выполнено условие

$$\oint p\,dx=nh. \tag{1,17}$$

Последнее условие совпадает с условием Бора старой квантовой теории.

Рассмотренный пример является типичным, и найденное условие (1,17) имеет общий характер. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим другой пример — линейный осциллятор. Примером осциллятора, совершающего малые колебания около положения равновесия, как мы увидим ниже, может служить двухатомная молекула. В квантовой механике (см. § 10 ч. V) показывается, что состояние осциллятора характеризуется квантовым числом k, могущим принимать ряд полуцелых значений:

$$k=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \ldots,\ \text{т. е. } k=n+\frac{1}{2}$$

(n — целое число). Энергия осциллятора принимает ряд значений (см. (10,18) ч. V)

$$\varepsilon_n=h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{1,18}$$

При переходе осциллятора из данного квантового состояния в соседнее он излучает свет с частотой

$$\nu_{mn}=\frac{\varepsilon_m-\varepsilon_n}{h}=\nu,$$

равной собственной частоте колебаний классического осциллятора [1]).

---

[1]) В квантовой механике показывается, что у осциллятора возможны переходы только между соседними состояниями, так что $m=n+1$. См. § 106 ч. V.

Сравнивая (1,18) с формулой (1,5′), мы видим, что квантовое условие (1,18) выделяет в качестве возможных те состояния осциллятора, для которых имеет место соотношение

$$\oint p\,dq = h\left(n + \frac{1}{2}\right). \qquad (1{,}19)$$

Все возможные орбиты изобразительной точки осциллятора, отвечающие квантовым состояниям n_1, n_2, ..., изображаются подобными эллипсами. При этом площадь эллипса, отвечающего состоянию n, отличается от площади эллипса, отвечающего состоянию $n - 1$, на величину:

$$\oint\limits_{n} p\,dx - \oint\limits_{n-1} p\,dx = h,$$

где индекс означает номер состояния. На рис. 32 эта площадь заштрихована.

Мы приходим к выводу, что каждому квантовому состоянию осциллятора отвечает клетка в фазовом пространстве, площадь которой равна h.

Таким образом, в квазиклассическом приближении (при больших квантовых числах или размерах области движения и больших массах частиц) условие квантования состояний заключается в том, что каждому квантовому состоянию произвольной системы отвечает клетка, или ячейка в фазовом пространстве, имеющая площадь h. Можно показать, что форма ячейки является произвольной.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением систем, имеющих одну степень свободы. Однако оказывается, что полученные результаты имеют общий характер и могут быть перенесены на систему с произвольным числом f степеней свободы. Состояние подобной системы характеризуется заданием f квантовых чисел (примеры см. ниже). Фазовое пространство системы с f степенями свободы имеет $2f$ измерений.

Вновь в качестве иллюстративного примера рассмотрим движение свободной частицы в ящике с идеально отражающими стенками, но имеющем уже три измерения. Для простоты будем считать, что ящик имеет форму куба с ребром a. Поскольку движение в любом из трех направлений является независимым и все они принципиально равноправны, для каждой из компонент импульса можно написать

$$|p_x| = \frac{hn_1}{2a}, \quad |p_y| = \frac{hn_2}{2a}, \quad |p_z| = \frac{hn_3}{2a}. \qquad (1{,}20)$$

Движение частицы в трех измерениях характеризуется тремя квантовыми числами n_1, n_2, n_3, могущими принимать ряд целых

значений. Энергия частицы равна

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = \frac{h^2}{8ma^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \qquad (1,21)$$

Она характеризуется числом $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$, но при данном n не зависит от того, каков вклад в это n каждого из квантовых чисел n_1, n_2, n_3 в отдельности. Благодаря этому одному и тому же значению энергии может отвечать несколько различных квантовых состояний. Пусть, например, $n_1=1$, $n_2=2$, $n_3=2$ и $n_1=2$, $n_2=1$, $n_3=2$. В обоих случаях $n=3$, так что оба состояния имеют одну и ту же энергию. Если нескольким различным состояниям отвечает одна и та же энергия, то такие состояния называются вырожденными.

Число состояний с одной и той же энергией носит название кратности вырождения или статистического веса.

Фазовое пространство частицы в потенциальном ящике имеет шесть измерений, так что изобразить его графически невозможно. Однако можно сказать, что оно распадается на три подпространства двух измерений, отвечающие движению в соответствующем направлении. Простой подсчет приводит нас тогда к выводу, что каждому состоянию (тройке чисел n_1, n_2 и n_3) частицы отвечает объем h^3.

В самом общем случае произвольной системы, имеющей f степеней свободы, можно показать, что при переходе к квазиклассическому приближению движение системы можно рассматривать так же, как в классической механике, но налагая на возможные состояния ограничение: каждому квантовому состоянию системы с f степенями свободы в квазиклассическом приближении соответствует ячейка в ее фазовом пространстве, имеющая объем h^f. Доказательство этого утверждения будет дано в § 41 ч. V.

При изложении статистической физики нам придется в большинстве случаев рассматривать движение сравнительно тяжелых частиц (например, молекул), движущихся в макроскопических объемах, а также поведение макроскопических тел, содержащих огромное число молекул.

Для таких систем квантовые явления играют сравнительно малую роль. Тем не менее, как выяснится в дальнейшем, ими нельзя полностью пренебрегать. Поэтому мы будем учитывать их в квазиклассическом приближении, основываясь на приведенном правиле квантования. В остальном же там, где это не оговорено особо, движение систем будет рассматриваться классически. Разумеется, в некоторых случаях, когда масса системы достаточно велика, от квазиклассического способа рассмотрения можно перейти к чисто классическому и полностью пренебрегать

квантовыми эффектами. Так мы будем поступать в гл. III. Однако при общих рассуждениях и выводах будем считать состояния системы дискретными.

2. Число квантовых состояний. Во всем дальнейшем изложении важную роль будет играть понятие о числе квантовых состояний, отвечающих энергиям системы, лежащим в заданном интервале между ε и $\varepsilon+\Delta\varepsilon$. Будем обозначать его через $\Omega(\varepsilon)\Delta\varepsilon$.

Вычислим это число сначала для частицы, свободно движущейся в ящике. Согласно сказанному выше, каждому состоянию отвечает объем h^3 фазового пространства. Поэтому искомое число состояний мы найдем, если вычислим объем фазового пространства, отвечающий энергиям частицы, лежащим между ε и $\varepsilon+\Delta\varepsilon$, и разделим его на h^3.

При вычислении фазового объема воспользуемся тем, что в квазиклассическом приближении квантовые скачки малы, и будем считать импульс изменяющимся почти непрерывно. Тогда элемент фазового пространства можно написать в виде (1,6). Объем фазового пространства, отвечающий энергиям частицы, меньшим данной величины, получается интегрированием выражения (1,6) по всем координатам и всем импульсам, удовлетворяющим соотношению $0 \leqslant p \leqslant \sqrt{2m\varepsilon}$. Переходя к сферическим координатам, можем написать

$$\Gamma = \int dx\,dy\,dz \int dp_x\,dp_y\,dp_z = \\ = 4\pi V \int\limits_0^{\sqrt{2m\varepsilon}} p^2\,dp = \frac{4\pi p^3 V}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{2m\varepsilon}} = \frac{4\pi (2m)^{3/2}\varepsilon^{3/2} V}{3}. \qquad (1,22)$$

Объем фазового пространства, отвечающий энергиям между ε и $\varepsilon+\Delta\varepsilon$, равен

$$\Delta\Gamma = \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon = 4\pi m V \sqrt{2m\varepsilon}\,\Delta\varepsilon. \qquad (1,23)$$

Число состояний частицы, энергии которой лежат между ε и $\varepsilon+\Delta\varepsilon$, равно

$$d\Omega = \Omega(\varepsilon)\,\Delta\varepsilon = \frac{1}{h^3}\frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon = \frac{4\pi m V\sqrt{2m\varepsilon}}{h^3}\Delta\varepsilon. \qquad (1,24)$$

Поскольку все величины в квазиклассическом приближении изменяются почти непрерывно, мы часто вместо $\Delta\varepsilon$ будем в формуле (1,24) писать $\delta\varepsilon$, считая $\delta\varepsilon$ бесконечно малой.

Нужно иметь в виду, что при больших значениях (больших квантовых числах) число состояний, отвечающих даже очень малому интервалу $\Delta\varepsilon$, оказывается огромным. Так, например,

в случае атомов водорода при $\Delta\varepsilon = 0{,}005$ *эв*, $\varepsilon = 0{,}025$ *эв* и $V = 1$ *см*^{3} величина $\Omega\Delta\varepsilon$ оказывается равной около $4 \cdot 10^{28}$. Эта величина, таким образом, практически не очень отличается от своего классического предела — бесконечности (при $h \to 0$). Тем не менее, конечность числа квантовых состояний, как мы увидим в дальнейшем, играет большую роль.

В случае произвольной системы, имеющей f степеней свободы, можно написать

$$\Delta\Gamma = \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon, \tag{1,25}$$

где $\Delta\Gamma$ определяется формулой (1,6). Соответственно для числа состояний имеем

$$\Delta\Omega = \Omega(\varepsilon)\Delta\varepsilon = \frac{1}{h^f}\frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon, \tag{1,26}$$

или

$$\Omega = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon+\Delta\varepsilon} d\Omega = \frac{\Delta\Gamma}{h^f}. \tag{1,26'}$$

Величина $\Omega(\varepsilon)$ может быть названа плотностью числа состояний, отнесенных к единичному интервалу изменения энергии. В дальнейшем для краткости будем $\Omega(\varepsilon)$ условно именовать просто числом состояний с данной энергией. Это не должно привести к недоразумениям.

Для дальнейшего нам понадобится еще одно довольно очевидное свойство Ω. Именно, если имеется система, состоящая из двух независимых частей, и число состояний каждой из них равно Ω_1 и Ω_2, то число состояний сложной системы равно $\Omega = \Omega_1\Omega_2$. Действительно, фазовый объем сложной системы по определению равен $d\Gamma = d\Gamma_1 d\Gamma_2$, откуда сразу следует указанное свойство.

В общем случае

$$\Omega = \prod_i \Omega_i, \tag{1,27}$$

где произведение $\prod\limits_i$ берется по всем частям системы.

Воспользуемся этим свойством Ω для того, чтобы оценить число состояний системы, состоящей, например, из 100 независимых частиц, движущихся в объеме $V = 1$ *см*^{3} с энергией в интервале $\Delta\varepsilon = 0{,}005$ *эв* при $\varepsilon = 0{,}025$ *эв* и массе, равной массе протона. Имеем

$$\Omega = \Omega_1\Omega_2 \ldots = (4 \cdot 10^{28})^{100} \sim 10^{2809}.$$

3. Спин. До сих пор, рассматривая отдельную микроскопическую частицу (например, электрон или протон), мы считали,

что ее состояние полностью характеризуется заданием трех квантовых чисел в соответствии с тремя степенями свободы. Оказывается, однако, что для полной характеристики состояния элементарной частицы необходимо указать еще одно квантовое число.

Оказывается, что большая часть частиц помимо момента количества движения в пространстве орбитального движения обладает дополнительным, собственным моментом количества движения, не связанным с пространственным перемещением. Он получил название спинового момента, или коротко, спина. Спином элементарной частицы называют наименьший механический момент (момент количества движения), которым она может обладать. Бо́льшая часть элементарных частиц (электроны, нейтроны, протоны) обладают спином s, равным $\frac{\hbar}{2}$. Это означает, что проекция спина s_z на произвольную, выделенную в пространстве ось z может иметь два значения: $\frac{\hbar}{2}$ и $-\frac{\hbar}{2}$. Говорят, что спиновая координата принимает два значения: $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. Спин сложных частиц может быть как целым, так и полуцелым, в зависимости от входящих в них элементарных частиц. Спин — чисто квантовое свойство частиц, не имеющее аналогии в классической физике (см. ч. V). Наличие спина увеличивает число степеней свободы частицы с трех до четырех.

4. Принцип тождественности элементарных частиц. Оказывается, что учет дискретного характера состояний системы и, в частности, дискретных уровней энергии позволяет охватить широкий круг вопросов, оставшихся нерешенными в классической физике. Однако помимо этого необходимо будет учитывать и некоторые другие особенности квантовых систем, существенно влияющие на поведение реальных макроскопических систем. В дальнейшем нам часто придется иметь дело с системами, состоящими из некоторого числа одинаковых частиц (например, электронов или атомов данного типа). Законы поведения таких систем в квантовой механике резко отличаются от классических законов. В классической физике, как бы ни были сходны те или иные физические тела по своим свойствам, принципиально всегда можно проследить за их движением и отличить их друг от друга.

В квантовой механике положение коренным образом изменяется. Причина заключается в том, что в квантовой механике имеет место принцип тождественности одинаковых частиц. Согласно этому принципу все одинаковые частицы данного вида

(например, электроны), входящие в данную квантовомеханическую систему, являются совершенно тождественными. В системе, состоящей из частиц одного вида, состояния не изменяются при взаимной замене частиц.

Пусть, например система состоит из двух электронов, причем первый электрон находится в состоянии, характеризующемся совокупностью квантовых чисел n_1, а второй электрон — в состоянии с квантовыми числами n_2. Если поменять состояниями эти электроны, то получим состояние системы с той же энергией. На первый взгляд может возникнуть впечатление, что состояния системы являются двукратно вырожденными. Однако совокупность целого ряда данных, как основанных на общих положениях квантовой механики, так и следующих из статистических соображений, позволяет утверждать, что это не так (см. § 37 и § 64 ч. V).

Тождественность частиц одного сорта является настолько полной, что замена, например, одного электрона в данном состоянии другим не является физическим событием. Поэтому не имеет смысла говорить, что электрон № 1 находится в состоянии 1, а электрон № 2 находится в состоянии 2. Следует указать, что система из двух электронов находится в определенном состоянии. Из этого утверждения, непосредственно вытекающего из ряда опытных фактов, получаются весьма важные для статистической физики следствия, с которыми мы познакомимся в гл. V и, особенно, в гл. X.

Свойства систем частиц с целым и полуцелым спинами столь существенно отличаются, что, строго рассуждая, нужно говорить о двух различных видах квантовой механики: для частиц с целым и полуцелым спинами. Это видно из следующего: для частиц с полуцелым спином имеет место так называемый принцип запрета Паули, который гласит: «в каждом квантовом состоянии может находиться только одна частица с полуцелым спином».

Часто принцип запрета формулируют несколько иначе: «в каждом квантовом состоянии может находиться не более двух электронов с различной ориентацией спина». Эквивалентность обеих формулировок очевидна.

Для частиц с целым спином не существует никакого ограничения на число одинаковых частиц, находящихся в одном и том же квантовом состоянии. Ниже будет показано, что это обстоятельство радикальным образом влияет на статистическое поведение систем, состоящих из частиц с целым или полуцелым спином.

5. Энергетические зоны системы, состоящей из большого числа частиц. Рассмотрим некоторую систему, состоящую из N одинаковых атомов или молекул, при-

чем будем считать, что N — большое число. Из общих соображений ясно, что поскольку система является макроскопической, внутренняя энергия системы должна изменяться непрерывно и квантовые эффекты не должны иметь существенного значения. Мы посмотрим сейчас, каким образом при объединении атомов с дискретными уровнями энергии возникает непрерывное распределение энергетических уровней.

Для простоты рассмотрим два атома водорода, расположенных на большом расстоянии друг от друга (по сравнению с их размерами) и находящихся в одном и том же невырожденном состоянии с энергией ε_0. На бесконечно большом расстоянии атомы не взаимодействуют друг с другом и энергия всей системы ε равна сумме энергий обоих атомов, т. е.

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0.$$

Состояние системы будет двукратно вырожденным; состояние системы, когда один электрон находится у первого ядра, а другой электрон — у второго, будет обладать той же энергией, что и состояние с переставленными электронами.

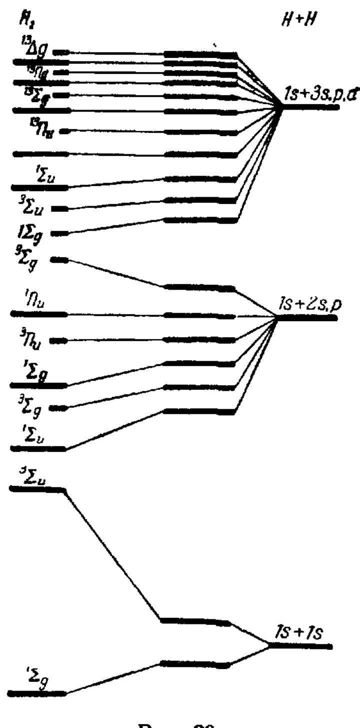


Рис. 33.

Сблизим теперь атомы на такое расстояние, чтобы они начали взаимодействовать между собой. Расчет показывает, что при возникновении взаимодействия уровень энергии системы расщепляется и распадается на два уровня, лежащих близко друг от друга. Говорят, что взаимодействие сняло вырождение. Этот вопрос будет подробно освещен в § 54 ч. V.

Если продолжать сближать атомы, образующие молекулу, расщепление уровней будет увеличиваться (рис. 33, нижний уровень). Очень часто уровни энергии каждого из атомов сами по себе являются вырожденными. Тогда из одного уровня энергии возникает не два, а большее число уровней системы взаимодействующих частиц (рис. 33, два верхних уровня). Мы видим, что число уровней энергии в системе взаимодействующих частиц оказывается бо́льшим, чем в системе разделенных частиц. Вырождение уровней снимается взаимодействием. Этот

результат не является специфическим для системы из двух атомов, но имеет общий характер. Если система представляет собой систему атомов, характеризующихся квантовыми числами, то при образовании системы сильно взаимодействующих частиц, например, кристалла, все уровни энергии отдельных атомов расщепляются, распадаясь на отдельные уровни энергии системы как целого. Последние, вообще говоря, являются невырожденными.

Если число атомов в системе (или, точнее, число f) велико, то полное количество энергетических уровней в системе оказывается огромным. С увеличением энергии они быстро сближаются (как это видно из рис. 33; сравнить первый, второй и третий уровни), и при больших f и больших энергиях возбуждения практически полностью сливаются, образуя сплошные полосы дозволенных уровней энергии.

Из сказанного ясно, что утверждение о непрерывном изменении энергии макроскопического тела является не вполне точным. Самые нижние уровни энергии являются дискретными. По мере роста энергии происходит быстрое сближение уровней и энергия системы становится непрерывной. Мы увидим в дальнейшем, что дискретность самых нижних уровней энергии в макроскопических системах существенно сказывается на их свойствах.

§ 2. Необходимые сведения из теории вероятностей

Нашей дальнейшей задачей будет служить исследование статистических закономерностей в системах, состоящих из весьма большого числа частиц.

В основу этих исследований будет положен математический аппарат теории вероятностей.

Мы не будем излагать теории вероятностей в том виде, как она излагается в математических курсах. Мы с самого начала введем специальное определение вероятности, которое вполне эквивалентно принятому в математической теории вероятностей, но является более наглядным и удобным при рассмотрении вероятностных процессов в статистической физике. Определение это тесно связано с представлением о зависимости между вероятностью и частотой появления события, принятым в повседневной практике.

Рассмотрим некоторую совершенно произвольную физическую систему, могущую находиться в различных физических состояниях. Предположим сначала, что эти состояния образуют дискретный ряд, и условно пронумеруем их цифрами 1, 2, 3, ... Обозначим любую величину, зависящую от состояния системы, через L. Величина L может представлять, например, энергию,

объем, сжимаемость или любую другую величину, являющуюся функцией состояния и изменяющуюся с изменением состояния системы. Мы будем считать L однозначной функцией состояния системы, так что каждому состоянию 1, 2, 3, ... отвечает вполне определенное значение величины L: L_1, L_2, L_3, ... Наоборот, если величина L имеет значение L_i, то это означает, что система обязательно находится в i-м состоянии.

Предположим, что в течение весьма длительного времени T в силу разнообразных процессов, происходящих в системе, при неизменных внешних условиях ее состояния изменяются так, что она проходит через последовательность различных состояний 1, 2, 3, ..., i, ... Для наглядности допустим, что в течение всего времени изменения состояний T равномерно каждые Δt секунд измеряется значение величины L.

В некоторых состояниях система будет находиться долго и попадать в них часто, в других она будет проводить лишь незначительное время. В результате измерений мы будем получать одни значения L чаще, другие — реже. Пусть в некотором состоянии i система проводит время t_i, составляющее часть полного времени наблюдения T. В результате $N_i = \frac{t_i}{\Delta t}$ измерений будет найдено, что величина L имеет значение L_i. Полное число измерений будет равно, очевидно, $N = \frac{T}{\Delta t}$. Мы назовем вероятностью i-го состояния w_i или вероятностью значения величины L_i предел отношения числа измерений, дающих значение L, равное L_i, к полному числу измерений, когда последнее неограниченно возрастает, т. е.

$$w_i = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N}. \tag{2,1}$$

Иначе говоря, вероятность i-го состояния w_i определяется как предел отношения времени t_i, в течение которого система находится в этом состоянии, к полному времени наблюдения T при неограниченном возрастании последнего:

$$w_i = \lim_{T \to \infty} \frac{t_i}{T}. \tag{2,2}$$

Необходимо ясно представить себе, что вероятность данного состояния i и вероятность того, что величина L имеет значение L_i, отвечающее состоянию i, являются совпадающими понятиями. Поэтому вместо (2,2) мы можем написать

$$w_{L_i} = \lim_{T \to \infty} \frac{t_i}{T}, \tag{2,3}$$

где w_{L_i} — вероятность того, что величина L имеет значение L_i.

В определении вероятности (2,1) или эквивалентном ему определении (2,2) сделан важный шаг вперед: вероятность определяется как предел отношения, а не как само отношение. Фактически это означает, что использование вероятностных представлений предполагает, что число измерений или время наблюдения T весьма велико. В определении (2,2) заключено предположение о том, что предел отношения $\frac{t_l}{T}$ существует. Существование этого предела будет обеспечено в том случае, когда в течение всего времени наблюдения система находится в неизменных внешних условиях. Если это не так и в ходе измерений внешние условия могут непрерывно изменяться, отношением $\frac{t_l}{T}$ может не стремиться ни к какому пределу. Так, например, если бы мы рассматривали неограниченно расширяющийся газ, то ни в одном состоянии система не находилась бы конечный промежуток времени. Ее состояния непрерывно изменялись бы в течение всего времени наблюдения. Поэтому предел отношения $\frac{t_l}{T}$ не существовал бы вовсе. На практике часто приходится встречаться с системами, состояния которых изменяются не дискретным, а непрерывным образом. Иначе говоря, часто величины, характеризующие состояние системы, пробегают непрерывный ряд значений. В этом случае определение вероятности (2,3) теряет непосредственный смысл. В состоянии, в котором величина L имеет значение, точно равное L_i, система будет проводить бесконечно малое время. Поэтому, как и в других случаях, когда приходится иметь дело с непрерывно изменяющимися величинами, необходимо говорить не о значении L_i, а о некотором интервале значений этой величины. Мы должны поэтому говорить о вероятности того, что величина L имеет значение, лежащее в интервале между L и $L+dL$. Эту вероятность будем обозначать через dw_L. По определению,

$$dw_L = \lim_{T \to \infty} \frac{\Delta t_L}{T},$$

где Δt_L — время, в течение которого система находится в состояниях, соответствующих значениям L, лежащим между L и $L+dL$. Очевидно, что время Δt_L, а следовательно, и вероятность dw_L, будут при прочих равных условиях пропорциональны величине интервала dL. Удобно поэтому представить dw_L в виде

$$dw_L = \rho(L)\, dL, \qquad (2,4)$$

где $\rho(L)$ — вероятность того, что значение L лежит в некотором «единичном» интервале. Функция $\rho(L)$ называется плотностью

вероятности. Она заменяет саму вероятность в тех случаях, когда величина L изменяется непрерывно.

Наряду с определением (2,2)—(2,4) в статистической физике используется и другое определение вероятностей.

Вместо того чтобы рассматривать изменения состояния системы во времени, можно мысленно представить себе совокупность систем, тождественных с данной, но в некоторый момент времени хаотически распределенных по всем возможным состояниям. Такую систему именуют статистическим ансамблем. Будем определять число систем в ансамбле, находящихся в различных возможных состояниях. Пусть из полного числа систем в ансамбле n в i-м состоянии находятся n_i систем. Тогда вероятность того, что при случайном измерении будет обнаружена система, находящаяся в i-м состоянии, равна

$$w_i = \lim_{n \to \infty} \frac{n_i}{n}. \tag{2,5}$$

Вероятность, определенная формулой (2,5), носит название вероятности по ансамблю.

Пусть имеется сложная механическая система, совершающая движение по некоторой траектории в фазовом пространстве. Сложность траектории исключает возможность проследить за фазовой траекторией, и фазовые точки хаотически распределяются в фазовом пространстве. Вероятность обнаружить систему в данной области фазового пространства, согласно (2,1) определяется временем пребывания ее в этой области. Вместо того чтобы следить за процессом перемещения изобразительной точки в фазовом пространстве во времени, можно ввести в рассмотрение ансамбль систем, отличающихся начальными условиями. Если начальные условия распределены хаотически, то вероятность найти систему в i-й области фазового пространства определяется числом изобразительных точек, отвечающих различным системам ансамбля. Естественно допустить, что число таких точек для ансамбля пропорционально времени пребывания в этой области отдельной системы. При этом отношения, входящие в определения (2,1) и (2,5), приводят к одинаковому значению вероятности. Это весьма правдоподобное допущение в статистической физике носит название эргодической гипотезы. В § 15 мы вернемся к ее обсуждению.

Мы будем пользоваться обоими определениями вероятности, считая их равноправными.

Перейдем теперь к формулировке некоторых положений теории вероятностей.

1. Закон сложения вероятностей. Рассмотрим физическую систему, могущую находиться в различных состояниях. Если система находится в состоянии i, то она не может,

очевидно, одновременно находиться в каком-либо состоянии k. Одновременные нахождения системы в состояниях i и k являются взаимно исключающими друг друга событиями. Предположим, что нам известны вероятности состояний i и k. Для многих целей весьма важным является нахождение вероятности того, что система находится в одном из этих состояний, — безразлично, в каком именно. Иначе говоря, мы хотим найти вероятность того, что система находится либо в состоянии i, либо в состоянии k. Для нахождения этой вероятности заметим, что время пребывания системы в одном из состояний, — безразлично, в каком именно, — равно сумме времен пребывания в i-м и k-м состояниях. Поэтому искомая вероятность w_{i+k} равна

$$w_{i+k} = \lim_{T\to\infty} \frac{t_i + t_k}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{t_i}{T} + \lim_{T\to\infty} \frac{t_k}{T} = w_i + w_k. \qquad (2,6)$$

Формула (2,6) выражает закон (теорему) сложения вероятностей.

Вероятность нахождения системы в одном из двух взаимоисключающих друг друга состояний равна сумме вероятностей нахождения системы в каждом из этих состояний.

Теорема сложения вероятностей может быть без всякого труда перенесена на случай трех или большего числа состояний. В общем случае вероятность того, что система находится в одном из взаимоисключающих состояний i, k, l, ..., равна

$$w_{i+k+l+\dots} = \sum w_j, \qquad (2,7)$$

где суммирование ведется по всем состояниям i, k, l, ... системы.

Из теоремы сложения вероятностей вытекает важное следствие, которым мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Предположим, что состояние системы характеризуется двумя не зависящими друг от друга величинами L и M. Например, L может представлять скорость движения системы в одном направлении, а M — в другом, или L и M могут быть энергией и объемом идеального газа и т. д. Пусть L может пробегать значения L_1, L_2, ..., L_i, ..., а M — значения M_1, M_2, ..., M_k, ... Предположим, что нам известна вероятность того, что система находится в состоянии, в котором L равно L_i, а M равно M_k. Пусть эта вероятность равна $w_{L_i M_k}$.

Найдем вероятность w_{L_i} того, что система имеет значение L_i при любом значении величины M. Согласно теореме сложения вероятностей можно написать

$$w_{L_i} = w_{L_i M_1} + w_{L_i M_2} + \dots + w_{L_i M_k} + \dots = \sum w_{L_i M_j}, \qquad (2,8)$$

где суммирование ведется по всем значениям величины M.

В том случае, когда величины L и M изменяются непрерывно, суммирование в формуле (3,3) нужно заменить интегрированием.

2. Статистическая независимость и закон умножения вероятностей. Второе важное положение теории вероятностей носит название теоремы или закона умножения вероятностей.

Рассмотрим две физические системы и предположим, что они являются совершенно независимыми друг от друга. Обозначим через w_{L_i} и w_{M_k} вероятности того, что первая система находится в состоянии, характеризующемся значением величины L_i, и, аналогично, вторая система находится в состоянии, характеризующемся значением величины M_k. Вероятности w_{L_i} и w_{M_k} являются независимыми, если вероятность того, что первая система находится в состоянии i, не зависит от того, находится или не находится вторая система в состоянии k.

Закон умножения вероятностей для статистически независимых систем гласит: «вероятность того, что одновременно первая система находится в i-м состоянии, в котором $L=L_i$, а вторая — в k-м состоянии, в котором $M=M_k$, равна произведению вероятностей w_{L_i} и w_{M_k}», т. е.

$$w_{L_i M_k}=w_{L_i}w_{M_k}. \tag{2,9}$$

Закон умножения представляет строгое определение статистической независимости двух систем.

Приведенное рассуждение может быть перенесено на две произвольные независимые физические системы. Пусть первая из них проводит время $T\cdot w_{L_i}$ в состоянии с $L=L_i$. Если это время достаточно велико, то можно считать его временем наблюдения за состояниями второй системы. Из всего времени наблюдения за второй системой $(T\cdot w_{L_i})$ она проводит часть, равную $(T\cdot w_{L_i})w_{M_k}$, в состоянии со значением $M=M_k$. Искомая вероятность одновременного нахождения первой системы в состоянии с $L=L_i$, а второй в состоянии с $M=M_k$ равна

$$\lim_{T\to\infty}\frac{Tw_{L_i}w_{M_k}}{T}=w_{L_i}w_{M_k},$$

что и поясняет закон умножения.

Важным следствием закона сложения вероятностей является весьма очевидное утверждение, что вероятность нахождения системы в произвольном допустимом состоянии равна единице. Это означает, что в каком-либо из состояний мы с достоверностью найдем нашу систему. Справедливость его видна из

того, что

$$\sum w_i = \sum \lim_{T\to\infty} \frac{t_i}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum t_i}{T} = 1, \tag{2,10}$$

поскольку, по определению, $T = \sum t_i$.

Если величины, характеризующие состояния системы, изменяются непрерывно, то вместо условия (2,10) можно написать

$$\int dw = \int \rho(L)\, dL = 1. \tag{2,11}$$

В дальнейшем мы всегда будем считать все вероятности нормированными так, чтобы сумма всех вероятностей была равна единице. В этом случае будем говорить о вероятности, нормированной на единицу. В тех случаях, когда первоначально распределение вероятности задано ненормированиым, мы всегда будем его нормировать на единицу.

§ 3. Средние значения и флуктуации

Теперь необходимо дать определение понятия статистического среднего значения некоторой величины, зависящей от состояния системы. Понятие статистического среднего будет играть основную роль во всем дальнейшем изложении. Статистическое среднее является естественным обобщением привычного нам понятия среднего арифметического.

Пусть у нас имеется ряд значений некоторой величины, например, скорости какого-либо тела. Под арифметическим средним мы понимаем отношение суммы всех этих значений к полному их числу, т. е. сумму вида $\frac{\sum L_i N_i}{N}$, где L_i — значение величины L, N_i — число измерений, приводящих к этому значению, N — полное число измерений.

Статистическим средним величины L, которое мы будем обозначать через $\bar{L}$, называется предел отношения

$$\bar{L} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum L_i N_i}{N}.$$

Поскольку $N_i = \frac{t_i}{\Delta t}$ и $N = \frac{T}{\Delta t}$, можно написать

$$\bar{L} = \lim_{T\to\infty} \frac{\sum L_i t_i}{T} = \sum L_i w_{L_i}, \tag{3,1}$$

где t_i — время, в течение которого система находится в i-м состоянии, когда величиина L имеет значение L_i, T — полное время

наблюдения и w_{L_i} — вероятность того, что величина L имеет значение L_i. Суммирование ведется по всем состояниям системы. Формула (3,1) является определением статистического среднего. В дальнейшем для краткости будем опускать слово «статистическое» и говорить просто «среднее значение».

В случае систем, состояния которых изменяются непрерывно, так что вместо вероятности w_i мы должны писать dw, формула (3,1) должна быть переписана в виде

$$\bar{L} = \int L\,dw = \int L\rho(L)\,dL, \tag{3,2}$$

где интегрирование ведется по всем возможным состояниям системы.

При вычислении средних значений будем пользоваться следующей простой теоремой: если имеются две величины L и M, являющиеся функциями состояния, то среднее значение их суммы $(\overline{L+M})$ равно сумме средних $\bar{L}+\bar{M}$. Для доказательства заметим, что, по определению

$$\overline{(L+M)} = \sum (L_i + M_i)\,w_i = \sum L_i w_i + \sum M_i w_i = \bar{L} + \bar{M}.$$

Предположим, что нам известно распределение вероятностей w_{L_i} того, что величина L принимает значение L_i. Тогда с помощью формулы (3,1) мы можем найти среднее значение этой величины $\bar{L}$.

Так, например, зная распределение вероятностей для различных значений энергии системы, можно вычислить среднее значение энергии этой системы. Возникает естественный вопрос, в какой мере задание среднего значения характеризует реальное значение этой величины. В приведенном примере можно спросить, в какой мере указание средней энергии может характеризовать фактическую энергию системы. Ясно, что если отклонения величины от своего среднего значения достаточно малы, то всегда можно без большой погрешности заменить истинное значение величины ее средним значением.

Для того чтобы дать точный количественный ответ, необходимо ввести некоторую величину, которая характеризовала бы отклонение истинных значений величины L от ее среднего значения $\bar{L}$.

На первый взгляд может показаться, что в качестве такого критерия можно выбрать разность $L - \bar{L}$. Однако это не совсем так. Отклонения величины от своего среднего значения могут быть велики, но, тем не менее, будут играть незначительную роль, если они происходят достаточно редко. Если, например, заметные отклонения энергии от ее среднего значения

происходят так редко, что время, протекающее между двумя последовательными отклонениями, очень велико по сравнению с временем наблюдения, то такие отклонения вообще не будут проявляться в течение времени наблюдения. Если же отклонения от среднего не очень велики, но происходят часто, то в этом случае указание только среднего значения $\bar{L}$ недостаточно характеризует истинное значение величины L. Можно было бы попытаться в качестве критерия выбрать среднее значение разности $L-\bar{L}$, т. е. $\overline{L-\bar{L}}$. Однако эта величина в точности равна нулю:

$$\Delta L=\overline{L-\bar{L}}=\bar{L}-\bar{L}=0.$$

(Заметим, что вторичное усреднение $\bar{L}$ проводить не нужно, поскольку среднее $\bar{L}$ есть некоторая постоянная величина. Но среднее значение постоянной величины равно, очевидно, самой величине.)

Равенство нулю величины $\overline{L-\bar{L}}$ выражает собой тот факт, что отклонения L от $\bar{L}$ в обе стороны, в сторону бо́льших и в сторону меньших значений, происходят одинаково часто. Для того чтобы отклонения от $\bar{L}$ в обе стороны не погашались, а складывались, нужно выбрать в качестве критерия не среднюю разность $\overline{\Delta L}=\overline{L-\bar{L}}$, а средний квадрат разности $\overline{(\Delta L)^2}$. При этом значения $\overline{(\Delta L)^2}$ будут тем больше, чем больше отклонения L от $\bar{L}$, независимо от знака отклонения, и чем чаще эти отклонения происходят. Величина $\overline{(\Delta L)^2}=\overline{(L-\bar{L})^2}$ носит название квадратичной флуктуации. Квадратичная флуктуация является существенно положительной величиной. Она принимает наименьшее возможное значение, нуль, только в том случае, когда L все время точно равна своему среднему значению $\bar{L}$. Всякое отклонение от среднего вносит свой вклад в значение $\overline{(\Delta L)^2}$.

Из определения $\overline{(\Delta L)^2}$ имеем

$$\overline{(\Delta L)^2}=\overline{(L-\bar{L})^2}=\overline{L^2-2L\bar{L}+(\bar{L})^2}=\overline{L^2}-2\bar{L}\bar{L}+(\bar{L})^2=\overline{L^2}-(\bar{L})^2. \tag{3,3}$$

Ясно, что для малости абсолютной флуктуации необходимо, чтобы большие отклонения L от $\bar{L}$ были мало вероятны, т. е. происходили достаточно редко. Таким образом, величина $\overline{(\Delta L)^2}$ может характеризовать отклонение L от своего среднего значения Если $\overline{(\Delta L)^2}$ мала, то значение величины L все время близко к своему среднему значению. При этом среднее значение $\bar{L}$ может достаточно точно характеризовать значение L. Относительную погрешность, которую мы совершим, заменив L ее средним

значением $\overline{L}$, можно оценить по значению величины $\delta_L = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta L)^2}}}{\overline{L}}$, носящей название относительной флуктуации.

Если $\delta_L \ll 1$, то это означает, что величина L в среднем настолько близка к $\overline{L}$, что замена L на $\overline{L}$ не вносит сколько-нибудь значительной ошибки.

Мы докажем сейчас теорему, имеющую основное значение для всего дальнейшего изложения. Эта теорема гласит:

Если имеется система, состоящая из N независимых частей, то относительная флуктуация любой аддитивной функции[1]) состояния L обратно пропорциональна корню из числа частей N, т. е.

$$\delta_L = \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{3,4}$$

Для доказательства этой теоремы вычислим величину δ_L. По определению аддитивной величины, $L = \sum_{k=1}^{N} L^{(k)}$, где $L^{(k)}$ — значение величины L для k-й независимой части системы (во избежание недоразумений индекс, характеризующий номер системы, мы пишем вверху), и суммирование ведется по всем независимым частям, входящим в систему.

Из закона сложения вероятностей следует

$$\overline{L} = \sum_{k=1}^{N} \overline{L^{(k)}}. \tag{3,5}$$

Вычислим теперь квадратичную флуктуацию величины L, т. е. величину

$$\overline{(\Delta L)^2} = \overline{\left[\Delta \sum_{k=1}^{N} L^{(k)}\right]^2}.$$

Для простоты предположим сначала, что система состоит только из двух независимых частей. Тогда имеем

$$\overline{[\Delta(L_1 + L_2)]^2} = \overline{(\Delta L_1)^2} + \overline{2\Delta L_1 \cdot \Delta L_2} + \overline{(\Delta L_2)^2}.$$

Поскольку L_1 и L_2 — независимые величины, среднее от произведения $(\Delta L_1) \cdot (\Delta L_2)$ равно произведению средних:

$$\overline{(\Delta L_1)(\Delta L_2)} = \overline{(\Delta L_1)} \cdot \overline{(\Delta L_2)^2}.$$

[1]) Аддитивной функцией называют функцию, обладающую тем свойством, что значение этой функции для сложной системы равно сумме ее значений для всех независимых частей.

Но $\overline{(\Delta L_1)} = \overline{(\Delta L_2)} = 0$, так что

$$\overline{[\Delta (L_1 + L_2)]^2} = \overline{(\Delta L_1)^2} + \overline{(\Delta L_2)^2},$$

т. е. квадратичная флуктуация системы из двух независимых величин равна сумме квадратичных флуктуаций этих величин. Обобщая это на случай N независимых частей, входящих в систему, можно написать

$$\overline{\left[\Delta\left(\sum_{k=1}^{N} L^{(k)}\right)\right]^2} = \sum \overline{(\Delta L^{(k)})^2}. \tag{3,6}$$

Число слагаемых в сумме (3,6) равно числу независимых частей в системе, т. е. N. Будем считать, что флуктуации в различных независимых частях системы по порядку величины близки друг к другу (поскольку все части ее равноправны между собой). Тогда значение суммы, написанной в правой части формулы (3,6), будет пропорционально числу слагаемых, т. е. величине N, так что

$$\overline{\left[\Delta\left(\sum_{k=1}^{N} L^{(k)}\right)\right]^2} \sim N. \tag{3,7}$$

Среднее значение $\overline{L}$ также пропорционально числу слагаемых в сумме формулы (3,6), т. е. пропорционально N. Поэтому относительная флуктуация величины L равна

$$\delta_L = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta L)^2}}}{\overline{L}} = \frac{\sqrt{\overline{[\Delta(\sum L^{(k)})]^2}}}{\sum \overline{L^{(k)}}} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{3,8}$$

Таким образом, теорема доказана.

Как уже было указано во введении, задачей статистической физики является изучение свойств макроскопических систем, состоящих из огромного числа частиц атомов или молекул. Мы увидим в дальнейшем, что методы изучения свойств таких систем основаны на применении статистических законов. Применение этих законов позволяет находить средние значения различных величин, характеризующих состояние системы. Из приведенной нами теоремы следует, что относительные флуктуации всех физических величин, значение которых для всей системы равно сумме значений их для всех частиц, обратно пропорциональны корню из числа частиц. Поскольку число частиц в макроскопической системе выражается обычно огромными числами (порядка $6 \cdot 10^{23}$), относительная флуктуация любой аддитивной величины практически оказывается равной нулю. Это означает, что все аддитивные величины имеют значения, весьма

близкие к средним. Поэтому замена истинных величин их средними значениями может быть произведена с большой точностью. Средние значения различных величин, вычисленные на основе законов статистической физики, с очень большой степенью точности совпадают с их истинными значениями. Это означает, что вероятностные предсказания приобретают практически совершенно достоверный характер.

Представим себе, например, что мы хотим найти давление, оказываемое молем газа, находящимся в сосуде, на стенки последнего. С помощью положений статистической физики оказывается возможным вычислнть среднее давление газа $\bar{p}$.

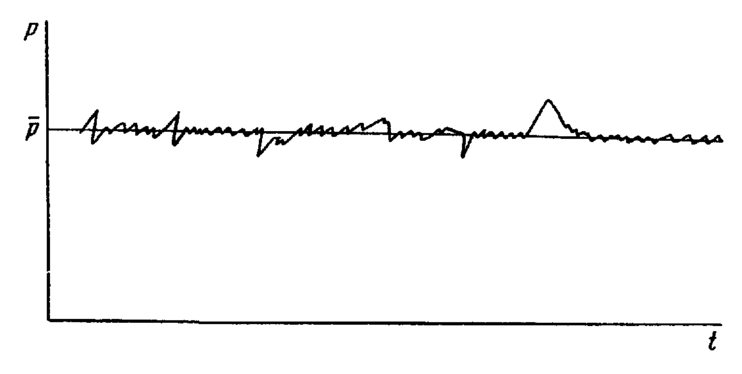


Рис. 34.

Истинное давление p, испытываемое стенкой, отнюдь не равно среднему давлению. В зависимости от сложных законов движения молекул в газе оно будет принимать разнообразные, быстро изменяющиеся во времени значения (рис. 34), могущие быть и больше и меньше среднего давления. Тем не менее, теорема о флуктуациях показывает, что относительная ошибка, которую мы совершим, заменяя истинное, меняющееся во времени давление его средним значением (изображенным на рис. 34 горизонтальной линией), будет порядка $\delta_p \sim \frac{1}{\sqrt{6 \cdot 10^{23}}}$, т. е. ошибка составляет $\sim 10^{-12}\%$.

Очевидно, что такая ошибка лежит далеко за пределами точности измерений лучших манометров и практически не имеет никакого значения. Поэтому мы можем пользоваться средним значением давления, совершенно не опасаясь допустить какую-либо погрешность. То же относится и к другим функциям состояния системы. Примеры этих функций будут даны в дальнейшем.

§ 4. Нормальное распределение и моменты

Возвращаясь к обсуждению свойств аддитивной величины $L = \sum_{k=1}^{N} L^{(k)}$, следует указать, что в теории вероятностей доказывается следующая, весьма важная теорема, именуемая центральной предельной теоремой теории вероятностей: при увеличении числа слагаемых в сумме (при $N \to \infty$) статистическое распределение вероятностей для величины L стремится к нормальному (гауссовому) распределению, имеющему вид

$$\rho(L)\,dL = \frac{1}{\sqrt{2\pi \overline{L^2}}} e^{-\frac{(L-\overline{L})^2}{\overline{(\Delta L)^2}}}\,dL. \tag{4,1}$$

В применении к физическим системам это означает, что нормальное распределение для аддитивных величин, например, энергии должно установиться во всякой физической системе, содержащей достаточно большое число независимых частиц. Мы не будем приводить доказательства центральной предельной теоремы, а ограничимся рассмотрением одного характерного примера.

Рассмотрим систему из N одинаковых статистически независимых частиц. Пусть вероятность того, что одна из частиц попадает в p-е состояние, равна p. Найдем вероятность того, что в этом состоянии окажется n частиц. Для этого напишем вероятность того, что n частиц находятся в состоянии p, а остальные $(N-n)$ частиц в других состояниях, в виде: $p^n(1-p)^{N-n}$ (на основании (3,4), поскольку частицы независимы).

Число способов, которым можно выбрать n произвольных частиц из общего числа N частиц, равно числу сочетаний из N элементов по n. Последнее равно $C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$. Поэтому полная вероятность того, что n произвольно выбранных частиц одновременно окажутся в p-м состоянии, равна

$$w_N(n) = \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^n (1-p)^{N-n}. \tag{4,2}$$

Полученное выражение носит название биномиального закона. Будем считать теперь, что в системе содержится очень много частиц, так что $N \gg n$. Тогда можно написать, опуская n в показателе последнего множителя,

$$w_N(n) \cong \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n (1-p)^N = \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!} p^n (1-p)^N = \frac{(\bar{n})^n}{n!}\left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N,$$

где обозначено $\bar{n} = pN$. Очевидно, что $\bar{n}$ представляет среднее число частиц в p-м состоянии. В пределе $N \to \infty$ получаем

$$w(n) = \lim_{N\to\infty} w_N(n) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!}. \tag{4,3}$$

Последняя формула носит название формулы Пуассона. Наконец, найдем асимптотическое выражение формулы Пуассона для случая, когда не только N весьма велико, но велико также и число частиц n в данном состоянии. Это значит, что $\bar{n}$ и n можно считать большими (по сравнению с единицей) числами, а разность $n - \bar{n} \ll \bar{n}$. Логарифмируя формулу Пуассона, имеем

$$\ln w(n) = n \ln \bar{n} - \bar{n} - \ln n!$$

Пользуясь формулой Стирлинга (приложение IV), т. е. учитывая, что

$$\ln n! \simeq n \ln n - n,$$

можно окончательно записать

$$w(n) = \mathrm{const} \cdot e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}^2}}.$$

Постоянная находится из условия нормировки. При больших значениях n суммирование можно заменить интегрированием. Тогда получаем

$$dw(n) = w(n)\,dn = \rho(n)\,dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}^2}}\,dn, \tag{4,4}$$

т. е. нормальное (гауссово) распределение вероятностей. Среднеквадратичная флуктуация числа частиц в рассматриваемом состоянии равна

$$\overline{(\Delta n)^2} = \overline{(n-\bar{n})^2} = \overline{n^2} - (\bar{n})^2 = \int n^2\,dw(n) - \left(\int n\,dw(n)\right)^2 = \bar{n}. \tag{4,5}$$

В данном случае формула (3,7) оказывается не приближенной, а точной. Поэтому распределение Гаусса можно представить в виде

$$\rho(n)\,dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\overline{(\Delta\bar{n})^2}}}\,dn, \tag{4,6}$$

что совпадает с (4,1). Мы видим на частном примере, что при больших значениях чисел N и n устанавливается нормальное распределение вероятностей, причем в среднем отклонение чисел n от их средних значений достаточно мало.

Среднеквадратичная флуктуация характеризует эффективную ширину нормального распределения. Чем меньше $\overline{(\Delta n)^2}$,

или в общем случае $\overline{(\Delta L)^2}$, тем меньше ширина гауссова распределения. В пределе $\overline{(\Delta L)^2} \to 0$ гауссово распределение превращается в δ-функцию. При этом вероятность найти значение $L \neq \overline{L}$ стремится к нулю, а вероятность значения $L = \overline{L}$ — к единице. Нормальное распределение имеет симметричный характер, так что $w(L) = w(-L)$, т. е. вероятность отклонения от среднего в обе стороны одинакова. Если распределение не является гауссовым, то оно, вообще говоря, не симметрично относительно знака L. Степень асимметрии распределения характеризуется величиной, именуемой асимметрией и равной

$$\overline{(\Delta L)^3} = \overline{L^3} - 3\overline{L} \cdot \overline{(\Delta L)^2} = \overline{L^3} - 3\overline{L} \cdot [\overline{L^2} - (\overline{L})^2]. \tag{4,7}$$

Среднеквадратичное отклонение и асимметрия выражаются через величины $\overline{L}$ и $\overline{L^n}$ $(n = 2,\ 3)$. Последние, определяемые в общем виде формулой

$$\overline{L^n} = \int L^n \rho(L)\, dL, \tag{4,8}$$

называются моментами n-го порядка. Оказывается, что если $\rho(L)$ — аналитическая функция, дифференцируемая сколько угодно раз, то совокупность моментов всех порядков $(\overline{L}, \overline{L^2}, \overline{L^3}, \ldots)$ полностью определяет вид функции $\rho(L)$. Действительно, совершая фурье-преобразование над $\rho(L)$, имеем

$$\psi(\omega) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(L)\, e^{i\omega L}\, dL. \tag{4,9}$$

Функция $\psi(\omega)$ называется характеристической функцией распределения вероятностей.

Дифференцируя (4,10) по ω и полагая затем $\omega = 0$, находим

$$\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)_{\omega=0} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L\rho(L)\, dL = \overline{L} \cdot \left(\frac{i}{2\pi}\right),$$

$$\left(\frac{d^2\psi}{d\omega^2}\right)_{\omega=0} = \frac{i^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L^2\rho(L)\, dL = \overline{L^2} \cdot \left(\frac{i^2}{2\pi}\right),$$

. . . .

$$\left(\frac{d^n\psi}{d\omega^n}\right)_{\omega=0} = \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L^n\rho(L)\, dL = \overline{L^n} \cdot \left(\frac{i^n}{2\pi}\right).$$

Поэтому если известны все моменты, то известны коэффициенты в разложении

$$\psi(\omega) = \psi(0) + \psi_0' \cdot \frac{\omega}{1!} + \psi_0'' \cdot \frac{\omega^2}{2!} + \ldots \tag{4,10}$$

и, следовательно, известна сама функция $\psi(\omega)$. Тогда распределение вероятностей получается непосредственно из преобразования.

$$\rho(L) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \qquad (4,11)$$

Иногда известны моменты $\overline{L^n}$, во всяком случае первые несколько моментов, но неизвестно само распределение вероятностей. Тогда, находя точно (или приближенно) характеристическую функцию $\psi(\omega)$, можно найти точно или приближенно само распределение вероятностей $\rho(L)$.

§ 5. Коррелятивная функция

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с рассмотрением случайных функций. Под случайной функцией понимают такую функцию $f(x)$, значения которой не находятся в однозначной зависимости от переменной x. При фиксированном значении x функция $f(x)$ может случайно принимать всевозможные значения. При этом можно говорить лишь о вероятности того, что при заданном x функция $f(x)$ имеет значение, лежащее между $f(x)$ и $f(x)+df(x)$. В дальнейшем для конкретности будем считать, что случайная величина зависит от времени, т. е. будем рассматривать случайную функцию времени $f(t)$. Процесс, описываемый случайной функцией времени, называется стохастическим. Физические примеры стохастических процессов и случайных функций, зависящих от времени, будут приведены ниже.

Важнейшей количественной характеристикой случайных процессов является их коррелятивная функция. Коррелятивной (или, точнее, автокоррелятивной) функцией $K(\tau)$ называется среднее (по времени или по ансамблю) значение произведения случайной функции, описывающей стохастический процесс в некоторой системе, взятой в момент времени t, и той же функции, взятой в момент $t+\tau$:

$$K(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t+\tau)\, dt, \qquad (5,1)$$

где τ может быть как положительным, так и отрицательным. Для краткости мы будем обозначать

$$K(\tau) = \overline{f(t) f(t+\tau)}. \qquad (5,2)$$

Черта означает усреднение по времени.

Наряду с временным усреднением, можно проводить усреднение по ансамблю тождественных физических систем, в которых происходит случайный физический процесс. В силу

сказанного в § 2, оба усреднения являются эквивалентными. Поэтому можно написать

$$K(\tau)=\langle f(t)f(t+\tau)\rangle. \tag{5,3}$$

Скобками $\langle\ \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю.

Коррелятивная функция $K(\tau)$ является количественной мерой связи между значениями случайной функции в последовательные моменты времени. Иными словами, коррелятивная функция $K(\tau)$ является мерой скорости изменения во времени функции $f(t)$, описывающей стохастический процесс.

Значения коррелятивной функции зависят только от τ, но не от выбора значения t. Действительно, в силу однородности времени, изменение начала отсчета не может влиять на значение величин, так что

$$K(\tau)=\overline{f(t)f(t+\tau)}=\overline{f(t')f(t'+\tau)}. \tag{5,4}$$

Если значения случайной функции $f(t)$ изменяются так быстро, что ее значение в момент времени $t+\tau$ совершенно не зависит от значения в момент времени t, то

$$K(\tau)=\overline{f(t)}\cdot\overline{f(t+\tau)}=0. \tag{5,5}$$

При $\tau\to\infty$ имеет место очевидное равенство

$$K(\tau\to\infty)\to 0, \tag{5,6}$$

именуемое свойством ослабления корреляции на бесконечности.

В другом предельном случае $\tau=0$ равенство

$$K(0)=\overline{[f(t)]^2}=\langle f^2(t)\rangle \tag{5,7}$$

показывает, что $K(0)$ совпадает со среднеквадратичным значением (вторым моментом) случайной функции $f(t)$. Наконец, симметрия стохастического процесса во времени (см. §§ 25 и 36) позволяет написать условие

$$K(\tau)=K(-\tau). \tag{5,8}$$

Конкретный вид коррелятивной функции зависит, разумеется, от природы случайного процесса. Однако существует некоторая теорема, связывающая между собой две важные характеристики случайного процесса — коррелятивную функцию и так называемую спектральную плотность мощности. Случайную функцию $f(t)$ можно разложить в интеграл Фурье, написав

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{5,9}$$

Частоты ω образуют непрерывный спектр.

Представим среднеквадратичное значение $\langle f^2 \rangle$ в виде

$$\langle f^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega)\, d\omega = 2\int_{0}^{\infty} I(\omega)\, d\omega, \tag{5,10}$$

где функция $I(\omega)$ носит название спектральной плотности. По определению, $I(\omega)$ — существенно положительная функция, причем $I(\omega) = I(-\omega)$.

Подставляя теперь (5,9) в определение $\langle f^2 \rangle$ (5,7), находим

$$\langle f^2(t) \rangle = \int \int d\omega\, d\omega' e^{i(\omega+\omega')t} \langle f(\omega) f(\omega') \rangle. \tag{5,11}$$

Распишем выражение для $\langle f(\omega) f(\omega') \rangle$, воспользовавшись формулой обратного преобразования Фурье

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \tag{5,12}$$

Тогда получим

$$\langle f(\omega) f(\omega') \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int \int e^{i(\omega t + \omega' t')} \langle f(t)\, f(t') \rangle\, dt'\, dt.$$

Полагая $t' = t + \tau$, имеем

$$\langle f(\omega) f(\omega') \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int \int e^{i(\omega+\omega')t} e^{i\omega'\tau} \langle f(t)\, f(t+\tau) \rangle\, dt\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int \int e^{i(\omega+\omega')t} e^{i\omega'\tau} K(\tau)\, dt\, d\tau. \tag{5,13}$$

Согласно (5,4) коррелятивная функция $K(\tau)$ не зависит от t, и в последнем выражении можно вынести $K(\tau)$ из-под знака интегрирования по t:

$$\langle f(\omega) f(\omega') \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{i\omega'\tau} K(\tau)\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega+\omega')t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'\tau} K(\tau)\, d\tau\, \delta(\omega + \omega'). \tag{5,14}$$

Подставляя (5,14) в (5,11), имеем

$$\langle f^2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int d\tau\, d\omega\, d\omega'\, e^{i\omega'\tau} K(\tau)\, \delta(\omega + \omega') =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\omega\, d\tau. \tag{5,15}$$

Сравнивая (5,15) и (5,10), получаем окончательно

$$I(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}K(\tau)\,d\tau. \qquad (5,16)$$

Обращая последний интеграл, можем также написать

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}I(\omega)\,d\omega. \qquad (5,17)$$

Формулы (5,17) и (5,16) составляют содержание теоремы Винера — Хинчина. Они связывают между собой коррелятивную функцию и спектральную плотность мощности. Последняя оказывается Фурье-компонентой коррелятивной функции.

С приложением теоремы Винера — Хинчина мы столкнемся при изучении стохастических процессов в физических системах.

ГЛАВА II

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

§ 6. Простейшая статистическая система — идеальный газ

Изучение систем, содержащих весьма большое число частиц, естественно начать с простейшего случая — идеального газа.

В газообразном состоянии плотность вещества мала, так что среднее расстояние между молекулами оказывается очень большим по сравнению с геометрическими размерами частиц — атомов или молекул. Благодаря этому основную долю всего времени движения каждая из частиц находится сравнительно далеко от остальных газовых частиц.

Силы межмолекулярного взаимодействия быстро убывают с расстоянием и становятся ничтожно малыми, когда молекулы находятся на расстояниях, заметно превышающих их геометрические размеры. Таким образом, характерной особенностью движения молекул в газе является малость межмолекулярного взаимодействия в течение подавляюще большой части времени движения. Из-за отсутствия взаимодействия газовые молекулы движутся прямолинейно и равномерно до тех пор, пока не произойдет столкновения между данной и какой-либо другой молекулой или соударения со стенкой сосуда. При столкновениях газовых молекул между собой или с молекулами стенки сосуда молекулы можно считать недеформируемыми. Это означает, что столкновения между молекулами происходят по тем же законам, что и столкновения обычных твердых шаров. В процессе столкновения между молекулами происходит обмен кинетической энергией и импульсом. Аналогично при столкновении молекулы со стенкой сосуда, точнее говоря, с молекулой вещества этой стенки, можно считать, что газовая молекула упруго отражается от стенки.

Статистическую систему, частицы которой взаимодействуют друг с другом только в процессе столкновений, а все остальное время движутся как свободные, мы будем именовать идеальным газом.

Движение каждой газовой молекулы строго определено законами механики (в первом приближении — классической механики). Поэтому в принципе, интегрируя уравнения движения всех молекул, входящих в состав газа, можно было бы найти траекторию каждой из них. Однако фактически подобного рода расчет сталкивается с огромными трудностями. Уже интегрирование уравнений движения трех взаимодействующих материальных точек (задача трех тел) является весьма сложной задачей, в общем случае еще не решенной. Общее решение задачи четырех тел является столь сложным, что пути ее решения даже не намечены. В газе же число взаимодействующих частиц выражается числами порядка 10^{20}. За самый короткий, с макроскопической точки зрения, промежуток времени в газе происходят бесчисленные столкновения молекул между собой и со стенками сосуда. Поэтому для нахождения траекторий всех молекул в газе нужно было бы записать и разрешить $3 \cdot 10^{20}$ связанных между собой уравнений движения с учетом соответствующих начальных условий. Из сказанного совершенно ясно, что подобная задача является не только практически, но и принципиально трудной.

На первый взгляд может показаться, что последнее утверждение вообще лишает нас возможности изучать физические закономерности в системах, состоящих из очень большого числа частиц. В действительности, однако это не так. Хотя каждая из частиц, входящих в состав системы, сама является «механической системой» и подчиняется законам механики, совокупность огромного числа молекул является системой, качественно отличной от системы, состоящей из небольшого числа молекул. В ней проявляются закономерности особого типа, совершенно не свойственные простым механическим системам и получившие название статистических закономерностей.

Действительно, рассмотрим газ, состоящий из огромного числа молекул и заключенный в замкнутый сосуд. Такой газ представляет механическую систему с огромным числом степеней свободы. Зная начальные условия, можно было бы в принципе проинтегрировать уравнения движения всех газовых молекул и найти их траектории. Оставляя в стороне вопрос о практической осуществимости такого расчета, необходимо заметить, что подобное решение не представляло бы никакого интереса. Мы хорошо знаем из опыта, что свойства газа фактически совершенно не зависят от начальных условий — начальных положений и скоростей молекул. Так, например, свойства газа в замкнутом сосуде совершенно не будут зависеть от характера заполнения сосуда: независимо от того, втекал ли газ через одно отверстие и постепенно или через два отверстия и быстро, по прошествии некоторого промежутка времени после впуска

газ придет во вполне определенное состояние, в котором он и будет находиться в дальнейшем.

Мы скажем, что газ придет в состояние равновесия. Свойства газа в состоянии равновесия не зависят от его предыстории и не изменяются во времени.

Нам хорошо известно из опыта, что газ всегда стремится полностью и равномерно занять весь предоставленный ему объем. Поэтому такой характер движения газа, при котором плотность газа была бы неодинаковой в различных частях сосуда, является исключенным или, точнее, крайне мало вероятным. Никакого явного противоречия с законами механики при этом не возникло бы. Если бы состояние системы зависело от начальных условий, то последние принципиально можно было бы подобрать так, чтобы плотность газа в разных частях сосуда была различной. То обстоятельство, что состояние газа не зависит от начальных условий положения и скоростей его молекул, совершенно обесценивает знание траектории отдельных молекул. Предположим, что мы сумели преодолеть все математические трудности и нашли траекторию отдельной молекулы. Пусть при этом оказалось, что траектория данной молекулы почти целиком проходит в одном из углов куба. Ясно, что из этого мы не смогли бы вывести каких-либо заключений о поведении всего газа.

Газ как целое, содержащий огромное число частиц, является системой, качественно отличной от отдельной молекулы, и его поведение подчиняется иным, статистическим закономерностям. В этом смысле один из создателей статистической физики, Смолуховский, писал, что если бы даже мы умели находить траектории газовых молекул, все равно при описании свойств газа пользовались бы законами теории вероятностей.

При отыскании статистических закономерностей будем искать среднее значение величин, характеризующих состояние газа как целого. Благодаря тому, что число частиц в газе весьма велико, из результатов § 3 следует, что найденные средние будут с огромной степенью точности совпадать с истинными значениями величин.

Предыдущие рассуждения позволили нам выявить важнейшую особенность «массовых» процессов, т. е. таких процессов, которые характеризуются наличием большого числа более или менее равноправных событий. Эта особенность заключается в том, что в таких процессах проявляются своеобразные статистические закономерности, совершенно не свойственные отдельным системам или процессам.

Рассмотрим некоторый замкнутый сосуд, заполненный газом. Предположим, что в газе установилось состояние равновесия. Попытаемся установить статистические законы, определяющие

поведение газа. В соответствии с прямыми данными опыта будем предполагать, что молекулы газа распределяются по всему объему замкнутого сосуда с равномерной плотностью (т. е. что число молекул в единице объема постоянно по всему сосуду). Будем также предполагать, что молекулы газа обладают скоростями, равномерно распределенными по всем направлениям в пространстве. Это означает, что число молекул, движущихся во всех направлениях, должно быть одинаковым. Если бы это было не так и существовало бы направление преимущественного движения молекул, то в этом направлении возник бы поток газа. Из опыта следует, что в газе, заключенном в замкнутый сосуд и не подвергающемся воздействию извне, возникновение установившегося потока газа невозможно. Предположение о равномерном распределении молекул в пространстве и равномерном распределении скоростей по всем направлениям называют предположением о молекулярном хаосе.

Естественно, возникает вопрос, каким образом устанавливается равномерное распределение скоростей молекул во всех направлениях. Ясно, что если бы молекулы совершенно не взаимодействовали между собой, то не было бы никаких причин, которые могли бы изменить первоначальное направление движения молекул. Поэтому наличие или отсутствие направленного потока целиком определялось бы начальными условиями. Установление молекулярного хаоса обусловлено существованием взаимодействия между молекулами. При столкновениях между молекулами направления их движения непрерывно изменяются, и в газе устанавливается хаотическое движение с равномерным распределением скоростей по направлениям в пространстве.

Роль молекулярных столкновений не сводится только к установлению равномерного распределения скоростей по направлениям. При столкновениях молекул наряду с изменением направления полета происходит также изменение скоростей молекул по абсолютной величине. Если бы в начальный момент времени все молекулы имели одинаковые скорости, то беспорядочные столкновения между ними привели бы к тому, что часть молекул случайно получила бы избыточную кинетическую энергию за счет других молекул, соответственно потерявших часть энергии. Благодаря этому равенство скоростей газовых молекул нарушится и в газе появится некоторая часть молекул, имеющих бóльшие и меньшие скорости. Иными словами, в газе возникнет некоторое распределение молекул по скоростям. В газе появится некоторое число молекул, имеющих большие скорости, и некоторое число молекул со средними и малыми скоростями.

Нашей задачей является нахождение распределения молекул идеального газа по скоростям. Это распределение будет харак-

теризоваться средним числом молекул, имеющих данное значение скорости.

Из предположения о хаотическом характере молекулярного движения следует, что возможно появление молекул с любыми скоростями, так что распределение молекул можно характеризовать некоторой непрерывной функцией. Поскольку скорости движения молекул изменяются непрерывно, нужно, конечно, говорить не о числе молекул, имеющих точно заданную скорость, а о числе молекул, имеющих скорость, близкую к данной.

§ 7. Распределение Максвелла

Обозначим через $dn_{\mathbf{v}}$ среднее число молекул в единице объема газа, имеющих компоненты скорости, лежащие в интервале между v_x и $v_x + dv_x$, v_y и $v_y + dv_y$, v_z и $v_z + dv_z$.

Мы будем считать, что газ находится в стационарном состоянии, так что установилось состояние молекулярного хаоса и оно не изменяется во времени. При этом число частиц с данными компонентами скорости не зависит от времени.

Ясно, что среднее число молекул $dn_{\mathbf{v}}$ можно представить в следующем виде:

$$dn_{\mathbf{v}} = n(v_x, v_y, v_z)\, d\mathbf{v} = n(\mathbf{v})\, dv_x dv_y dv_z, \tag{7,1}$$

где $n(v_x, v_y, v_z) = n(\mathbf{v})$ — среднее число молекул с компонентами скорости v_x, v_y, v_z в единичном интервале. Функция $n(\mathbf{v})$ получила название функции распределения молекул по скоростям.

Если интервал $dv = dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$ достаточно велик для того, чтобы в нем могло находиться сравнительно большое число молекул, то функция распределения будет плавно изменяться с изменением значения своих аргументов.

Поскольку все направления движения молекул в пространстве равноправны, распределение скоростей должно быть изотропным и функция распределения $n(\mathbf{v})$ не может зависеть от направления скорости. Это означает, что $n(v_x, v_y, v_z)$ не может быть произвольной функцией от компонент скорости v_x, v_y, v_z, но должна являться функцией аргумента $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, т. е. абсолютной величины скорости, и

$$dn_{\mathbf{v}} = dn_v. \tag{7,2}$$

Переходя от компонент скорости к ее абсолютной величине и направлению, которое характеризуется полярными углами ϑ и ψ, можем в силу (I, 67) написать

$$dn_v = n(v) v^2\, dv \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi. \tag{7,3}$$

Полное число частиц в единице объема $n=\frac{N}{V}$ определяет условие нормирования:

$$n=\int n(v)\,v^2\,dv\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi=4\pi\int n(v)\,v^2\,dv. \qquad (7,4)$$

Пределы интегрирования по компонентам скорости v_x, v_y, v_z или по абсолютному значению скорости v будут обсуждены в дальнейшем.

Нашей задачей является нахождение явного вида функции распределения $n(v)$. Здесь мы ограничимся самым простым, хотя и не вполне строгим, выводом вида функции распределения, получившей название функции распределения Максвелла, или, кратко, максвелловского распределения. В этом выводе особенно ясна роль молекулярных столкновений и предположения о молекулярном хаосе в установлении равновесного распределения молекул по скоростям.

Рассмотрим процесс столкновения двух частиц, движущихся со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Поскольку силы межмолекулярного взаимодействия быстро убывают с расстоянием и фактически отличны от нуля только в момент непосредственного контакта частиц, мы можем заменить реальный процесс соударения идеализированной схемой упругого соударения двух материальных точек. При этом конкретный вид сил взаимодействия не играет роли. Пусть в результате соударения скорости молекул изменяются. После соударения первая частица движется со скоростью $\boldsymbol{v}_3$, а вторая — со скоростью $\boldsymbol{v}_4$. Число таких столкновений в единицу времени в единице объема газа должно быть пропорционально числу молекул со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, т. е. произведению $n(v_1)n(v_2)$. Рассмотрим далее процесс соударения, являющийся обратным данному. При этом скорости молекул изменяются от значений $\boldsymbol{v}_3$ и $\boldsymbol{v}_4$ до значений $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Число таких соударений в единицу времени в единице объема пропорционально количеству молекул со скоростями $\boldsymbol{v}_3$ и $\boldsymbol{v}_4$, т. е. $n(v_3)n(v_4)$.

В силу сделанного нами предположения о том, что число молекул с данными значениями скорости не изменяется процессами молекулярных столкновений в газе, находящемся в стационарном состоянии, можно считать, что число молекул, у которых скорости изменяются от значений $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ до значений $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$, равно числу молекул, у которых скорости изменяются от $\boldsymbol{v}_3$ и $\boldsymbol{v}_4$ до $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, т. е. считать

$$n(v_1)\,n(v_2)=n(v_3)\,n(v_4). \qquad (7,5)$$

Равенство (7,5) выражает детальный баланс частиц, получающих и теряющих соответствующую скорость.

Поскольку в процессе столкновения энергия молекул сохраняется, для прямого и обратного процессов можно написать

$$v_1^2 + v_2^2 = v_3^2 + v_4^2. \tag{7,6}$$

Равенство (7,6) выражает закон сохранения энергии при столкновении: при этом входящий в обе стороны общий множитель $\frac{m}{2}$ опущен.

Равенства (7,4), (7,5) и (7,6) представляют совокупность условий, которым должна удовлетворять искомая функция распределения.

Из формулы (7,6), в которую входят только квадраты скоростей, видно, что функциональное уравнение (7,5) будет выглядеть гораздо проще, если в качестве аргумента функции распределения выбрать не самую абсолютную величину скорости, а ее квадрат, записав искомую функцию в виде $n(v^2)$. Это не изменяет существа дела, но позволяет переписать (7,5) в более простом с математической точки зрения виде

$$n\left(v_1^2\right) n\left(v_2^2\right) = n\left(v_3^2\right) n\left(v_4^2\right). \tag{7,7}$$

Функциональное уравнение (7,7) легко превратить в простое дифференциальное уравнение. Для этого выразим v_4 через v_1, v_2 и v_3 с помощью (7,6) и перепишем (7,7) в виде

$$n\left(v_1^2\right) n\left(v_2^2\right) = n\left(v_3^2\right) n\left(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2\right).$$

Взяв логарифм от этого равенства, имеем

$$\ln n\left(v_1^2\right) + \ln n\left(v_2^2\right) = \ln n\left(v_3^2\right) + \ln n\left(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2\right). \tag{7,8}$$

Продифференцируем последнее равенство по аргументу v_1^2. При этом мы должны помнить, что уравнение (7,8) справедливо при совершенно произвольных и независимых значениях v_1, v_2 и v_3 [значение v_4 определено формулой (7,6)]. Имеем

$$\frac{1}{n\left(v_1^2\right)} \frac{dn\left(v_1^2\right)}{dv_1^2} = \frac{1}{n\left(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2\right)} \frac{dn\left(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2\right)}{d\left(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2\right)}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{n\left(v_2^2\right)} \frac{dn\left(v_2^2\right)}{dv_2^2} = \frac{1}{n\left(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2\right)} \frac{dn\left(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2\right)}{d\left(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2\right)}.$$

Сравнивая оба равенства, получаем

$$\frac{1}{n\left(v_1^2\right)} \frac{dn\left(v_1^2\right)}{dv_1^2} = \frac{1}{n\left(v_2^2\right)} \frac{dn\left(v_2^2\right)}{dv_2^2}. \tag{7,9}$$

Так как v_1 и v_2 — независимые переменные, а равенство (7,9) должно иметь место при совершенно произвольных значениях

независимых величин v_1 и v_2, ясно, что оно может быть выполнено только тогда, когда правая и левая части (7,9) равны некоторой постоянной.

Обозначим эту постоянную через $-\alpha$. Тогда вместо (7,9) можно написать

$$\frac{1}{n(v^2)}\frac{dn(v^2)}{dv^2} = -\alpha. \qquad (7,10)$$

В последнем уравнении мы опустили индекс при скорости, так как из смысла предыдущих рассуждений ясно, что оно должно быть справедливо при любом значении скорости.

Интегрируя (7,10), находим

$$n(v^2) = Ae^{-\alpha v^2}, \qquad (7,11)$$

где A — постоянная интегрирования.

Постоянная интегрирования A может быть определена из условия нормирования (7,4). В силу (7,11) и (7,4) имеем

$$4\pi A\int e^{-\alpha v^2}v^2\,dv = n. \qquad (7,12)$$

Обсудим теперь пределы интегрирования в условии нормирования (7,12). Нижний предел интегрирования в (7,12) отвечает наименьшему возможному значению скорости v. Последнее, очевидно, равно нулю. Что же касается верхнего предела, то мы не можем, конечно, указать значения наибольшей скорости, которую может иметь молекула в газе. Однако вид распределения, входящего в (7,12), показывает, что в знании этой величины, в сущности, нет нужды. Подынтегральная функция настолько быстро убывает с ростом аргумента, что мы не сделаем никакой ошибки, заменив верхний предел в (7,12) на бесконечный. Прибавляемая при этом площадь будет бесконечно малой высшего порядка. Поэтому условие нормирования (7,12) можно записать в виде

$$4\pi A\int_0^\infty e^{-\alpha v^2}v^2\,dv = n. \qquad (7,13)$$

Из условия (7,13) непосредственно следует, что $\alpha > 0$. В противном случае интеграл не существует. Интегрирование дает

$$A = n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}. \qquad (7,14)$$

Окончательно функция распределения может быть записана в виде

$$n(v) = n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}e^{-\alpha v^2}. \qquad (7,15)$$

Число молекул в единице объема, скорость которых лежит между v и $v + dv$, таким образом, равно

$$dn_v = 4\pi n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} v^2 \, dv. \qquad (7,16)$$

Формула (7,16) носит название распределения Максвелла.

Наряду с распределением по скоростям можно написать также распределение по компонентам скоростей:

$$dv_n = n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)} dv_x \, dv_y \, dv_z. \qquad (7,17)$$

Переход от (7,16) к (7,17) соответствует обычному преобразованию координат от полярных к декартовым.

В формуле (7,17) можно считать, что компоненты скорости изменяются в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Заметим, что функция распределения по компонентам скоростей может быть записана в виде произведения трех функций распределения по компонентам скоростей:

$$dn_v = dn_{v_x} dn_{v_y} dn_{v_z} =$$
$$= n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot e^{-\alpha v_x^2} dv_x\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_y^2} dv_y\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot e^{-\alpha v_z^2} dv_z\right). \qquad (7,18)$$

Прежде чем перейти к обсуждению результатов, вытекающих из распределений (7,16) или (7,17), необходимо выяснить смысл фигурирующего в них параметра α.

§ 8. Столкновения молекул со стенкой сосуда. Давление. Связь параметра α с абсолютной температурой

В процессе движения молекулы газа, заключенного в некоторый сосуд, испытывают соударения с его стенками. Стенки сосуда не образуют геометрически резкой границы, но имеют молекулярное строение. Газовая молекула, приближающаяся к стенке, испытывает со стороны молекул последней весьма сильное отталкивание и отражается внутрь сосуда. На рис. 35 изображен схематический ход потенциальной энергии молекулы вблизи стенки сосуда. Последнюю мы можем рассматривать как бесконечно высокий потенциальный барьер, непроницаемый для молекул. Можно считать, что отражение молекулы от стенки сосуда происходит совершенно упруго. Это означает, что компонента скорости, перпендикулярная к плоскости стенки, при отражении изменяется на прямо противоположную.

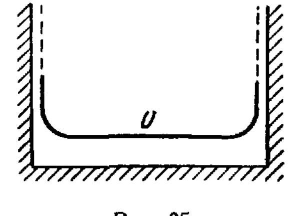


Рис. 35.

Рассмотрим некоторую площадку стенки dS, перпендикулярную к оси x. Тогда при отражении от этой площадки молекула, имевшая компоненты скорости v_x, v_y, v_z, приобретает компоненты скорости $-v_x$, v_y, v_z. При отражении молекулы от площадки происходит изменение компоненты импульса по оси x от значения mv_x до значения $-mv_x$, т. е. на величину $2mv_x$. Этот импульс передается отражающей стенке.

Таким образом, столкновения молекул со стенкой будут приводить к появлению силы, действующей на поверхность сосуда. Силу, действующую на единицу поверхности стенки со стороны всех молекул газа, мы отождествим с макроскопическим давлением. Это утверждение, являющееся, в сущности, основой кинетической теории газов, казалось в свое время весьма радикальным. Однако сейчас оно представляется естественным и совершенно очевидным.

Для нахождения давления, оказываемого на стенку сосуда, нужно вычислить полное изменение количества движения молекул газа, испытывающих отражение от единицы поверхности сосуда в единицу времени. Оно равно, очевидно, изменению импульса в одном соударении со стенкой, умноженному на полное число ударов, приходящихся на 1 *см*^{2} поверхности за 1 *сек*. Изменение импульса равно $2mv_x$. Умножив это выражение на число ударов, приходящихся на 1 *см*^{2} стенки за 1 секунду, со стороны молекул, имеющих данную компоненту скорости v_x, и суммируя или, точнее, интегрируя это произведение по всем значениям v_x, мы найдем искомое давление. В единицу времени поверхности стенки будут достигать все молекулы, находящиеся от нее на расстоянии, меньшем или равном v_x (поскольку v_x — путь, проходимый в единицу времени молекулой, движущейся в положительном направлении оси x). На 1 *см*^{2} поверхности за 1 *сек* будут попадать все молекулы, находящиеся в параллелепипеде высотой v_x и с основанием 1 *см*^{2} (рис. 36). Объем этого параллелепипеда равен, очевидно, v_x *см*^{3}. В нем находится $dn_v v_x$ молекул, компоненты скорости которых лежат между v_x и $v_x + dv_x$; v_y и $v_y + dv_y$; v_z и $v_z + dv_z$. Поверхности стенки будут достигать все молекулы, находящиеся в указанном параллелепипеде, независимо от значений компонент скорости v_y и v_z, параллельных этой поверхности[1]).

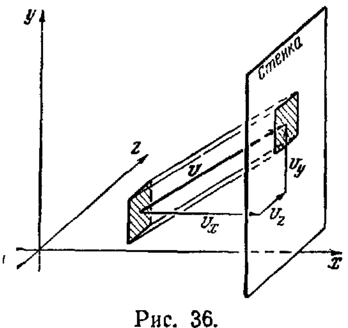


Рис. 36.

[1]) Это рассуждение носит качественный характер. В нем не учитываются столкновения между молекулами, их взаимодействие со стенкой и т. п. Оно имеет скорее характер общей схемы расчета давления газа.

Число частиц с данной компонентой скорости v_x (при произвольных значениях двух других компонент v_y и v_z) в единице объема равно

$$dn_{v_x}=n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}e^{-\alpha v_x^2}dv_x\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{-\alpha\left(v_y^2+v_z^2\right)}dv_y\,dv_z=n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}e^{-\alpha v_x^2}dv_x.$$

Число частиц, находящихся в параллелепипеде, имеющем объем v_x, соответственно равно

$$d\nu=v_x\,dn_{v_x}=n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}e^{-\alpha v_x^2}v_x\,dv_x. \tag{8,1}$$

Это выражение дает число молекул, имеющих данное значение компоненты скорости v_x и достигающих 1 *см*^{2} поверхности стенки за 1 *сек*.

Каждая из $d\nu$ молекул, ударяющихся о стенку, передает ей импульс $2mv_x$, так что за 1 *сек* молекулы с данным значением v_x передают стенке импульс, равный $2mv_x d\nu$. Интегрируя последнее выражение по всем возможным значениям компоненты скорости v_x, мы найдем искомый импульс, передаваемый 1 *см*^{2} поверхности стенки за 1 *сек* всеми ударяющимися об ее поверхность молекулами газа. Переданный за 1 секунду импульс равен, очевидно, силе, действующей на 1 *см*^{2} поверхности, т. е. давлению газа p:

$$p=n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\infty}(2mv_x)\,e^{-\alpha v_x^2}v_x\,dv_x. \tag{8,2}$$

Интегрирование в (8,2) ведется только по положительным значениям v_x, поскольку молекулы с отрицательными значениями компоненты скорости по оси x движутся не к рассматриваемой стенке, а от нее[1]), и дает

$$p=\frac{m}{2\alpha}n, \tag{8,3}$$

или

$$p=\frac{m}{2\alpha}\frac{N}{V}. \tag{8,4}$$

Для определения числового значения α необходимо сопоставить уравнение (8,4) с экспериментальным значением давления достаточно разреженного газа. Последнее дается формулой уравнения состояния

$$pV=NkT.$$

[1]) В выражении (8,2) не учитываются столкновения молекул между собой Однако молекулы, не достигающие стенки, передают свой импульс молекулам, долетающим до стенки.

Сравнивая это выражение с (8,4), мы видим, что параметр α связан с абсолютной температурой T соотношением

$$\alpha = \frac{m}{2kT}. \tag{8,5}$$

Равенство (8,5) подтверждает, что формально введенный нами параметр α является существенно положительной величиной. При определении связи между α и температурой T нам пришлось прибегнуть к данным эксперимента. В дальнейшем нам придется столкнуться с параметром, аналогичным α. Тогда вопрос об определении смысла и значения параметра будет обсужден детальнее. Мы увидим, что смысл параметра α может быть выяснен без непосредственного привлечения данных эксперимента.

Найдем еще число ν ударов молекул об 1 *см*² стенки за 1 *сек*. Формула (8,1) дает число молекул, достигающих стенки за секунду и имеющих скорость между v_x и $v_x + dv_x$. Полное число молекул, ударяющихся об 1 *см*² стенки за 1 *сек*, получается интегрированием (8,1) по всем значениям v_x от нуля до бесконечности. Это дает

$$\nu = n\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha v_x^2} v_x \, dv_x = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}. \tag{8,6}$$

§ 9. Свойства распределения Максвелла

Перепишем теперь распределения Максвелла (7,17) и (7,16), выразив в них параметр α через абсолютную температуру газа:

$$dn_v = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}} dv_x \, dv_y \, dv_z, \tag{9,1}$$

$$dn_v = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \, dv. \tag{9,2}$$

Вместо того чтобы пользоваться распределением частиц газа по состояниям, мы можем ввести эквивалентное ему распределение вероятностей того, что отдельная частица попадает в данное состояние.

Если среднее число молекул в 1 *см*³ газа, имеющих данную скорость, равно dn, а полное число молекул равно n, то, очевидно, вероятность того, что некоторая произвольно выбранная молекула попадает в состояние с данной скоростью, равна

$$dw = \frac{dn}{n}.$$

Поэтому функцию распределения Максвелла можно трактовать как функцию распределения вероятностей того, что отдельная молекула попадает в данное состояние. Последнее характеризуется значениями компонент скоростей v_x, v_y и v_z.

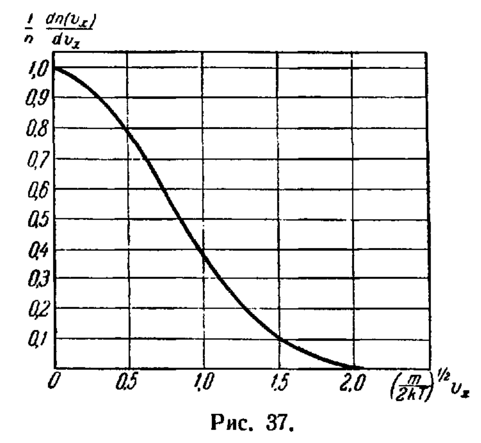


Рис. 37.

На рис. 37 и 38 изображены функции распределения плотности вероятности $\left(\frac{1}{n}\frac{dn_{v_x}}{dv_x}\right.$ и соответственно $\left.\frac{1}{n}\frac{dn_v}{dv}\right)$ по компонентам скорости и абсолютной величине скорости. Поскольку невозможно изобразить графически функцию трех переменных, на рис. 37 по оси ординат отложено значение $\frac{1}{n}\frac{dn_{v_x}}{dv_x}$, а по оси абсцисс — величина $\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} v_x$.

На рис. 38 по оси ординат отложена функция $\frac{1}{n}\frac{dn_v}{dv}$, по оси абсцисс — величина $\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} v$.

Число молекул в газе с очень малыми и очень большими скоростями оказывается сравнительно небольшим. Тем не менее, всегда можно найти известное число очень быстрых и очень медленных молекул. На первый взгляд может показаться странным, что функция распределения по скоростям имеет максимум. Действительно, множитель $e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ экспоненциально убывает с квадратом скорости молекулы. Поэтому число молекул с данной скоростью должно быть тем меньше, чем больше скорость. Однако второй множитель v^2 изменяется в противоположном направлении и растет с ростом скорости. Этот множитель характеризует число состояний молекулы, имеющих

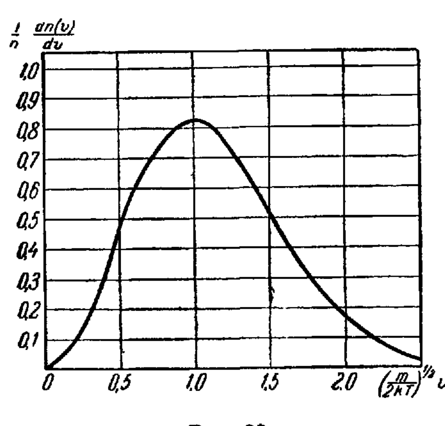


Рис. 38.

скорость, меньшую данной. Конкуренция обоих множителей приводит к появлению максимума в функции распределения.

С ростом температуры распределение становится все более пологим. Это означает, что относительное число молекул с данным большим значением скорости постепенно возрастает. На рис. 39 изображено изменение распределения Максвелла с ростом температуры (для молекул кислорода).

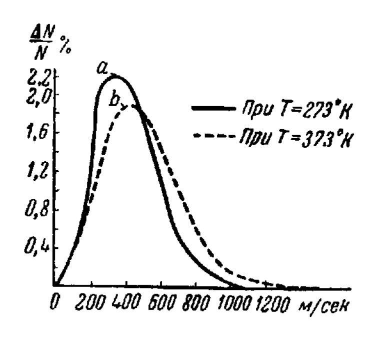


Рис. 39.

Наряду с распределением молекул по скоростям часто приходится пользоваться распределениями по импульсам и энергиям.

Вводя в распределение (7,17) новые переменные

$$p_x = mv_x,\quad p_y = mv_y,\quad p_z = mv_z,$$

находим для числа молекул с данным импульсом

$$dn_p = n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mkT}}\, dp_x\, dp_y\, dp_z. \tag{9,3}$$

Аналогично число молекул с абсолютным значением импульса, лежащим между p и $p + dp$, будет равно

$$dn_p = 4\pi n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-\frac{p^2}{2mkT}}\, p^2\, dp. \tag{9,4}$$

Выражая импульс через энергию молекулы $p = \sqrt{2m\varepsilon}$, получаем для числа частиц с данной энергией ε выражение

$$dn_\varepsilon = n\frac{2}{\sqrt{\pi (kT)^3}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon. \tag{9,5}$$

Экспериментальная проверка распределения Максвелла являлась одной из важнейших задач молекулярной физики. Поэтому было разработано несколько методов измерения распределения скоростей. Самым наглядным из них является опыт, идентичный известному опыту Физо по определению скорости света.

Молекулы, испаряющиеся с поверхности раскаленной нити, пропускаются через систему щелей — линз, образующих узкий молекулярный пучок, летящий в вакууме по направлению к ловушке. На пути пучка устанавливаются два вращающихся диска с прорезями, через которые должен проникнуть пучок. Для того чтобы молекулы, имеющие скорость v_x, могли проникнуть через обе щели при заданной угловой скорости ω враще-

ния дисков и расстоянии l между ними, щели должны быть смещены на угол φ, равный

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{l}{v_x}.$$

Таким образом, каждой скорости v_x при заданной угловой скорости ω отвечает определенный сдвиг дисков на угол φ.

Число частиц в пучке, обладающих данной скоростью, определялось непосредственно по фотометрическому измерению толщины осадка в ловушке, охлаждаемой жидким воздухом.

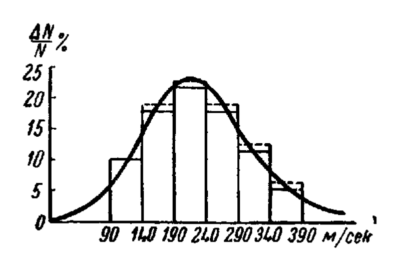


Рис. 40.

После пересчета распределения скоростей в молекулярном пучке на распределение скоростей в изотропных условиях получается гистограмма, изображенная на рис. 40. Кривая на том же рисунке представляет распределение Максвелла (для паров ртути).

Другой весьма точный метод измерения распределения скоростей в молекулярном пучке паров лития, натрия или им подобных газов основан на изучении поведения пучка в магнитном поле, перпендикулярном к направлению движения этого пучка. Он представляет повторение известного опыта Штерна и Герлаха для определения магнитных моментов, но детально не может быть здесь описан (см. ч. V).

§ 10. Вычисление характерных величин

Зная распределения (9,1) и (9,5), можно найти средние значения любых величин, характеризующих свойства газовых молекул. Найдем прежде всего среднее значение какой-либо компоненты скорости, например $\bar{v}_x$. По определению среднего значения

$$\bar{v}_x = \int v_x\,dw = \int v_x \frac{dn_v}{n} =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\,dv_x \times \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\left(v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}}\,dv_y\,dv_z.$$

Интеграл по dv_x, который берется от нечетной функции, равен нулю. Поэтому среднее значение v_x равно нулю:

$$\bar{v}_x = 0.$$

Этот результат является совершенно очевидным. Он показывает, что оба направления движения вдоль оси x являются равновероятными.

Аналогичный результат мы получили бы при вычислении любой другой компоненты скорости.

Найдем теперь среднее значение абсолютной величины скорости. Имеем

$$\bar{v} = \int v \frac{dn_v}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 \, dv =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} = 1,13 \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}. \quad (10,1)$$

В соответствии со сказанным выше средняя скорость молекулы возрастает с ростом температуры. Это возрастание пропорционально корню из абсолютной температуры газа. Мы видим также, что средняя скорость молекул обратно пропорциональна корню квадратному из массы молекулы.

Большой интерес представляет среднее значение кинетической энергии газовой молекулы $\bar{\varepsilon}$. Оно равно, в силу (9,5),

$$\bar{\varepsilon} = \int \varepsilon \frac{dn_\varepsilon}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi (kT)^3}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \varepsilon^{3/2} \, d\varepsilon.$$

При вычислении последнего интеграла нужно ввести новую переменную $x = \sqrt{\varepsilon}$. Простое вычисление приводит к формуле для среднего значения кинетической энергии поступательного движения молекулы:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT. \quad (10,2)$$

Как мы видим, средняя энергия молекулы не зависит от ее природы и пропорциональна температуре газа T. Средняя энергия E всех газовых молекул в сосуде равна сумме энергий поступательного движения всех молекул, поскольку взаимодействие между ними отсутствует:

$$E = N\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} NkT, \quad (10,3)$$

где N — полное число молекул в газе.

Энергия данной порции идеального газа не зависит от объема сосуда и определяется только абсолютной температурой [1]).

---

[1]) Может показаться, что независимость средней энергии газовой молекулы от размеров сосуда противоречит квантовой формуле для энергии (1,11), согласно которой $\varepsilon_n \sim \frac{1}{a^2}$, где a — линейный размер сосуда. Нужно, однако, помнить, что средняя энергия определяется интегралом от произведения энергии на число квантовых состояний. Последнее согласно (1,24) пропорционально $\Omega(\varepsilon)\,\Delta\varepsilon \sim V\sqrt{\varepsilon}\,\Delta\varepsilon \sim a^3 \frac{\Delta\varepsilon}{a} \sim a^2\,\Delta\varepsilon$. Это приводит к независимости энергии от объема.

Мы будем отождествлять эту среднюю энергию механического движения молекул газа с макроскопической тепловой энергией. В связи с этим абсолютную температуру мы должны с кинетической точки зрения трактовать как величину, характеризующую среднюю энергию движения молекул. В настоящее время такая трактовка является единственно возможной. В следующей главе мы подробно остановимся на обсуждении этих утверждений.

Полученные выражения для средней энергии отдельной молекулы и газа в целом могут быть интерпретированы следующим образом. Каждая молекула имеет три степени свободы, и ее движение может быть разложено на движение в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В силу равноправия всех направлений в пространстве средняя энергия движения в каждом направлении должна быть одинаковой. Таким образом, формула (10,2) означает, что на каждую степень свободы в среднем приходится энергия, равная $\frac{1}{2}kT$. Это утверждение является частным случаем весьма общего закона о равномерном распределении энергии по степеням свободы. В § 39 мы подробно обсудим этот закон и укажем границы его применимости.

Представляет интерес установить связь между энергией газа ε и его давлением p.

Записав выражение (8,2) в виде

$$p = 2n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\int_0^\infty e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\left(mv_x^2\right)dv_x =$$

$$= \frac{4n}{3}\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{mv_x^2}{2}e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}dv_x\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\left(v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}}dv_y\,dv_z + \right.$$

$$+\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{mv_y^2}{2}e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}}dv_y\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_z^2\right)}{2kT}}dv_x\,dv_z +$$

$$\left.+\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty \frac{mv_z^2}{2}e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}dv_z\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2\right)}{2kT}}dv_x\,dv_y\right] =$$

$$= \frac{2n}{3}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{mv^2}{2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv_x\,dv_y\,dv_z =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{N}{V}\left(\overline{\frac{mv^2}{2}}\right) = \frac{2}{3}\frac{N\bar{\varepsilon}}{V} = \frac{2}{3}\frac{E}{V}, \qquad (10,4)$$

мы видим, что давление идеального газа оказывается численно равным $^2/_3$ от кинетической энергии поступательного движения молекул газа, находящихся в единице объема.

Наконец, найдем скорость молекул газа $v_{\text{н. в}}$, при которой максвелловское распределение имеет максимум, т. е. наиболее вероятную скорость. Для нахождения ее ищем максимум функции распределения, который определяется из условия

$$\frac{d}{dv}\left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\right) = 0.$$

Легко находим

$$v_{\text{н. в}} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}. \tag{10,5}$$

Сравнивая (10,5) с (10,1), мы видим, что средняя скорость молекул на 13% больше наиболее вероятной.

Часто вводят также понятие о средней квадратичной скорости $\sqrt{\overline{v^2}}$, характеризующей энергию газовых молекул. В силу (10,2) эта величина равна

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} = 1{,}22\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}. \tag{10,6}$$

Средняя квадратичная скорость на 22% больше наиболее вероятной. Это вполне естественно, так как вклад быстрых молекул в энергию должен быть больше, чем вклад медленных.

§ 11. Столкновения молекул между собой

Рассмотрим две молекулы, движущиеся в идеальном газе со скоростями v_1 и v_2. Очевидно, что для столкновения этих молекул друг с другом абсолютные величины и направления скоростей сами по себе не играют роли. Важно лишь, как происходит движение одной молекулы по отношению к другой. Если, например, обе молекулы движутся по прямой одна вслед за другой, то столкновение в единицу времени произойдет в том случае, если вторая молекула успеет за 1 секунду «догнать» первую молекулу. Скорости движения обеих молекул в пространстве по отношению к стенкам сосуда не играют роли.

Таким образом, при решении вопроса о столкновениях нужно рассмотреть их относительное движение. В § 42 ч. I было показано, что движение двух частиц можно всегда разложить на движение в пространстве общего центра тяжести и их относительное движение.

Напишем вероятность того, что первая молекула имеет скорость $\mathbf{v}_1$, а вторая $\mathbf{v}_2$, в виде

$$dw_{12} = dw_1\,dw_2 = \left(\frac{m_1}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_1v_1^2}{2kT}}\,d\mathbf{v}_1\left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_2v_2^2}{2kT}}\,d\mathbf{v}_2.$$

Перейдем от переменных v_1 и v_2 к новым переменным $\dot{\boldsymbol{R}}$, $v_{\text{отн}}$, пользуясь формулами (42,4) ч. I. Тогда имеем

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = M\dot{R}^2 + \mu v_{\text{отн}}^2,$$

$$d\boldsymbol{v}_1\, d\boldsymbol{v}_2 = |I|\, d\dot{\boldsymbol{R}}\, dv_{\text{отн}},$$

где $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведенная масса, $M = m_1 + m_2$ и $|I|$ означает модуль якобиана преобразования от v_1, v_2 к $\dot{\boldsymbol{R}}$, $v_{\text{отн}}$:

$$|I| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial \boldsymbol{v}_{\text{отн}}} & \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \boldsymbol{v}_{\text{отн}}} & \frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{m_2}{m_1+m_2} & 1 \\ -\frac{m_1}{m_1+m_2} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом,

$$dw_{12} = \left(\frac{m_1m_2}{2\pi(m_1+m_2)kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2kT}} \times$$

$$\times\, d\boldsymbol{v}_{\text{отн}} \left(\frac{m_1+m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{M\dot{R}^2}{2kT}}\, d\dot{\boldsymbol{R}} = dw_{\text{отн}}\, dw_{\text{ц. и}}.$$

Мы видим, что вероятность данного состояния движения двух частиц равна произведению вероятностей двух независимых событий — вероятности того, что частицы имеют данную относительную скорость:

$$dw_{\text{отн}} = \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2kT}}\, dv_{\text{отн}}, \tag{11,1}$$

и вероятности того, что центр инерции системы из двух частиц движется в пространстве с данной скоростью:

$$dw_{\text{ц. и}} = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{M\dot{R}^2}{2kT}}\, d\dot{\boldsymbol{R}}.$$

В проблеме столкновений интерес представляет только первая вероятность. В случае частиц с равной массой $\mu = \frac{m}{2}$, так что

$$dw_{\text{отн}} = \left(\frac{m}{4\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m v_{\text{отн}}^2}{4kT}}\, d\boldsymbol{v}_{\text{отн}}. \tag{11,2}$$

С помощью распределения вероятностей (11,2) можно найти среднее значение скорости относительного движения $\bar{v}_{\text{отн}}$:

$$\bar{v}_{\text{отн}} = 4\pi\left(\frac{m}{4\pi kT}\right)^{3/2}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{mv_{\text{отн}}^2}{4kT}}\, v_{\text{отн}}^3\, dv_{\text{отн}} = \sqrt{2}\bar{v}. \qquad (11,3)$$

Таким образом, средняя скорость относительного движения почти в полтора раза превышает среднюю скорость теплового движения.

Найдем теперь число столкновений, испытываемых в единицу времени молекулой в газе, имеющем плотность n. Мы будем предполагать, что газ является настолько разреженным, что молекулы сталкиваются попарно, и можно пренебречь столкновениями, при которых одновременно приходят в непосредственный контакт три и более молекул. Процесс соударения молекул можно характеризовать их эффективным сечением σ.

Рассматривая соударения между молекулами газа, будем считать, что все молекулы газа, кроме одной, неподвижны. Выделенная молекула движется по отношению к неподвижным со скоростью $v_{\text{отн}}$. Она проходит в единицу времени путь $v_{\text{отн}}$ и сталкивается со всеми частицами, лежащими в цилиндре объемом $\sigma v_{\text{отн}}$. Число таких столкновений равно, очевидно, $\sigma v_{\text{отн}} dn_{v_{\text{отн}}}$, где $dn_{v_{\text{отн}}} = n\, dw_{\text{отн}}$ и $dw_{\text{отн}}$ дается формулой (11,2).

Полное число соударений, испытываемых молекулой в единицу времени, получается интегрированием этого выражения по всем возможным значениям $v_{\text{отн}}$:

$$\nu = \int \sigma v_{\text{отн}}\, dn_{v_{\text{отн}}} = 4\pi\left(\frac{m}{4\pi kT}\right)^{3/2} n \int\limits_0^\infty \sigma(v_{\text{отн}})\, e^{-\frac{mv_{\text{отн}}^2}{4kT}}\, v_{\text{отн}}^3\, dv_{\text{отн}}. \qquad (11,4)$$

Если эффективное сечение столкновения можно считать не зависящим от скорости, то вместо (11,4) получаем

$$\nu = 4\pi\left(\frac{m}{4\pi kT}\right)^{3/2} n\sigma \int\limits_0^\infty e^{-\frac{mv_{\text{отн}}^2}{4kT}}\, v_{\text{отн}}^3\, dv_{\text{отн}} =$$

$$= n\sigma\bar{v}_{\text{отн}} = n\sigma\sqrt{2}\,\bar{v} = 4n\sigma\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}. \qquad (11,5)$$

Это и есть число столкновений, испытываемых молекулой в секунду.

§ 12. Длина свободного пробега

Найдем теперь средний путь, проходимый молекулой между двумя последовательными соударениями, именуемый средней длиной свободного пробега.

За одну секунду молекула проходит в пространстве путь, равный в среднем $\bar{v}$. При этом она испытывает ν столкновений. Средняя длина пути между столкновениями равна

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu} = \frac{\bar{v}}{n\sigma\bar{v}_{\text{отн}}} = \frac{1}{n\sigma\sqrt{2}}. \qquad (12,1)$$

Длина пробега λ в среднем пропорциональна отношению среднего пути, проходимого в единицу времени молекулой, к числу испытываемых ею соударений. Поэтому величину λ именуют средней длиной свободного пробега. Средняя длина свободного пробега λ оказывается обратно пропорциональной плотности газа n и эффективному сечению σ.

Формула (12,1) дает среднюю длину свободного пробега. Часто, однако, важно знать, какова вероятность того, что молекула пройдет произвольный путь x, не испытав ни одного столкновения. Иными словами, представляет интерес закон распределения вероятностей для пробега молекул. Обозначим через $w(x)$ вероятность того, что молекула пролетит расстояние x, не испытав ни одного столкновения.

Соответственно $w(x+dx)$ представляет вероятность того, что молекула пролетит путь $(x+dx)$, не испытав ни одного соударения.

Прохождение пути $x+dx$ представляет сложное событие, состоящее из двух независимых этапов: пролета пути x без столкновений и последующего пролета пути dx также без столкновений.

Поскольку эти события являются независимыми, можно написать

$$w(x+dx) = w(x)\,w(dx). \qquad (12,2)$$

Последнюю вероятность удобно переписать в другом виде. Очевидно, что вероятность $w(dx)$ того, что на бесконечно малом пути dx молекула испытает соударение, пропорциональна длине dx и может быть представлена в виде $a\,dx$, где a — некоторый коэффициент пропорциональности. Вероятность того, что молекула пролетит путь dx без столкновений, равна

$$w(dx) = 1 - w(dx) = 1 - a\,dx.$$

Подставляя это в (12,2), находим

$$w(x+dx) = w(x)\,(1 - a\,dx). \qquad (12,3)$$

Разлагая $w(x+dx)$ в ряд по степеням dx и ограничиваясь бесконечно малыми величинами первого порядка малости, имеем

$$w(x+dx) = w(x) + \frac{dw}{dx}dx,$$

откуда, подставляя в (12,3), получаем

$$dw = -aw(x)dx.$$

Интегрируя, находим

$$w(x) = Ae^{-ax}.$$

Для определения произвольной постоянной A заметим, что вероятность того, что молекула пролетит как угодно малый путь без столкновений, равна единице:

$$w(x \to 0) = 1.$$

Отсюда следует, что $A = 1$ и окончательно

$$w(x) = e^{-ax}. \qquad (12,4)$$

Для определения смысла постоянной величины a найдем среднюю длину свободного пробега λ, пользуясь формулой (12,4).

По определению, средняя длина свободного пробега λ равна

$$\lambda = \int_0^\infty x\,dP, \qquad (12,5)$$

где dP — вероятность того, что молекула, пройдя без столкновений путь x, испытает соударение на отрезке x, $x+dx$. Согласно предыдущему можно написать

$$dP = w(x)w(dx) = w(x)a\,dx = ae^{-ax}dx. \qquad (12,6)$$

Подставляя значение dP в (12,5), находим

$$\lambda = a\int_0^\infty xe^{-ax}dx = \frac{1}{a}. \qquad (12,7)$$

Таким образом, постоянная a оказывается величиной, обратной средней длине свободного пробега.

Формулу (12,4) для вероятности того, что молекула пролетит путь x, не испытав ни одного соударения, можно переписать в виде

$$w(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}}. \qquad (12,8)$$

Эта вероятность оказывается экспоненциально убывающей функцией расстояния. Подчеркнем, что $w(x)$ дает вероятность

пролета молекулой пути x без столкновений, независимо от того, в каком месте она испытала последнее соударение. Это означает, что расстояние x отсчитывается от произвольной точки, а не от места последнего соударения.

Вероятность того, что молекула пролетит путь без соударения и столкнется на участке x, $x + dx$, согласно (12,6) и (12,7), равна

$$dP = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx. \qquad (12,9)$$

Формула (12,8) важна для экспериментального определения средней длины свободного пробега молекул в газе. Представим себе узкий направленный пучок молекул, выходящий в некоторый откачанный до сравнительно низкого давления сосуд, содержащий охлаждаемую пластинку, помещаемую на пути пучка на расстояниях x_1 и x_2 от входного отверстия. Молекулы, пролетевшие пути x_1 и x_2 без соударений, будут достигать пластинки, образуя на ней осадок. Отношение числа частиц, осевших на пластинке в обоих положениях, равно, согласно (12,8),

$$\frac{N(x_1)}{N(x_2)} = \frac{e^{-\frac{x_1}{\lambda}}}{e^{-\frac{x_2}{\lambda}}}. \qquad (12,10)$$

Измеряя числа $N(x_1)$ и $N(x_2)$ и считая приближенно, что λ одинакова для всех молекул в пучке, с помощью (12,10) можно определить λ.

В соответствии с требованиями теории, λ оказывается обратно пропорциональной плотности или, что то же самое, давлению газа. По порядку величины λ составляет около 10 *см* при $p \sim 10^{-3}$ *мм* ртутного столба и около 10^{-5} при атмосферном давлении.

ГЛАВА III

СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

§ 13. Квазинезависимые системы

Рассмотрим некоторую макроскопическую систему, состоящую из весьма большого числа частиц. Мы будем предполагать, что движение всех частиц определяется законами квантовой механики; состояние каждой частицы характеризуется некоторыми квантовыми числами. Разделим всю нашу систему на большое число частей так, чтобы взаимодействие между этими частями было весьма слабым и им можно было в первом приближении пренебречь. Мы будем называть всю изучаемую систему собранием ее почти независимых частей.

Такие слабо взаимодействующие между собой части системы движутся в первом приближении независимо друг от друга. Однако взаимодействие, существующее между ними, приводит к тому, что фактически движение одной из частей влияет на движение другой, и полной независимости между ними не существует. Мы будем называть в дальнейшем слабо взаимодействующие части большой системы квазинезависимыми подсистемами, или просто подсистемами.

Остановимся прежде всего на вопросе о том, когда подсистемы, образующие большую систему, можно считать квазинезависимыми.

Очевидно, что подсистемы являются квазинезависимыми, если энергия их взаимодействия в среднем мала по сравнению с энергией каждой из подсистем. Это означает, что если в некоторых случаях взаимодействие между подсистемами может быть достаточно большим, то при этом длительность взаимодействия должна быть настолько малой, что подавляюще большой промежуток времени движения они проводят, совсем не взаимодействуя друг с другом.

В качестве примера такого рода подсистем можно привести молекулы идеального газа, которые лишь изредка и на очень короткий промежуток времени вступают в сильное взаимодействие друг с другом.

В других случаях между подсистемами может происходить непрерывное, но слабое взаимодействие. Представим себе, например, что каждая из подсистем, входящих в систему, содержит очень большое число частиц (атомов или молекул) и является, таким образом, макроскопической системой. Тогда полная энергия подсистемы, слагающаяся из энергий движения отдельных частиц, будет пропорциональна полному числу частиц, входящих в подсистему. Число частиц будет в свою очередь пропорционально объему рассматриваемой подсистемы. Взаимодействие между различными подсистемами обусловлено главным образом силами молекулярного взаимодействия между молекулами, находящимися на поверхности каждой из взаимодействующих подсистем[1]). Силы молекулярного взаимодействия так быстро убывают с расстоянием, что вклад в энергию взаимодействия, вносимый взаимодействием молекул, находящихся в глубине подсистем, мал по сравнению с вкладом поверхностных молекул. Поэтому энергия взаимодействия между подсистемами пропорциональна числу молекул, находящихся на их поверхности, т. е. величине самой поверхности.

Таким образом, энергия подсистемы $\bar{\varepsilon}$ пропорциональна R^3, где R — характерный линейный размер системы, а энергия взаимодействия $\bar{\varepsilon}_{\text{вз}} \sim R^2$. Их отношение

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\text{вз}}}{\bar{\varepsilon}} \sim \frac{R^2}{R^3} \sim \frac{1}{R} \sim N^{-\frac{1}{3}}$$

делается достаточно малым при достаточно большом N.

Энергию всего собрания квазинезависимых систем можно считать равной сумме энергий отдельных частей, т. е.

$$E \approx \sum \varepsilon_i, \qquad (13,1)$$

где знак $\approx$ подчеркивает тот факт, что при написании (13,1) мы пренебрегли энергией взаимодействия между подсистемами, образующими собрание (ансамбль). Суммирование (в 13,1) ведется по всем частям системы (подсистемам).

§ 14. Статистическое распределение

Мысленно выделим из всей системы одну выбранную подсистему. Эта подсистема состоит из некоторого числа молекул

---

[1]) Мы нигде не будем учитывать гравитационного взаимодействия, связанного с притяжением по закону всемирного тяготения, поскольку оно является весьма слабым и не играет никакой роли в молекулярных процессах. Нужно, однако, заметить, что при изучении макроскопических свойств вещества в астрофизических проблемах гравитационное поле в ряде случаев имеет весьма существенное значение и должно обязательно учитываться.

(как мы только что пояснили, оно может быть и большим и малым, в зависимости от конкретного характера тех подсистем, из которых построена система), движущихся по законам квантовой механики. Энергия нашей подсистемы не является строго постоянной, а, наоборот, все время изменяется в пределах величины $\varepsilon_{вз}$, где $\varepsilon_{вз}$ — энергия взаимодействия системы с ее окружением. Хотя $\varepsilon_{вз}$ — весьма малая величина и ею можно пренебречь в балансе энергии, тем не менее эта энергия взаимодействия играет очень существенную роль в поведении системы. Взаимодействие подсистемы с окружающими ее телами служит причиной переходов ее из одних квантовых состояний в другие. Это взаимодействие имеет чрезвычайно сложный и запутанный характер. Уже в простейшем случае, когда в качестве подсистем фигурировали отдельные молекулы, мы видели, что попытка определить движение каждой молекулы, т. е. последовательность изменения состояний, представляет огромные трудности. В газе, состоящем из очень большого числа частиц, проявлялись новые закономерности, кратко сформулированные нами в виде положения о молекулярном хаосе. Совершенно аналогично обстоит дело и в общем случае макроскопической системы, состоящей из большого числа квазинезависимых подсистем. Взаимодействие между подсистемами является настолько сложным, что точное определение состояния каждой из систем становится задачей еще более трудной, чем нахождение движения отдельных молекул в газе. Вместе с тем, такое определение теряет всякий физический смысл. Действительно, если бы мы даже сумели определить, в каком состоянии находится некоторая подсистема в данный момент времени, через весьма короткое время в результате взаимодействия с другими подсистемами она перейдет в другое состояние. Поэтому состояние единичной подсистемы, входящей в большое собрание систем, известное в некоторый момент времени, не характеризует состояния всего собрания, подобно тому как скорость отдельной газовой молекулы еще не характеризует свойств газа как целого. В связи с этим мы заранее отказываемся от описания поведения отдельной подсистемы и будем искать статистические законы, характеризующие поведение всего собрания подсистем в целом. Это означает, что мы не будем пытаться детально проследить за последовательным изменением состояния отдельной подсистемы с течением времени, а будем стремиться найти вероятность w_i того, что одна произвольно выделенная из собрания подсистема попадет в некоторое i-е состояние. Если это распределение вероятности будет нами найдено, то мы сможем:

1) найти среднее число подсистем, находящихся в данном состоянии, если нам задано собрание, состоящее из N одинаковых подсистем (например, число молекул, находя-

щихся в данном состоянии, если подсистеме соответствует отдельная газовая молекула);

2) найти среднее значение любой величины, характеризующей состояние отдельной системы, например ее энергии, по общим правилам, изложенным в § 4;

3) найти отклонения величин от их средних значений, характеризующиеся средней квадратичной флуктуацией.

При этом к макроскопической квазинезависимой подсистеме, состоящей в свою очередь из очень большого числа частиц, мы можем применить общие статистические рассуждения § 5. Последние показывают, что в такой системе все величины имеют значения, очень мало отличающиеся от своих средних значений. Поэтому если нам известны последние, то мы можем считать, что с огромной степенью точности нам известны истинные значения всех величин, характеризующих состояние подсистемы.

Мы видим, таким образом, что постановка вопроса в статистической физике в принципе ничем не отличается от постановки вопроса в кинетической теории газов. Мы исследуем статистические закономерности, проявляющиеся в системах, состоящих из очень большого числа частиц. Зная эти закономерности, мы можем вычислять средние значения всевозможных величин. Поскольку однако, интересующие нас объекты являются макроскопическими телами, состоящими из весьма большого числа частиц, вероятностные предсказания, полученные из статистических закономерностей, приобретают вполне достоверный характер. Средние значения всех величин совпадают с истинными с большой степенью точности.

Однако наряду с этим сходством между общей постановкой вопроса в статистической физике и кинетической теории газов между ними имеется и очень существенное различие. В кинетической теории газов отдельной квазинезависимой системой всегда являлась молекула разреженного газа. При этом молекула считалась одноатомной, поскольку рассматривалось только ее поступательное движение. Газ в целом соответствовал нашему собранию систем. В статистической физике вопрос ставится гораздо шире. Отдельной подсистемой может быть любая квазинезависимая система. Это может быть и та же одноатомная молекула в разреженном газе и многоатомная молекула, совершающая не только поступательное, но и вращательное и колебательное движения. Подсистемой может являться также весь газ, как целое, заключенный в некоторый сосуд. Стенки этого сосуда и окружающие тела играют роль других систем, с которыми газ в сосуде (квазизамкнутая система) слабо взаимодействует и обменивается энергией. Газ, стенки сосуда

и окружающие тела образуют собрание подсистем. Подсистемой может являться, например, твердое тело, содержащее достаточно большое число частиц. Окружающие его тела играют роль остальных частей собрания.

Таким образом, идеальный газ, рассматриваемый в кинетической теории газов, является частным и самым простым случаем общей статистической системы.

В предыдущей главе мы выполнили частично программу, намеченную нами в начале этого параграфа для частного случая идеального газа. Мы видели, что стационарное распределение плотности вероятностей различных состояний молекулы в газе устанавливается благодаря взаимодействию между молекулами в газе при столкновениях.

Точно так же в более общем случае собрания произвольных квазинезависимых систем, благодаря существующему слабому взаимодействию между ними, установится некоторое распределение вероятностей попадания подсистемы в определенное энергетическое состояние ε_i. В следующих параграфах будет дан вывод статистического распределения вероятностей для произвольной подсистемы.

§ 15. Вероятность состояний системы

Последим мысленно за изменениями состояния произвольно выделенной нами подсистемы. Все остальные части системы, составляющие окружение этой подсистемы, мы будем именовать для краткости термостатом. Смысл такого названия будет ясен из дальнейшего. Саму же подсистему, там, где это не оговорено, будем именовать для краткости просто системой. Каждое состояние системы характеризуется набором квантовых чисел. Если система имеет f степеней свободы, то ее состояние характеризуется набором f квантовых чисел.

Каждому набору квантовых чисел отвечает некоторая вполне определенная энергия системы[1]. Если система состоит из большого числа частиц и имеет очень много степеней свободы, отдельные уровни энергии, отвечающие различным, но близким между собой набором квантовых чисел, лежат очень близко друг к другу. В пределе, когда число частиц очень велико, так что система является макроскопической, мы переходим от квантовой к классической системе[2]. При этом все уровни энергии сливаются в сплошной энергетический спектр, и вместо дискрет-

---

[1] В дальнейшем мы остановимся более подробно на этом вопросе и учтем такой случай, когда нескольким значениям квантовых чисел отвечает одна и та же энергия, — случай вырожденных систем.

[2] Более точно вопрос о переходе к классическим системам будет рассмотрен в ч. V.

ных уровней можно пользоваться непрерывно изменяющейся энергией классической теории.

Энергия системы, как мы уже подчеркивали, благодаря взаимодействию с окружением не является постоянной. Поэтому не имеет смысла говорить о строго определенной энергии системы, а следует указывать, что ее энергия заключена в пределах между ε и $\varepsilon + \delta\varepsilon$. Значениями энергии системы, лежащим в пределах ε и $\varepsilon+\delta\varepsilon$, отвечает известное число квантовых состояний $\Omega(\varepsilon)\delta\varepsilon$. Мы будем часто называть $\Omega(\varepsilon)$ числом квантовых состояний, отвечающих энергии системы ε, или кратностью вырождения данного состояния. Это не должно привести к недоразумениям. В действительности при этом будет подразумеваться приведенное выше определение. Очевидно, что различным значениям энергии ε отвечает разное число квантовых состояний $\Omega(\varepsilon)$. Оно различно также у разных физических систем.

В случае, когда системой является отдельный атом или молекула, число квантовых состояний, отвечающих данной энергии, мало́ при малых энергиях возбуждения, но быстро растет с ростом энергии. Если системой является макроскопическое тело, всегда имеется практически непрерывный спектр энергий.

В дальнейшем мы используем выведенное в гл. I фактическое значение $\Omega(\varepsilon)$ для простейших систем.

В результате сложного и беспорядочного взаимодействия между системой и ее окружением (термостатом) состояния системы будут изменяться и она будет переходить из одних квантовых состояний в другие. При этом система будет совершать переходы как между различными состояниями, отвечающими данному значению энергии ε (точнее, отвечающими энергии, заключенной в пределах ε, $\varepsilon+\delta\varepsilon$), так и между состояниями с различными энергиями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$

Например, в случае подсистемы — отдельной молекулы — столкновения с другими молекулами и стенкой сосуда, образующими термостат, приводят к переходам в другие состояния с той же энергией (изменения направления полета) или в состояния с другой энергией, — неупругие соударения или упругие столкновения со сравнительно большой передачей импульса.

Если проследить за изменением системы в течение достаточно большого промежутка времени, то она побывает во всевозможных состояниях. Состояние системы в данный момент времени не будет зависеть ни от ее начального состояния, ни от начального состояния термостата. Влияние начальных условий будет совершенно затушевано сложными и запутанными переходами, взаимодействиями и т. п. Поэтому мы можем утверждать, что состояние системы в каждый момент времени будет определяться сложнейшей картиной хаотического взаимодействия между системой и ее окружением.

Если фиксировать сначала внимание на переходах между различными состояниями, принадлежащими к данному значению энергии (между ε и $\varepsilon+\delta\varepsilon$), то физически представляется очевидным, что все эти состояния равноправны между собой и никаких преимуществ одно из них перед другим иметь не может. Равноправность состояний системы, принадлежащих к данной энергии, является обобщением положения о молекулярном хаосе в идеальном газе. Действительно, последнее означало, что все состояния с одинаковой энергией, но различными направлениями движения в пространстве и положениями в сосуде являются в идеальном газе равновероятными.

Если проследить за системой достаточно долго, то, поскольку все состояния с данной энергией равноправны, она побывает во всех этих состояниях, независимо от того, в каком из них она находилась в начальный момент. Более того, поскольку переход систем из одного состояния в другое совершается в результате случайных возмущений и воздействия со стороны ее окружения, а все квантовые состояние, принадлежащие к данной энергии, совершенно равноправны, можно сказать, что система будет иметь равный шанс попасть в каждое из них. Поэтому время, в течение которого система находится в каждом из квантовых состояний, принадлежащих к данной энергии, является одинаковым для всех этих состояний. Обычно для характеристики состояния указывается не самый промежуток времени, в течение которого система в нем находится, а отношение этого времени ко всему времени наблюдения, т. е. вероятность осуществления данного состояния. Тогда предыдущее утверждение можно кратко сформулировать в виде следующего принципа: все квантовые состояния квазизамкнутой системы, принадлежащие к данной энергии (лежащей между ε и $\varepsilon+\delta\varepsilon$), являются равновероятными. Это утверждение носит название закона равновероятности элементарных квантовых состояний.

Вопрос о том, действительно ли макроскопическая система может побывать во всех без исключения состояниях с данной энергий, являлся предметом обсуждения физиков и математиков в течение целого ряда лет.

Системы, могущие в течении достаточно большого промежутка времени побывать в любом состоянии данной энергии, получили название эргодных систем. Если в начальный момент времени эргодная система находится в некотором состоянии, то рано или поздно она попадет в любое другое, заранее выбранное состояние из данной группы состояний (эргодическая гипотеза). Хотя это предположение кажется весьма правдоподобным, его доказательства не существует. Трудности, возникающие в связи с этой гипотезой, обходятся в квантовой статистике путем рассмотрения идеализированных систем, у которых пере-

ходы в некоторые из состояний не осуществляются в силу правил запрета. Под правилами запрета понимаются некоторые ограничения возможности переходов, происходящих от разнообразных причин, в которые мы не можем здесь вникать[1]). Тогда все микроскопические состояния можно разделить на две группы — такие состояния, между которыми возможны переходы, и состояния, в которые системы из состояний первой группы попасть не могут. Если вторая группа состояний действительно совершенно запрещена, то состояния этой группы при рассмотрении свойств системы можно считать вообще не существующими. Наоборот, во всех состояниях первой группы система рано или поздно побывает.

В действительности подобных идеализированных систем в природе не существует. Между любыми состояниями системы возможны и более или менее вероятны переходы. Вероятности этих переходов могут быть различными и отличаться друг от друга очень существенно. Представим себе, например, что мы рассматриваем систему, состоящую из атомов, могущих находиться в различных состояниях и взаимодействовать между собой. Тогда принципиально не исключено, что в результате этого взаимодействия в системе произойдут самые разнообразные процессы, если только они не противоречат основным законам движения; например, часть атомов может получить энергию от других атомов и перейти в ионизованное состояние. Однако подобные процессы происходят со столь ничтожной вероятностью и идут поэтому так медленно, что при рассмотрении поведения системы в течение любого практически осуществляемого в земных условиях промежутка времени возможность этих процессов мы вправе полностью игнорировать.

Ту же мысль можно выразить следующими словами: переход системы в состояние, соответствующее оголенным ядрам и свободным электронам, является запрещенным и следует рассматривать только состояния системы, состоящей из атомов.

Поскольку нашей целью является вычисление средних значений, а вклад в них маловероятных состояний весьма мал, мы не совершим заметной ошибки, если будем полностью игнорировать возможные (но маловероятные) переходы в запрещенные состояния. Если принять, что между остальными незапрещенными состояниями возможны любые переходы и система побывает за достаточно большой промежуток времени во всех этих состояниях (в таком ограниченном виде эргодная гипотеза представляется физически достаточно убедительной), то принцип равной вероятности всех микроскопических состояний можно пояснить следующими рассуждениями.

---

[1]) См. ч. V, § 106.

Предположим, что имеется система, состоящая из частиц, могущих находиться в состояниях 1, 2, . . ., i, . . . с одной и той же энергией. Обозначим через N_i число частиц в i-м состоянии, а через N_k — число частиц в k-м состоянии. Пусть, далее, w_{ik} — вероятность перехода частицы из i-го состояния в k-е. Эта вероятность может быть вычислена по законам квантовой механики. Наконец, пусть w_{ki} — вероятность перехода из k-го состояния в i-е.

В квантовой механике показывается, что все процессы, происходящие с отдельными микроскопическими частицами, являются строго обратимыми, так что вероятности прямого перехода w_{ik} и обратного перехода w_{ki} всегда равны между собой [1]. Это — так называемый принцип микроскопической обратимости. Число частиц, переходящих из i-го в k-е состояние в единицу времени, равно, очевидно, числу частиц N_i, находящихся в i-м состоянии, умноженному на вероятность перехода w_{ik}. Число обратных переходов равно соответственно $N_k w_{ki}$. В стационарном состоянии число прямых и обратных переходов должно быть одинаковым, так как система должна оставаться в среднем в неизменном состоянии:

$$N_i w_{ik} = N_k w_{ki}, \tag{15,1}$$

но в силу принципа микроскопической обратимости $w_{ik} = w_{ki}$, откуда следует, что $N_i = N_k$.

Это рассуждение может быть распространено на все остальные состояния, между которыми имеются переходы (т. е. $w_{ik} \neq 0$). При этом оказывается, что все числа частиц во всех состояниях должны быть равны между собой, а следовательно, все квантовые состояния равновероятны.

Если обратиться теперь к переходам между состояниями системы с различной энергией (точнее, с энергией, отличающейся на величину, много бо́льшую, чем энергия взаимодействия $\varepsilon_{вз}$), то можно утверждать, что благодаря незамкнутому характеру системы она имеет возможность совершать и эти переходы.

При переходах в состояния с большей энергией нехватка энергии будет черпаться системой от ее окружения; при переходах в состояния с меньшей энергией избыток энергии будет передаваться этому окружению. Принципиальная возможность таких переходов обеспечивается существованием взаимодействия. Именно взаимодействие является причиной переходов системы из одних состояний в другие. Эти рассуждения являются обобщением принципа молекулярного хаоса, которым мы пользовались в кинетической теории газов. Нужно, однако, подчеркнуть, что приведенное рассуждение является скорее физически

---

[1] См. ч. V, § 56.

правдоподобным, чем строго обоснованным. Поэтому эргодная гипотеза должна быть принята как некоторый постулат, справедливость которого доказывается сравнением теории с опытом. Во всяком случае для статистики достаточно, чтобы эта гипотеза выполнялась приближенно для большинства состояний.

§ 16. Распределение Гиббса

Поставим теперь вопрос о том, какова вероятность w_i найти нашу систему в состояниях с энергией, заключенной между ε_i и $\varepsilon_i+\delta\varepsilon_i$ (где $\delta\varepsilon_i \ll \varepsilon_i$ и индекс i пробегает ряд значений 1, 2, 3, ...). Каждому значению энергии ε_i отвечает некоторая группа $\Omega(\varepsilon_i)$ квантовых состояний.

Рассмотрим прежде всего случай замкнутой системы, которая не взаимодействует с окружающими телами. В действительности в природе не может существовать совершенно замкнутых систем. Какова бы ни была физическая природа системы, она всегда, хотя бы и очень слабо, взаимодействует с окружающими ее телами. В квантовой механике показывается, что при этом система может иметь строго постоянную энергию только тогда, когда она находится в основном состоянии (что для макроскопической системы отвечает состоянию при абсолютном нуле; см. § 34 ч. V).

Под замкнутой системой мы поэтому условно будем понимать такую систему, энергия которой за все время наблюдения остается заключенной в заданных узких пределах $\delta\varepsilon_i$.

Поскольку все состояния с данной энергией равновероятны, вероятность того, что замкнутая система находится в одном из состояний с данной энергией, будет просто пропорциональна числу состояний с данной энергией:

$$w(\varepsilon_i) \sim \Omega(\varepsilon_i). \tag{16,1}$$

Формула (16,1) получила название микроканонического распределения Гиббса. Микроканоническое распределение показывает, что вероятность нахождения замкнутой системы в одном из состояний с данной энергией пропорциональна кратности его вырождения.

Микроканоническое распределение Гиббса является принципиальной основой статистической физики. Оно показывает, что замкнутая система находится с большей вероятностью в таком состоянии, которое имеет бо́льшую кратность вырождения.

В фазовом пространстве состояния замкнутой системы, лежащие в узком интервале $\delta\varepsilon$, образуют весьма тонкий слой, который при $\delta\varepsilon \to 0$ вырождается в поверхность постоянной энергии. Каждому возможному квантовому состоянию отвечает клетка в слое (поверхности) постоянной энергии.

В виде примера применения микроканонического распределения рассмотрим систему из N невзаимодействующих между собой частиц, могущих находиться в двух различных состояниях. Для определенности мы будем говорить о частицах со спином половина (в единицах $\frac{h}{2\pi}$). При этом проекция спина каждой частицы на произвольную ось может принимать два значения: $s_{\uparrow}=\frac{1}{2}$ и $s_{\downarrow}=-\frac{1}{2}$. Условно мы будем называть эти спины направленными соответственно вверх и вниз. В отсутствие внешнего магнитного поля энергия системы не зависит от ориентации спинов частиц, а также суммарного спина $S=\sum s$ системы. Поэтому данному значению энергии системы ε будет отвечать множество различных ее состояний, отвечающих разным ориентациям спинов отдельных частиц.

Согласно сказанному выше, все состояния, отвечающие данному распределению ориентаций спинов, являются равновероятными.

Применим формулу (16,1) к нахождению вероятности того, что система из N независимых частиц будет иметь суммарный спин S. Полный спин системы S равен, очевидно, $s(N_1-N_2)=sn$, где N_1 и N_2 — числа частиц со спином, ориентированным вверх и вниз соответственно, и $n=N_1-N_2$. Поскольку $N_1+N_2=N$, то суммарному спину S отвечает $\frac{N+n}{2}$ частиц со спином, направленным вверх, и $\frac{N-n}{2}$ частиц со спином, направленным вниз. Найдем число $\Omega(n)$ независимых размещений $\frac{N+n}{2}$ частиц с одной ориентацией спина и $\frac{N-n}{2}$ частиц с другой ориентацией спина при заданном полном числе частиц N.

Каждое из таких размещений приводит к одному из равновероятных состояний системы, так что вероятность интересующего нас состояния со спином S равна, согласно (16,1),

$$w \sim \Omega(n).$$

N независимых частиц можно расположить в данном порядке $N!$ способами. Перестановка между собой частиц с одной и той же ориентацией спина, т. е. $\frac{N+n}{2}$ частиц со спином вверх и $\frac{N-n}{2}$ частиц со спином вниз, не изменяет общего спина. Число таких перестановок равно $\left(\frac{N+n}{2}\right)!$ и $\left(\frac{N-n}{2}\right)!$. Поэтому число состояний системы со спином S равно числу таких независимых размещений N частиц между двумя состояниями, при которых

$\frac{N+n}{2}$ из них находятся в первом состоянии (со спином вверх) и $\frac{N-n}{2}$ во втором состоянии (со спином вниз). Соответственно,

$$w \sim \Omega(n) = \frac{N!}{\left(\frac{N+n}{2}\right)!\left(\frac{N-n}{2}\right)!}.$$

Для получения более наглядной формулы можно воспользоваться формулой Стирлинга (см. приложение IV) и предположить, что $n \ll N$. Тогда, логарифмируя, имеем

$$\ln w = \ln N! - \ln\left(\frac{N+n}{2}\right)! - \ln\left(\frac{N-n}{2}\right)! \approx$$
$$\approx N \ln\frac{N}{e} - \frac{N+n}{2}\ln\frac{N+n}{2e} - \frac{N-n}{2}\ln\frac{N-n}{2e} \approx N\ln n2 - \frac{n^2}{2N},$$

или

$$w(n) \sim e^{-\frac{n^2}{2N}}.$$

Мы пришли к вероятности состояния, выражаемой гауссовским распределением. Коэффициент пропорциональности может быть найден из условия нормирования. Очевидно, что наиболее вероятным состоянием является состояние с $n=0$, т. е. состояние, в котором числа спинов, ориентированных вверх и вниз, равны между собой. Это состояние является аналогом состояния молекулярного хаоса в газе. Распределение вероятностей имеет тем более резкий максимум в точке $n=0$, чем больше полное число частиц в системе.

Как мы подчеркнули уже ранее, микроканоническое распределение Гиббса, устанавливающее вероятность данного состояния замкнутой системы, имеет основное принципиальное значение. На практике, однако, значительно чаще приходится иметь дело не с замкнутыми системами, а с подсистемами, находящимися в термостате. Поэтому мы перейдем к рассмотрению таких подсистем.

Подсистема и термостат вместе образуют замкнутую систему, энергия которой (со сделанной выше оговоркой) может считаться постоянной

$$E = \text{const}.$$

Нас интересует, однако, не распределение вероятностей для сложной системы, а распределение вероятностей для подсистемы (при любом распределении вероятностей для термостата). Для нахождения его необходимо учесть своеобразный характер взаимодействия между подсистемой и термостатом.

Как было указано выше, это взаимодействие является слабым, так что энергией взаимодействия в полном энергетическом балансе можно пренебречь, написав последний в виде

$$E = E_k^{(0)} + \varepsilon_i = \text{почти постоянная}, \qquad (16,2)$$

где $E_k^{(0)}$ — энергия термостата, находящегося в k-м состоянии, ε_i — энергия подсистемы, находящейся в i-м состоянии, и слова «почти постоянная» подчеркивают тот факт, что в законе сохранения энергии (16,2) опущены члены, выражающие взаимодействие между подсистемой и термостатом, а также между сложной системой и окружающими телами.

Пренебрежение энергией взаимодействия между системой и термостатом означает, что мы можем считать квазизамкнутую систему и термостат независимыми системами в течение подавляюще большой части времени.

Подсистема может находиться в любом из $\Omega(\varepsilon_i)$ состояний с энергией ε_i, а термостат — в любом из $\Omega_0(E_k^{(0)})$ состояний с энергией $E_k^{(0)}$.

Изменение состояния подсистемы никак не влияет на состояние термостата и, наоборот, изменение состояния термостата не влияет на состояние системы, если указанные переходы не выводят систему из группы состояний с энергией ε_i, а термостат соответственно из состояний с энергией $E_k^{(0)}$. С другой стороны, в силу закона сохранения энергии (16,2) энергии термостата и подсистемы однозначно связаны между собой. Если система обладает энергией ε_i, то термостат обязательно имеет энергию $E_k^{(0)}$.

После всех этих замечаний мы можем перейти к нахождению интересующей нас вероятности того, что подсистема находится в одном из состояний с энергией ε_i.

В силу последнего замечания эта вероятность w_i равна вероятности того, что сложная система (подсистема+термостат) находится в таком состоянии, когда подсистема имеет энергию ε_i, а термостат — энергию $E_k^{(0)}$. Поскольку w_i есть вероятность данного состояния замкнутой системы, она выражается через число состояний по формуле (16,1):

$$w_i \sim \Omega(E) = \Omega\left(E_k^{(0)} + \varepsilon_i\right). \qquad (16,3)$$

С другой стороны, число состояний замкнутой системы, состоящей из двух независимых частей, равно произведению числа состояний обеих частей, т. е.

$$\Omega\left(E_k^{(0)} + \varepsilon_i\right) = \Omega_0(E - \varepsilon_i)\,\Omega(\varepsilon_i). \qquad (16,4)$$

При этом в выражении для числа состояний термостата Ω_0 мы написали в качестве аргумента выражение $E - \varepsilon_i$ на основании (16,2).

Подставляя выражение (16,4) в (16,3), находим

$$w_i \sim \Omega_0(E - \varepsilon_i)\,\Omega(\varepsilon_i). \qquad (16,5)$$

Весьма слабое взаимодействие между системой и средой служит причиной переходов системы из одного состояния в другое. Поскольку размеры термостата весьма велики по сравнению с размерами системы, мы можем считать, что его энергия $E_k^{(0)}$ при всех значениях k также весьма велика по сравнению с энергией последней. Поэтому, каковы бы ни были изменения энергии системы, энергию термостата можно считать почти неизменной. Все различные состояния, в которых оказывается термостат, когда система переходит из одних энергетических состояний в другие, можно считать принадлежащими к одной и той же энергии.

Благодаря этому мы можем разложить $\Omega_0(E - \varepsilon_i)$ в ряд по степеням малой величины ε_i и ограничиться первым членом разложения. Нужно, однако, заметить, что разлагать в ряд по степеням непосредственно саму функцию $\Omega_0(E - \varepsilon_i)$ нельзя. Действительно, мы знаем, что число состояний является мультипликативной функцией, а энергия — аддитивной функцией. Число состояний системы, составленной из независимых частей, равно произведению числа состояний этих частей, а энергия равна сумме соответствующих энергий. Если бы мы разложили $\Omega_0(E - \varepsilon_i)$ в ряд по степеням малой величины ε_i, то мы получили бы выражение

$$\Omega_0(E - \varepsilon_i) \approx \Omega_0(E) - \frac{\partial \Omega_0}{\partial E}\varepsilon_i, \qquad (16,6)$$

которое не обладает требуемыми свойствами. Если бы, например, мы рассмотрели две системы с числом состояний $\Omega_0^{(1)}$ и $\Omega_0^{(2)}$ и энергиями $\left[E^{(1)} - \varepsilon_i^{(1)}\right]$ и $\left[E^{(2)} - \varepsilon_i^{(2)}\right]$, то число состояний должно было бы равняться $\Omega_0^{(1)} \cdot \Omega_0^{(2)}$, а энергия $-\left[E^{(1)} - \varepsilon_i^{(1)} + E^{(2)} - \varepsilon_i^{(2)}\right]$ Между тем при перемножении левых частей разложения (20,6) • правые части не перемножаются.

Поэтому прежде чем разлагать число состояний $\Omega_0(E - \varepsilon_i)$ в ряд, представим его в виде

$$\Omega_0(E - \varepsilon_i) = e^{\sigma\,(E - \varepsilon_i)}, \qquad (16,7)$$

где $\sigma(E - \varepsilon_i)$ — новая функция аргумента $(E - \varepsilon_i)$. Такое представление всегда возможно, поскольку по самой своей природе число состояний — существенно положительная величина, значения которой заведомо не меньше единицы.

Написав $\sigma(E-\varepsilon_i)$ в виде

$$\sigma(E-\varepsilon_i)=\ln\Omega_0(E-\varepsilon_i), \tag{16,8}$$

мы видим, что $\sigma(E-\varepsilon_i)$, подобно энергии, является аддитивной функцией.

Разлагая $\sigma(E-\varepsilon_i)$ в ряд по степеням малой величины ε_i и ограничиваясь первым членом, имеем

$$\sigma(E-\varepsilon_i)\approx\sigma(E)-\frac{\partial\sigma}{\partial E}\varepsilon_i=\sigma-\frac{\varepsilon_i}{\theta},$$

где через θ обозначена величина

$$\theta=\left(\frac{\partial E}{\partial\sigma}\right)_{\varepsilon_i=0}. \tag{16,9}$$

Тогда для $\Omega_0(E-\varepsilon_i)$ находим

$$\Omega_0(E-\varepsilon_i)\approx e^{\sigma(E)}e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}. \tag{16,10}$$

Нетрудно видеть, что (16,10) удовлетворяет указанному требованию мультипликативности Ω при сложении энергий независимых систем.

Подставляя выражение (16,10) в (16,5), имеем

$$w_i=\text{const}\, e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i), \tag{16,11}$$

где под const подразумевается произведение коэффициента пропорциональности и величины $e^{\sigma(E)}$, не зависящее от значения ε_i и свойств подсистемы.

Формула (16,11) определяет вероятность того, что некоторая система, представляющая малую слабо взаимодействующую часть некоторого собрания (ансамбля) произвольных физических систем, будет находиться в одном из $\Omega(\varepsilon_i)$ состояний с энергией, лежащей между ε_i и $\varepsilon_i+\delta\varepsilon_i$, а термостат — в одном из состояний с энергией, лежащей между $E-\varepsilon_i$ и $E-(\varepsilon_i+\delta\varepsilon_i)$. Поскольку состояние термостата не представляет интереса, для краткости мы будем говорить, что w_i является вероятностью того, что подсистема находится в одном из состояний с энергией ε_i.

Из определения вероятности вытекает, что должно иметь место следующее условие нормирования:

$$\sum w_i=1, \tag{16,12}$$

где суммирование ведется по всем возможным квантовым состояниям системы.

Из условия нормирования и вида w_i сразу вытекает, что введенный формально коэффициент θ является существенно положительной величиной. Только в этом случае вероятность состояний сколь угодно больших энергий оказывается стремящейся к нулю, как это и должно быть по самому смыслу понятия физической вероятности и следует формально из условия нормирования. Постоянная в (16,11) может быть найдена из условия нормирования. Подставляя (16,11) в (16,12), находим

$$\text{const} = \frac{1}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i)}.$$

Поэтому распределению вероятностей можно придать окончательный вид:

$$w_i = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i)}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i)}. \tag{16,13}$$

Распределение (16,13) является искомым распределением и послужит основой для всего дальнейшего изложения. Оно было впервые найдено Гиббсом в 1901 г. для систем, подчиняющихся законам классической механики. Это распределение получило название распределения Гиббса или канонического распределения. Переход от квантовых систем, обладающих дискретным набором уровней энергии, к классическим системам не представляет труда и будет сделан в одном из следующих параграфов. Входящая в распределение Гиббса величина θ получила название модуля распределения, или статистической температуры.

Распределение Гиббса описывает распределение вероятностей различных состояний подсистемы, составляющей малую квазинезависимую часть произвольной системы, находящейся в состоянии статистического равновесия. Подчеркнем, что если система не находится в состоянии равновесия, то все предыдущие рассуждения теряют силу. В неравновесной системе неприменим принцип равной вероятности состояний с данной энергией.

Сумма $\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i)$, стоящая в знаменателе (16,13), будет играть большую роль в дальнейшем. Мы введем для нее специальное обозначение

$$Z = \sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i) \tag{16,14}$$

и назовем ее функцией состояний, поскольку все состояния системы вносят в нее свой вклад. В литературе она обычно именуется суммой по состояниям, или статистической суммой. Однако эта терминология кажется нам не совсем удачной. С введением функции состояний распределение Гиббса можно записать в виде

$$w_i = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i). \tag{16,15}$$

Распределение Гиббса для какой-либо конкретной физической системы можно считать известным, если известны уровни энергии системы, т. е. возможные значения энергии ε_i, и кратность вырождения состояний системы, т. е. числа различных состояний $\Omega(\varepsilon_i)$, отвечающих данному значению энергии ε_i. Для ряда систем, которые будут рассмотрены ниже, можно найти эти физические характеристики.

Замечательной особенностью распределения Гиббса является то, что в нем никак не фигурирует механизм взаимодействия подсистемы со средой.

При помощи распределения Гиббса можно вычислить среднее значение любой величины, зависящей от состояния системы. Если $L(\varepsilon_i)$ — значение некоторой физической величины для состояний, отвечающих энергии ε_i, то по общим законам нахождения среднего значения можно написать

$$\overline{L} = \sum L(\varepsilon_i) w_i = \frac{1}{Z} \sum L(\varepsilon_i) e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i) = \frac{\sum L(\varepsilon_i) e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i)}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i)}. \tag{16,16}$$

§ 17. Статическая температура

Рассмотрим прежде всего свойства введенного нами модуля распределения θ. Из самого определения его следует, что он характеризует свойства всего собрания систем — термостата, а не выделенной нами подсистемы. Действительно, в формуле (16,9) фигурируют только величины, относящиеся ко всему собранию подсистем, — его энергия E и функция σ, значение $\left(\frac{\partial E}{\partial \sigma}\right)$ которой берется при $\varepsilon_i = 0$, так что $\sigma = \sigma(E)$. Поэтому модуль θ всегда относится к макроскопической системе и является функцией состояния этой системы. При изменении состояния, в частности, энергии всей системы, изменяется модуль распределения θ. Поскольку функция σ, определенная по формуле (16,8) и представляющая логарифм числа состояний с данной энергией, является однозначной функцией состояния (энергии) системы,

θ также является однозначной функцией энергии или состояния системы.

Далее, модуль распределения θ является величиной существенно положительной. Действительно, если энергия системы ε_i может принимать любые как угодно большие значения, то вероятность состояния с данной энергией ε_i должна уменьшаться с ростом энергии. Если бы это было не так, условие нормировки (16,12) не смогло бы выполняться.

Согласно сказанному, θ может относиться только к макроскопической системе и является существенно положительной однозначной функцией ее состояния. Покажем, что модуль распределения является характеристикой состояния равновесия в системе. Для этого рассмотрим две подсистемы, принадлежащие к разным системам, имеющим модули распределения θ_1 и θ_2. Каждую из подсистем будем считать находящейся в состоянии статистического равновесия, так что вероятности их состояний определяются формулой (16,11):

$$w_1 = A_1 e^{-\frac{\varepsilon_1}{\theta_1}} \Omega_1,$$

$$w_2 = A_2 e^{-\frac{\varepsilon_2}{\theta_2}} \Omega_2.$$

Предположим, что обе подсистемы приводятся в слабое взаимодействие, так что между ними может происходить обмен энергией. Обе взаимодействующие подсистемы можно считать одной объединенной подсистемой. Если последняя оказывается в состоянии статистического равновесия, то распределение вероятностей ее состояний также должно описываться законом вида

$$w = A e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \Omega. \tag{17,1}$$

С другой стороны, поскольку взаимодействие является слабым, энергией взаимодействия можно пренебречь и считать каждую из подсистем квазинезависимой. Тогда для нахождения распределения вероятностей сложной системы можно воспользоваться теоремой умножения и написать

$$w = w_1 w_2 = A_1 A_2 e^{-\frac{\varepsilon_1}{\theta_1}} e^{-\frac{\varepsilon_2}{\theta_2}} \Omega_1 \Omega_2. \tag{17,2}$$

Для того чтобы распределение (17,2) тождественно совпадало с (17,1), необходимо, чтобы

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta.$$

Таким образом, если привести во взаимодействие две равновесные подсистемы с равными модулями $\theta_1 = \theta_2$, то получится

объединенная равновесная система с тем же модулем $\theta=\theta_1=\theta_2$. Если бы θ_1 было отлично от θ_2, то при установлении взаимодействия возникла бы система с распределением вероятностей, выражаемым формулой (17,2). Это распределение не является распределением Гиббса для системы с энергией $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Поэтому образовавшаяся при $\theta_1\neq\theta_2$ система не будет находиться в состоянии равновесия. Равновесное состояние не нарушается при установлении взаимодействия между подсистемами, если их модули θ_1 и θ_2 равны между собой, и нарушается, если $\theta_1\neq\theta_2$.

Именно поэтому величина θ получила название статистической температуры. В том случае, когда подсистема содержит настолько большое число частиц, что ее можно считать макроскопической, можно также говорить о ее собственной статистической температуре. Температура ее определяется из условия равновесия подсистемы и термостата и, следовательно, равна температуре последнего. Для краткости можно поэтому называть θ температурой системы.

Само собой разумеется, что если квазизамкнутая подсистема содержит недостаточно большое число частиц, то понятие ее температуры становится приближенным и в случае подсистемы, единичной молекулы идеального газа, вообще теряет смысл.

Значение статистической температуры определяется по формуле (16,9) и зависит от энергии системы. Найти вид этой зависимости в общем случае невозможно, так как она определяется конкретными свойствами системы. На практике, однако, интересуются не зависимостью θ от E, а обратной зависимостью энергии от температуры $E=E(\theta)$. В дальнейшем мы увидим, что энергия является монотонной функцией температуры. Конкретный вид зависимости энергии от температуры θ будет нами найден для некоторых простейших систем (газ, идеальный кристалл и т. д.).

§ 18. Свойства распределения Гиббса и статистическое равновесие

Распределение Гиббса характеризует распределение вероятностей различных состояний квазизамкнутой системы. Условием применимости распределения Гиббса служит выполнение следующих требований:

1) наличие некоторой макроскопической системы, составляющей окружение рассматриваемой системы (термостат);

2) наличие слабого взаимодействия между системой и термостатом.

В остальном свойства системы являются совершенно произвольными.

Распределение Гиббса, так же как и распределение Максвелла по энергиям, имеет максимум при некотором значении энергии. На первый взгляд существование этого максимума не очевидно: в распределении Гиббса фигурирует экспоненциально убывающий множитель $e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}$.

Нужно, однако, помнить, что число состояний с данной энергией $\Omega(\varepsilon_i)$ быстро растет с энергией системы. Чем больше частиц содержит система, тем больше состояний $\Omega(\varepsilon_i)$ отвечает данному значению интервала энергии ε_i, $\varepsilon_i+\delta\varepsilon_i$. Поэтому рост $\Omega(\varepsilon_i)$ с энергией происходит тем быстрее, чем больше частиц в системе. Как будет, например, показано в § 20, если подсистемой является газ, состоящий из N независимых одноатомных молекул, заключенный в сосуд с постоянной температурой (термостат), то $\Omega(\varepsilon)\sim\varepsilon^{\frac{3N}{2}}$.

Произведение двух функций, — быстро убывающей с энергией и быстро возрастающей, приводит к возникновению у распределения Гиббса резкого максимума. Этот максимум является тем более резким, чем круче растет $\Omega(\varepsilon_i)$, т. е. чем больше частиц в системе. На том же примере мы увидим, что если система является макроскопической, так что в ней содержится огромное число частиц, то степень размытости максимума совершенно ничтожна. Он является столь резким, что изобразить графически без искажения масштаба распределение Гиббса не представляется возможным. Это означает, что вероятность нахождения системы в состояниях с энергией, заметно отличающейся от энергии $\varepsilon_{н\,в}=\varepsilon_{макс}$, отвечающей максимуму распределения Гиббса, ничтожно мала (рис. 41). Подавляюще бо́льшую часть времени наблюдения система проводит в состояниях с энергией, весьма близкой к последней. Состояние, отвечающее максимуму распределения Гиббса, является наиболее вероятным. Наиболее вероятное состояние будет вносить основную долю в среднее значение величин, характеризующих систему (например, энергию). Это следует из самого определения понятия среднего: в величину среднего каждое состояние вносит долю, пропорциональную своей вероятности.

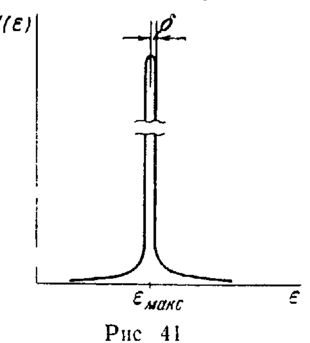


Рис. 41

Поэтому в случае макроскопической системы функция состояний Z может быть представлена в следующем виде:

$$Z=\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)\approx e^{-\frac{\varepsilon_{н\,в}}{\theta}}\Omega(\varepsilon_{н.\,в})\approx e^{-\frac{\bar{\varepsilon}}{\theta}}\Omega(\bar{\varepsilon}), \qquad (18,1)$$

где в сумме по состояниям оставлен только один, самый большой член, относящийся к наиболее вероятной энергии. При этом мы воспользовались приближенным равенством наиболее вероятной и средней энергий в макроскопической системе.

Аналогично для среднего значения любой величины L можно написать

$$\bar{L} = \sum L(\varepsilon_i)\, w(\varepsilon_i) \approx L(\varepsilon_{\text{н в}}) \approx L(\bar{\varepsilon}), \qquad (18.2)$$

т. е. состояние с $\varepsilon = \varepsilon_{\text{н в}}$ осуществляется с вероятностью $w(\varepsilon_{\text{н в}}) \approx 1$, а вероятность нахождения в остальных состояниях $\varepsilon \neq \varepsilon_{\text{н в}}$ близка к нулю. Среднее значение всех величин будет близко к их наиболее вероятному значению. Это относится, в частности, и к энергии системы $\bar{\varepsilon} \approx \varepsilon_{\text{н. в}}$. Такой результат находится в полном согласии с общими выводами, сделанными в § 5 о свойствах систем, содержащих большое число частиц. Истинные значения всех величин близки к средним их значениям, последние же близки к наиболее вероятным.

Наличие у распределения Гиббса резкого максимума представляет конкретное проявление общих свойств систем с большим числом частиц, рассмотренных в § 3.

Системы, находящиеся в таком состоянии, в котором истинные значения характеризующих их величин близки к средним, называются системами, находящимися в состоянии статистического равновесия.

Мы видим, таким образом, что всякая макроскопическая квазизамкнутая система, описываемая распределением Гиббса, находится в течение большей части времени наблюдения в состоянии статистического равновесия.

§ 19. Переход к классической статистике

В большинстве случаев нам придется иметь дело с системами, у которых уровни энергии настолько сближаются между собой, что их можно считать непрерывно распределенными. Тогда совокупность дискретных значений уровней энергии $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_i, \ldots$ можно заменить непрерывной функцией ε. Иными словами, от квантового описания системы мы перейдем к квазиклассическому в том смысле, как это было пояснено в § 1.

Из распределения Гиббса вытекает, что для замены ступенчатой функции $e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}$ плавной функцией $e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}}$ необходимо, чтобы размеры ступенек, т. е. расстояния между уровнями $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$, были малы по сравнению со значением θ. Таким образом, переход к квазиклассической статистике должен наступать при прочих равных условиях в области высоких температур. К последнему утверждению мы будем неоднократно воз-

вращаться в дальнейшем. Применение классического способа рассмотрения является очень важным и часто встречается на практике, поскольку у всякой макроскопической системы в обычных условиях энергетический спектр является почти непрерывным.

Статистическая физика систем, подчиняющихся классической механике, называется классической статистикой.

В классическом приближении мы должны заменить дискретный набор вероятностей различных состояний непрерывным распределением. Состояние системы из N частиц, имеющей $3N$ степеней свободы, в квазиклассическом приближении определяется значением координат $q_1, q_2, \ldots, q_{3N}$ и $p_1, p_2, \ldots, p_{3N}$. Энергия системы $\varepsilon(p, q)$ выражается как непрерывная функция всех координат и импульсов. Поскольку энергия в классическом приближении может считаться непрерывной функцией, распределение вероятностей различных состояний системы также выражается непрерывной функцией. Именно, в классическом приближении можно указать вероятность dw того, что система обладает энергией, лежащей между $\varepsilon(p, q)$ и $\varepsilon(p, q)+d\varepsilon(p, q)$. Согласно (1,26) энергии, лежащей в этом интервале, отвечает число состояний $d\Omega$, равное $d\Omega = \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{h^{3N}}$, где N — число частиц в подсистеме.

В классическом приближении распределение Гиббса можно написать в виде

$$dw = \frac{e^{-\frac{\varepsilon(p, q)}{\theta}}}{Z} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{h^{3N}}. \tag{19,1}$$

При этом функция состояний системы, согласно (16,14), может быть написана в виде

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \int e^{-\frac{\varepsilon(p, q)}{\theta}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon. \tag{19,2}$$

Отличие (19,2) от (16,14) состоит в том, что вместо суммирования в классической формуле для Z производится интегрирование. Часто Z именуют статистическим интегралом Интегрирование в (19,2) ведется по всему фазовому пространству, доступному для системы, т. е. по всем дозволенным значениям координат и импульсов. Какие именно значения координат и импульсов являются дозволенными, зависит от конкретных свойств системы и условий, в которых она находится.

Подставляя (19,2) в (19,1), имеем

$$dw = \frac{e^{-\frac{\varepsilon(p,\,q)}{\theta}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon}{\int e^{-\frac{\varepsilon(p,\,q)}{\theta}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon(p,\,q)}{\theta}} d\Gamma}{\int e^{-\frac{\varepsilon(p,\,q)}{\theta}} d\Gamma}. \tag{19,3}$$

При такой записи ясно, что постоянная Планка выпадает из классического распределения Гиббса dw, как это и следовало ожидать. Часто классическое распределение Гиббса представляют в виде

$$dw = \rho(p,\ q)\, d\Gamma, \tag{19,4}$$

где $\rho(p,\ q)$ — нормированная плотность вероятности:

$$\rho(p,\ q)\, d\Gamma = \frac{e^{-\frac{\varepsilon(p,\,q)}{\theta}} d\Gamma}{\int e^{-\frac{\varepsilon(p,\,q)}{\theta}} d\Gamma}; \quad \int \rho(p,\ q)\, d\Gamma = 1. \tag{19,5}$$

При этом dw представляет вероятность данного состояния системы, т. е. вероятность того, что изобразительная точка системы находится в элементе фазового пространства.

Иными словами, dw представляет вероятность того, что система находится в состоянии, в котором ее импульсы и координаты заключены в интервалах $p_1,\ p_1 + dp_1;\ \ldots\ p_{3N},\ p_{3N} + dp_{3N};$ $q_1,\ q_1 + dq_1;\ \ldots\ q_{3N},\ q_{3N} + dq_{3N}$.

Рассмотрим, в частности, случай, когда квазизамкнутой подсистемой является отдельная молекула в идеальном газе. При этом энергия подсистемы $\varepsilon(p,\ q)$ представляет энергию этой молекулы. Наша подсистема при $N = 1$ будет иметь три степени свободы. Соответственно ее фазовое пространство будет шестимерным. Элемент фазового объема $d\Gamma$ будет иметь вид

$$d\Gamma = dp_x\, dp_y\, dp_z\, dx\, dy\, dz$$

или в сферических координатах для импульсов, заменяя для краткости $dx\, dy\, dz$ элементом объема dV:

$$d\Gamma = p^2\, dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dV.$$

Если внешнее поле сил отсутствует, то энергия молекулы сводится к ее кинетической энергии,

$$\varepsilon(p,\ q) = \frac{p^2}{2m},$$

и не зависит от направления ее движения (углов θ и φ) и положения в сосуде. Поэтому энергии, лежащей в интервале между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$, отвечает число состояний, равное

$$d\Omega = \frac{p^2\,dp \int dV}{d\varepsilon h^3} \int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 \frac{dp}{d\varepsilon}\, d\varepsilon.$$

Вычисление $\frac{dp}{d\varepsilon}$ дает

$$d\Omega = \frac{4\pi V m^{3/2} \sqrt{2\varepsilon}}{h^3}\, d\varepsilon.$$

Таким образом, распределение Гиббса для одной молекулы имеет вид

$$dw = \frac{4\pi V m^{3/2}}{z h^3} e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \sqrt{2\varepsilon}\, d\varepsilon, \qquad (19,6)$$

где z — функция состояний отдельной молекулы. Сравнение (19,6) с распределением Максвелла по энергиям (9,5) убеждает нас в их совпадении, если только отождествить статистическую температуру θ с величиной kT. Подчеркнем, что абсолютная температура, фигурирующая в распределении Максвелла, относится не к отдельной молекуле (подсистеме), но ко всему газу (термостату). В § 26 мы покажем, что эта связь между θ и T имеет общий характер. На первый взгляд может показаться, что постоянная нормирования в распределении Максвелла отличается от постоянной нормирования в (19,3). В частности, она не содержит постоянной Планка h. В действительности, однако, это не так. Чтобы убедиться в этом, напишем явное выражение для z:

$$z = \int e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{4\pi V m^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \sqrt{2\varepsilon}\, d\varepsilon =$$

$$= \frac{4\pi V m^{3/2}}{h^3} \sqrt{\frac{\pi\theta^3}{2}} = \left(\frac{2\pi m\theta}{h^2}\right)^{3/2} V. \qquad (19,7)$$

Поэтому

$$dw = \frac{2}{\sqrt{\pi\theta^3}} e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon. \qquad (19,8)$$

Таким образом, постоянная Планка исчезает из распределения, и константы в (19,8) и (9,5) совпадают.

Как мы подчеркивали в предыдущем параграфе, распределение Гиббса имеет весьма резкий максимум при некотором значении энергии. Это утверждение на первый взгляд противоречит пологому максимуму распределения Максвелла. Нужно,

однако, иметь в виду, что резкий максимум в распределении Гиббса возникает в результате конкуренции экспоненциально убывающего множителя $\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{\theta}\right\}$ и растущего множителя $\Omega(\varepsilon)$. Последний растет как $\varepsilon^{\frac{3N}{2}}$ или как $\varepsilon^{3/2}$ в случае $N=1$. Поэтому при $N \gg 1$ функция $\frac{dw}{d\varepsilon}$ меняется быстро и возникает резкий максимум, а при $N=1$ она растет сравнительно медленно и максимум у распределения оказывается пологим.

Если квазиклассическая подсистема содержит очень большое число частиц, то интеграл по состояниям, фигурирующий в формуле (19,2), имеет весьма резкий максимум при значении энергии $\varepsilon_{\text{макс}} \approx \bar{\varepsilon}$, т. е. в области состояний, отвечающих статистическому равновесию системы.

В этом случае аналогично (18,1) можно написать:

$$Z \approx e^{-\frac{\varepsilon_{\text{н. в}}}{\theta}} \frac{\Delta\Gamma}{h^{3N}} = e^{-\frac{\bar{\varepsilon}}{\theta}} \frac{\Delta\Gamma}{h^{3N}}, \tag{19,9}$$

где $\Delta\Gamma$ — объем той области фазового пространства, которая соответствует состоянию статистического равновесия, т. е. $\varepsilon \approx \varepsilon_{\text{н. в}}$. Очевидно, что число состояний, отвечающих статистическому равновесию системы, равно

$$\Omega(\varepsilon_{\text{н. в}}) = \frac{\Delta\Gamma}{h^{3N}}. \tag{19,10}$$

§ 20. Одноатомный газ как целое

Описанные в § 18 и 19 свойства распределения Гиббса можно яснее всего разобрать на конкретном примере.

Представим себе, что мы захотели бы весь газ в целом, помещенный в сосуд объема V, рассматривать как одну-единственную квазизамкнутую систему. Если стенки сосуда являются непроницаемыми для молекул, но могут обмениваться энергией с газовыми молекулами, то стенки сосуда и тела, окружающие сосуд с газом, образуют термостат. Весь сосуд с газом можно характеризовать определенной температурой θ, равной температуре окружающих тел. Можно считать, что размеры последних и их энергия весьма велики по сравнению с энергией газа.

Мы видим, что все условия применимости распределения Гиббса к газу как целому налицо, и для всего газа как целого можно написать это распределение. Будем считать газ одноатомным и предполагать, что внешнее поле сил отсутствует. Тогда энергия газа равна сумме кинетических энергий всех

входящих в него частиц. Последняя дается классическим выражением и изменяется непрерывно. Пусть в газе содержатся N молекул с массой m. Состояние системы полностью характеризуется заданием координат и импульсов всех молекул $q_1, q_2, \ldots, q_{3N}$; $p_1, p_2, \ldots, p_{3N}$. Фазовое пространство системы имеет $6N$ измерений. Элемент фазового пространства $d\Gamma$ равен произведению дифференциалов всех импульсов и координат

$$d\Gamma = dp_1 \ldots dp_{3N}\, dq_1 \ldots dq_{3N}. \tag{20,1}$$

Энергия системы зависит только от импульсов молекул и может быть написана в виде

$$\varepsilon(p, q) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{3N}^2\right). \tag{20,2}$$

Для написания распределения Гиббса нужно найти выражение для числа состояний, отвечающих энергии системы, лежащей между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$. По общей формуле (1,26′) имеем

$$d\Omega = \frac{1}{h^{3N}} \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon} d\varepsilon. \tag{20,3}$$

Распределение Гиббса для газа как целого имеет вид

$$dw = \frac{1}{h^{3N}Z} \exp\left[-\frac{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{3N}^2}{2m\theta}\right] \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon} d\varepsilon. \tag{20,4}$$

Найдем величину $\frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon}$. Объем части фазового пространства, в котором энергия газа не превышает ε, равен, по определению,

$$\Gamma = \int dp_1 \ldots dp_{3N} dq_1 \ldots dq_{3N}. \tag{20,5}$$

В формуле (20,5) пределы интегрирования определяются так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{3N}^2}{2m} \leqslant \varepsilon(p, q). \tag{20,6}$$

Последнее условие не включает координаты молекул, по которым можно интегрировать непосредственно. Это дает

$$\Gamma = V^N \int dp_1 \ldots dp_{3N}, \tag{20,7}$$

где $V = \int dq_1\, dq_2\, dq_3$ — объем всего газа.

Формула (20,6) определяет с геометрической точки зрения в пространстве $3N$ измерений шар, радиус которого равен $R = \sqrt{2m\varepsilon}$. Тогда интеграл в (20,7) представляет объем этого шара. Зависимость объема шара $3N$ измерений от его радиуса можно найти из соображений размерности. Именно, он должен быть пропорционален радиусу в степени, равной числу

измерений. В трехмерном пространстве он пропорционален R^3, в $3N$-мерном — R^{3N}. Поэтому (20,7) можно написать в виде

$$\Gamma = \text{const} \cdot V^N R^{3N} = \text{const}\, V^N \varepsilon^{\frac{3N}{2}}. \tag{20,8}$$

Дифференцируя (20,8), имеем

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} = \text{const} \cdot V^N \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1}. \tag{20,9}$$

Значение постоянной в (20,9) не представляет особого интереса, поскольку она будет сокращаться с такой же постоянной, возникающей при вычислении Z. Поэтому окончательно из (20,4) и (20,9) имеем

$$dw = \frac{\text{const}}{h^{3N} Z} e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1} V^N\, d\varepsilon. \tag{20,10}$$

Функция распределения Гиббса для системы с большим числом частиц N имеет весьма резкий максимум, поскольку множитель $\varepsilon^{\frac{3N}{2}-1} \approx \varepsilon^{\frac{3N}{2}}$ весьма быстро возрастает с ростом ε, а множитель $e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}}$, напротив, резко убывает. Найдем положение, ширину и высоту этого максимума.

Максимум выражения (20,10) достигается в точке, определяемой условием

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1}\right) = -\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1}}{\theta} + \left(\frac{3N}{2} - 1\right) e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \varepsilon^{\frac{3N}{2}-2} = 0. \tag{20,11}$$

Отсюда находим, что условие максимума гласит:

$$-\frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{\theta} + \left(\frac{3N}{2} - 1\right) = 0$$

или

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \varepsilon_{\text{н. в}} = \left(\frac{3N}{2} - 1\right)\theta,$$

где $\varepsilon_{\text{макс}}$ — энергия в максимуме. Поскольку число частиц N очень велико, единицей можно пренебречь по сравнению с величиной $\frac{3N}{2}$, и тогда

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \varepsilon_{\text{н. в}} \approx \frac{3N\theta}{2}. \tag{20,12}$$

Нетрудно показать, что величина $\frac{3N\theta}{2}$ представляет среднюю энергию всего газа. По определению,

$$\bar{\varepsilon} = \int \varepsilon\, dw = \frac{\text{const}}{h^{3N}Z} \cdot V^N \int e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \varepsilon^{\left(\frac{3N}{2}-1\right)} \varepsilon\, d\varepsilon \approx$$

$$\approx \frac{\text{const} \cdot V^N}{h^{3N}} \frac{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \varepsilon^{\frac{3N}{2}}\, d\varepsilon}{\frac{\text{const} \cdot V^N}{h^{3N}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1}\, d\varepsilon} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\left(-\frac{1}{\theta}\right)} \ln \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1}\, d\varepsilon. \qquad (20,13)$$

Интеграл, входящий в (20,13), вычислен в приложении IV. Вычисление его приводит нас к соотношению

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3N\theta}{2}. \qquad (20,14)$$

Сравнивая выражения (20,12) и (20,14), мы видим, что наиболее вероятная энергия лежит весьма близко к средней. Если N достаточно велико, то эти энергии можно отождествить друг с другом с большой степенью точности. Таким образом, подавляюще большую часть времени подсистема (идеальный газ) находится в состоянии, в котором ее энергия равна средней энергии $\bar{\varepsilon}$. Этим свойством не обладает подсистема, содержащая мало частиц; например, у одной молекулы различие между средней и наиболее вероятной энергией сравнительно велико.

Для того чтобы представить себе, насколько резким является максимум в распределении Гиббса, т. е. как часто подсистема может попадать в состояния с энергией, отличной от наиболее вероятной $\varepsilon_{\text{макс}}$, найдем вид функции распределения вблизи максимума. Вблизи максимума, когда разность $\varepsilon - \varepsilon_{\text{макс}}$ мала, функцию распределения можно разложить в ряд по степеням $\varepsilon - \varepsilon_{\text{макс}}$ и ограничиться первыми членами разложения. Если обозначить через f функцию распределения (отвлекаясь от несущественной константы), то

$$f = e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1} = e^{-\frac{\varepsilon}{\theta} + \left(\frac{3N}{2}-1\right)\ln\varepsilon} = e^{\varphi(\varepsilon)},$$

где

$$\varphi(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{\theta} + \left(\frac{3N}{2} - 1\right)\ln\varepsilon.$$

Поскольку в точке $\varepsilon=\varepsilon_{\text{макс}}$ функция распределения f, а стало быть, и функция φ, имеют максимум, для $\varphi(\varepsilon)$ можно вблизи этого максимума написать разложение

$$\varphi(\varepsilon)\approx\varphi(\varepsilon_{\text{макс}})+\left(\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_{\text{макс}}}(\varepsilon-\varepsilon_{\text{макс}})+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_{\text{макс}}}(\varepsilon-\varepsilon_{\text{макс}})^2+\ldots\approx$$
$$\approx\varphi(\varepsilon_{\text{макс}})+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_{\text{макс}}}(\varepsilon-\varepsilon_{\text{макс}})^2.$$

Нетрудно показать, что

$$\left(\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_{\text{макс}}}=-\left(\frac{3N}{2}-1\right)\frac{1}{\varepsilon^2_{\text{макс}}}$$

и, следовательно,

$$f\approx e^{\varphi(\varepsilon_{\text{макс}})}e^{-\left(\frac{3N}{2}-1\right)\frac{(\varepsilon-\varepsilon_{\text{макс}})^2}{2\varepsilon^2_{\text{макс}}}}=$$
$$=e^{-\frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{\theta}}\varepsilon_{\text{макс}}^{\left(\frac{3N}{2}-1\right)}e^{-\left(\frac{3N}{2}-1\right)\frac{(\varepsilon-\varepsilon_{\text{макс}})^2}{2\varepsilon^2_{\text{макс}}}}.$$

Таким образом, распределение вероятностей вблизи точки максимума имеет вид

$$dw=\text{const}\,\frac{1}{h^{3N}Z}e^{-\frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{\theta}}\varepsilon_{\text{макс}}^{\left(\frac{3N}{2}-1\right)}e^{\frac{-\left(\frac{3N}{2}-1\right)(\varepsilon-\varepsilon_{\text{макс}})^2}{2\varepsilon^2_{\text{макс}}}}\,d\varepsilon. \quad (20,15)$$

Зависимость распределения вероятностей от расстояния до максимума $(\varepsilon-\varepsilon_{\text{макс}})$ характеризуется вторым экспоненциальным множителем в (20,15). Он представляет собой симметричную функцию типа

$$\exp\left[-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_{\text{макс}})^2}{2\delta^2}\right],\quad\text{где}\quad\delta=\frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{\sqrt{\frac{3N}{2}-1}}.$$

Величина δ представляет ширину максимума. При значении $(\varepsilon-\varepsilon_{\text{макс}})=\delta$ функция распределения уменьшается в e раз. Относительная ширина максимума равна

$$\frac{\delta}{\varepsilon_{\text{макс}}}\approx\frac{\delta}{\bar{\varepsilon}}\approx\frac{1}{\sqrt{\frac{3N}{2}-1}}\approx\sqrt{\frac{2}{3N}}. \quad (20,16)$$

При значениях N, отвечающих числу молекул в макроскопическом объеме ($N \approx 10^{19}$), ширина максимума распределения Гиббса оказывается чрезвычайно малой. Это означает, что распределение Гиббса имеет весьма резкий максимум в точке $\varepsilon_{\text{макс}}$. С подавляюще большой вероятностью газ находится в состоянии, в котором его энергия равна средней энергии $\bar{\varepsilon}$. Вероятность того, что мы найдем 1 *см*³ газа в состоянии с энергией, отличной от $\bar{\varepsilon}$, например ε, равной 99% $\bar{\varepsilon}$, может быть без труда найдена по формулам (20,15) или (20,16). Она относится к вероятности нахождения в состоянии $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ как

$$1 : e^{\frac{\left(\frac{3N}{2} - 1\right)\left(\frac{99}{100} - 1\right)^2}{2}} = 1 : e^{10^{15}}.$$

Таким образом, заметное отклонение энергии от среднего значения практически не осуществляется в газе, содержащем большое число частиц. Этот результат находится в полном согласии со сказанным в предыдущем параграфе, а также с общей теоремой § 5. Сравнивая относительную ширину максимума (20,16) с определением относительной флуктуации энергии § 5, мы убеждаемся в их полной тождественности.

ГЛАВА IV

СТАТИСТИЧЕСКАЯ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

§ 21. Внутренняя энергия макроскопической системы Первое и второе начала термодинамики

Располагая аппаратом гиббсовской статистики, мы можем перейти к последовательному построению теории тепловых свойств вещества. Прежде чем перейти к выполнению этой программы, необходимо кратко остановиться на истории развития теории тепла.

Развитие техники и повсеместное распространение тепловых машин в первой половине XIX века настоятельно требовали развития теории тепловых процессов. Между тем, представления о природе тепла были еще весьма туманными. Физика первой половины XIX века была еще очень далека от построения теории тепловых процессов на основе молекулярных представлений. Поэтому развитие теории пошло по весьма своеобразному пути.

Экспериментальное установление Джоулем механического эквивалента тепла и неудача всех попыток создания вечного двигателя (perpetuum mobile), с помощью которого можно было бы получать полезную работу без каких-либо изменений в окружающих телах, позволили сформулировать некоторый общий принцип, получивший название первого начала термодинамики. Первое начало термодинамики представляет частный случай закона сохранения энергии в применении к тепловым процессам.

Если количество тепла, получаемое системой и выраженное в механических единицах, равно δQ, то первое начало термодинамики гласит:

$$\delta Q = -\delta W + \delta E, \qquad (21,1)$$

где $\{-\delta W\}$ — механическая работа, которую производят внешние силы над системой, получающей тепло. Разность $\delta Q-(-\delta W)$ между полученным теплом и произведенной работой представляет часть тепла, затрачиваемую на изменение внутреннего со-

стояния системы. Заметим, что выбор знаков при работе и количестве тепла является условным.

Величина E, представляющая функцию внутреннего состояния системы, получила название внутренней энергии. При так называемом круговом процессе, при котором система после всех изменений возвращается в первоначальное состояние, алгебраическая сумма всех теплот и произведенной работы равна нулю. Это означает, что при круговом процессе система получает извне столько же тепла и механической работы, сколько и отдает. Отсюда следует, что изменение внутренней энергии системы при круговом процессе равно $\oint dE = 0$. Последнее равенство означает, что внутренняя энергия является однозначной функцией состояния системы. Таким образом, соотношение (21,1) выражает закон сохранения энергии. Его записывают обычно в виде

$$dE = \delta Q + \delta W.$$

Второе основное положение феноменологической термодинамики, получившее название второго начала термодинамики, также представляет обобщение результатов многочисленных опытных данных. Второе начало термодинамики гласит, что невозможно систематически отнимать тепло от системы и полностью превращать его в работу без того, чтобы в системе или окружающих ее телах одновременно не произошли какие-то другие изменения.

Машина, которая, отнимая тепло от тела, систематически превращала бы его в работу, получила название вечного двигателя II рода. Ясно, что если бы такая машина могла быть построена, окружающие нас большие тела, например океаны, служили бы практически неиссякаемым резервуаром работы. Между тем, все попытки создания такого рода машины не увенчались успехом.

Таким образом, второе начало термодинамики, как и первое, опиралось на многочисленные и достоверные опытные факты. Ниже будет показано, как из приведенной качественной формулировки второго начала можно перейти к его количественной формулировке. Оказалось, что, опираясь на математические формулировки первого и второго начал термодинамики, можно построить феноменологическую теорию тепловых процессов, получившую название термодинамики. Все выводы термодинамики обладали той же степенью достоверности, что и положенные в их основу первое и второе начала, что делало их совершенно бесспорными.

В достоверности и общности выводов заключается важнейшее достоинство термодинамических методов исследования. Недостаток их заключается в том, что они не раскрывают

физической, молекулярной сущности тепловых процессов. Поэтому построение молекулярной теории тепла и выяснение молекулярной сущности термодинамических понятий явились важнейшим этапом развития теории тепла и физики в целом.

В настоящее время термодинамика и молекулярная теория тепловых процессов — статистическая термодинамика — составляют неразрывное целое.

Ниже на конкретных примерах мы будем иметь возможность убедиться в том, что феноменологическая и статистическая термодинамика не противоречат, а взаимно дополняют друг друга.

В основу молекулярной теории тепловых свойств вещества мы положим следующее, весьма естественное допущение:

«Внутренняя энергия макроскопического тела тождественна со средней энергией $\bar{\varepsilon}$, вычисленной по законам статистической физики».

В дальнейшем мы будем рассматривать тепловые свойства макроскопических систем, содержащих весьма большое число частиц и находящихся в состоянии статистического равновесия. Поскольку в системе, содержащей весьма большое число частиц и находящейся в состоянии статистического равновесия, средняя энергия $\bar{\varepsilon}$ практически точно совпадает с ее истинной энергией, это допущение можно сформулировать иначе:

«Внутренняя энергия всякого макроскопического тела представляет энергию теплового движения молекул, из которых построено тело».

Нужно заметить, что в настоящее время это положение настолько обосновано экспериментально и теоретически, что термин «предположение» кажется излишним.

Мы считали, однако, не лишним подчеркнуть что отождествление средней энергии движения молекул $\bar{\varepsilon}$ с термодинамической энергией E является основой дальнейшего изложения. Все другие утверждения, имеющие менее очевидный характер, например, статистическая трактовка второго начала термодинамики, которую мы будем разбирать в следующих параграфах, не требуют для своего обоснования каких-либо новых допущений или ссылок на опыт, а являются прямым следствием этого единственного допущения.

Для фактического вычисления средней энергии системы мы должны воспользоваться общим правилом § 16 (уравнение (16,16)). В применении к энергии оно гласит:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i)}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i)};$$

суммирование ведется по всем уровням энергии системы.

Выражение для средней энергии $\bar{\varepsilon}$ можно переписать в более компактном виде. Именно, из очевидного тождества

$$\frac{\partial}{\partial\left(-\frac{1}{\theta}\right)}\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)=\frac{\partial Z}{\partial\left(-\frac{1}{\theta}\right)}=\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\varepsilon_i\Omega(\varepsilon_i)$$

следует, что $\bar{\varepsilon}$ можно написать в виде

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\partial}{\partial\left(-\frac{1}{\theta}\right)}\ln Z=\theta^2\frac{\partial\ln Z}{\partial\theta}. \qquad (21,2)$$

Из формулы (21,2) следует, что для нахождения средней энергии системы достаточно знать ее функцию состояний Z. В силу сделанного нами предположения о тождестве средней и термодинамической энергии системы мы будем всегда писать

$$E=\frac{\partial}{\partial\left(-\frac{1}{\theta}\right)}\ln Z=\theta^2\frac{\partial\ln Z}{\partial\theta}. \qquad (21,3)$$

Из приведенных формул следует, что состояние макроскопической системы, и в частности ее внутренняя энергия, зависит от температуры термостата θ. В состоянии статистического равновесия температура системы равна температуре ее окружения (термостата), так что можно говорить о зависимости энергии тела от его собственной температуры.

Внутренняя энергия макроскопической системы обладает важным свойством аддитивности: энергия сложной системы равна сумме энергий ее макроскопических частей. Это утверждение имеет, разумеется, приближенный характер. Оно предполагает, что энергией взаимодействия между частями можно пренебречь. В случае макроскопических частей ею обычно можно пренебречь, поскольку она имеет характер поверхностной энергии (см., впрочем, § 65).

§ 22. Работа и давление

Помимо температуры, состояние тела, находящегося в статистическом равновесии, зависит от внешних условий. Внешние условия, в которых находится тело, определяются значением внешних полей, действующих на тело.

Согласно сказанному в начале § 8, объем тела также определяется силовыми полями, действующими на поверхность тела; стенки сосуда представляют поле сил, изображенное на рис. 34.

Внешние условия можно характеризовать заданием некоторых величин, носящих название внешних параметров. Внешние

параметры системы определяются действующими на тело полями или положением окружающих тел.

Представим себе, например, что наша система является газом, находящимся в сосуде с подвижной крышкой (поршнем). Тогда состояние системы будет зависеть от положения поршня. Это положение является внешним параметром, поскольку значение координаты поршня не зависит от природы и свойств системы в сосуде. В качестве другого примера можно указать систему, находящуюся во внешнем поле сил. Если произвольная система находится во внешнем поле сил, то ее частицы обладают некоторой потенциальной энергией. Поэтому уровни энергии будут зависеть от свойств поля. В частности, в однородном поле эта зависимость определяется только положением системы в поле. В этом случае внешним параметром будет служить положение системы.

Таким образом, уровни энергии системы, вообще говоря, зависят не только от свойств самой системы, но также и от значений внешних параметров, совокупность которых мы обозначим через λ. Для того чтобы это подчеркнуть, мы будем иногда писать $\varepsilon_i(\lambda)$. Не нужно, однако, забывать, что значения ε_i зависят не только от λ, но и от свойств самой системы.

Рассмотрим изменение $\delta\varepsilon_i$ энергии системы при бесконечно малом изменении $\delta\lambda$ ее внешнего параметра λ. При этом мы сначала ограничимся таким изменением внешних параметров, при котором распределение вероятностей различных состояний остается неизменным. Это означает, что при изменении внешних параметров не происходит перехода системы из одних состояний в другие (см. ниже).

Тогда имеем

$$\delta\varepsilon_i = \left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\lambda}\right)_{w_i}\delta\lambda. \qquad (22,1)$$

Величину $\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\lambda}$ можно рассматривать как некоторую (взятую с обратным знаком) обобщенную силу, действующую на систему. Обозначим ее через $(-f_i)$. Тогда (22,1) запишется в виде

$$\delta\varepsilon_i = -f_i\,\delta\lambda. \qquad (22,2)$$

Для нахождения изменения внутренней энергии мы должны найти среднее значение изменения каждого из уровней энергии системы. По обычным правилам усреднения имеем

$$\delta E = \overline{\delta\varepsilon} = \sum\delta\varepsilon_i w_i = -\sum f_i w_i\,\delta\lambda = -\Lambda\,\delta\lambda, \qquad (22,3)$$

где через Λ обозначена средняя сила, действующая на всю подсистему при изменении параметра λ, $\Lambda = \left(\sum f_i w_i\right)_{w_i}$.

Величина $(-\Lambda\, d\lambda)$ представляет собой работу, производимую над системой при изменении параметра λ на величину $d\lambda$. Знак минус показывает, что работа производится внешними силами над системой.

Обозначим среднее значение работы, производимой над системой при изменении внешних параметров λ, через δW. Тогда имеем

$$(\delta E)_{w_i} = (\delta W)_{w_i}. \tag{22,4}$$

Рассмотрим, в частности, важный случай, когда обобщенной координатой служит линейный размер системы, определяемый координатой x. В этом случае вместо обобщенной силы удобно ввести давление p, которое мы определим как среднюю силу, действующую на один квадратный сантиметр нормально к поверхности тела (системы), т. е.

$$p = \frac{\Lambda}{S}.$$

Тогда имеем

$$(\delta E)_{w_i} = \delta W = -\,pS\,\delta x = -\,p\,\delta V, \tag{22,5}$$

где δV — изменение объема системы.

Такое определение давления является не новым, мы пользовались им в кинетической теории газов. В § 8 мы определили давление как среднюю силу, действующую на единицу поверхности стенки со стороны ударяющихся о нее газовых молекул. В системе, содержащей большое число частиц, истинная сила всегда имеет величину, очень близкую к своему среднему значению. Это и оправдывает введение давления, заменяющего с большой степенью точности фактическую силу, действующую на поверхность тела.

Очевидно, что $(\delta E)_{w_i}$ не представляет полного возможного изменения энергии системы и не является полным дифференциалом какого-либо выражения. Действительно, обобщенная сила $\Lambda = \sum f_i w_i$ при данной структуре системы представляет функцию внешнего параметра λ и температуры θ. Поэтому мы подробнее можем написать так:

$$(\delta E)_{w_i} = -\,\Lambda(\lambda,\ \theta)\,\delta\lambda. \tag{22,6}$$

Изменение энергии при изменении параметра λ в пределах от λ_1 до λ_2 или работа, произведенная при этом над системой, равна

$$W = -\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Lambda(\lambda,\ \theta)\,\delta\lambda.$$

Значение интеграла в последней формуле зависит, очевидно, от пути интегрирования, т. е. от характера перехода от λ_1 к λ_2.

В частности, в случае, когда $\lambda = V$,

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p(V, T)\,\delta V. \qquad (22,7)$$

Поскольку давление зависит от объема и температуры, переход от объема V_1 к объему V_2 по различному пути интегрирования, т. е. при разном характере перехода от V_1 к V_2, приводит к различным значениям работы W.

§ 23. Изменение энергии системы в общем случае квазистатического процесса

Рассмотрим теперь изменение энергии подсистемы в более общем случае, когда она находится во взаимодействии с окружающими телами (средой), обмениваясь с ними энергией при непосредственном контакте.

Мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением таких процессов, при которых состояние статистического равновесия в системе не нарушается. Такие процессы, при которых систему можно считать находящейся все время в состоянии статистического равновесия или, точнее, в ходе которых система проходит через последовательный ряд равновесных состояний, мы будем именовать квазистатическими или обратимыми процессами. Вопрос о том, в какой мере фактически состояние системы может изменяться без нарушения состояния равновесия, т. е. можно ли осуществлять квазистатические переходы в системе, мы обсудим ниже.

Поскольку система в течение всего времени процесса находится в состоянии равновесия, распределение вероятностей определяется равновесным распределением Гиббса.

Для полного изменения средней энергии можно написать

$$\delta E = \delta\Big(\sum_i \varepsilon_i w_i\Big) = \Big(\sum_i w_i\,\delta\varepsilon_i\Big)_{w_i} + \Big(\sum_i \varepsilon_i\,\delta w_i\Big)_{\lambda}, \qquad (23,1)$$

где w_i — распределение Гиббса с температурой, равной температуре термостата. Последняя, однако, в ходе процесса не должна оставаться постоянной.

Первое слагаемое в формуле (23,1) по-прежнему выражает работу, совершаемую над системой.

Второе слагаемое представляет ту часть изменения энергии системы, находящейся во взаимодействии со средой, которая не связана с изменением внешних параметров. Иными словами, второе слагаемое в (23,1) равно изменению средней энергии

системы, возникающему вследствие непосредственной передачи энергии от частиц среды к частицам системы, не сопровождающейся изменением внешних полей или взаимного расположения тел. Эту часть изменения энергии мы назовем количеством тепла, подводимого к системе, и обозначим его δQ. Тогда имеем

$$\delta E = \delta W + \delta Q. \tag{23,2}$$

Формула (23,2) представляет закон сохранения энергии для тепловых процессов (первое начало термодинамики). Именно в такой форме закон сохранения энергии при тепловых процессах был впервые установлен после опытов Джоуля.

Статистическая физика позволяет вскрыть молекулярный смысл величин, входящих в (23,2), а также, по крайней мере для простейших систем, дает возможность теоретического их вычисления.

Для выяснения молекулярного смысла количества тепла рассмотрим произвольную незамкнутую систему, с которой происходит квазистатический процесс. При квазистатическом процессе можно написать, пользуясь определением (23,2),

$$\delta Q = \left(\sum \varepsilon_i\, \delta w_i\right)_\lambda = \delta E - \sum w_i\, \delta\varepsilon_i = \delta E - \frac{\sum \exp\left\{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right\}\Omega(\varepsilon_i)\,\delta\varepsilon_i}{Z}.$$

Второй член можно преобразовать следующим образом. Имеем очевидное тождество[1]):

$$\delta\left(\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)\right) = -\frac{1}{\theta}\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)\,\delta\varepsilon_i + \sum \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)\frac{\delta\theta}{\theta^2},$$

из которого следует, что

$$\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)\,\delta\varepsilon_i = \\ = -\theta\delta\left(\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)\right) + \frac{\delta\theta}{\theta}\sum \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i), \tag{23,3}$$

откуда, разделив (23,3) на Z, находим

$$\frac{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)\,\delta\varepsilon_i}{Z} = -\frac{\theta\,\delta Z}{Z} + \frac{\delta\theta}{\theta}\,\frac{\sum \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)}{Z}. \tag{23,4}$$

[1]) При дифференцировании переменными величинами являются ε_i и θ. Число состояний, отвечающих данной энергии, остается, очевидно, постоянным, характерным для данной системы числом.

Первое слагаемое правой части (23,4) можно представить в виде

$$-\theta\frac{\delta Z}{Z} = -\theta\delta\ln Z.$$

Во втором слагаемом выражение $\frac{1}{Z}\sum \varepsilon_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)$ можно заменить на $\bar{\varepsilon}$ или E. Тогда имеем

$$\delta Q = \delta E + \theta\delta\ln Z - E\frac{\delta\theta}{\theta} = \theta\delta\left(\frac{E}{\theta} + \ln Z\right). \qquad (23,5)$$

Мы приходим, таким образом, к следующему важному выводу.

Если с макроскопической системой происходит некоторый процесс, в ходе которого она все время остается в равновесии с термостатом, то изменение ее энергии может быть представлено в виде

$$\delta E = \delta W + \delta Q = -\Lambda\,d\lambda + \theta\delta\left(\frac{E}{\theta} + \ln Z\right). \qquad (23,6)$$

Формула (23,6), имеющая основное значение для дальнейшего, представляет общее выражение для изменения энергии при квазистатическом процессе.

Как видно из формулы (23,6), изменение энергии распадается на две части — работу, производимую над системой (или самой системой), δW, и количество тепла δQ, получаемое (или отдаваемое) системой.

Выполнение работы связано с изменением значений допустимых уровней энергии, обусловленным, как это мы видели в предыдущем параграфе (формула (22,1)), изменением ее внешних параметров. Если, в частности, система состоит из отдельных независимых частиц и можно говорить об энергиях отдельных частиц, то выполнение работы связано с изменением энергий отдельных частиц.

Если внешние параметры не изменяются (работа внешних сил равна нулю), то энергетические уровни системы остаются неизменными. В этом случае энергия, подводимая в систему извне, идет на изменение распределения вероятностей. Состояния с большей энергией становятся более вероятными — система нагревается. Если, например, система представляет идеальный газ, то при подведении энергии число молекул, имеющих относительно большие энергии, увеличивается, а имеющих малые энергии — уменьшается. В случае, если система отдает, а не получает энергию, происходит обратное перераспределение вероятностей: более вероятными становятся состояния с меньшей энергией, система охлаждается.

Обсудим теперь вопрос о том, когда процесс может считаться квазистатическим.

Если внешние условия, в которых находится система, изменяются, например, изменяются ее объем, действующие на нее поля или она получает извне некоторое количество энергии путем непосредственного контакта, то состояние равновесия в системе нарушается. Если изолировать затем систему и предоставить ее самой себе, то с течением времени система неизбежно должна будет прийти в состояние статистического равновесия. Действительно, мы говорили, что состояние сложной системы не зависит от ее начального состояния. Поэтому если время наблюдения достаточно велико, то основную часть времени наблюдения система проводит в состоянии статистического равновесия независимо от того, в каком состоянии она находилась в начальный момент. По прошествии времени релаксации τ система, первоначально находившаяся в неравновесном, мало вероятном состоянии, переходит в наиболее вероятное, равновесное состояние. На вопрос о том, как именно произойдет этот переход и какое для него требуется время, в общем случае ответить невозможно. Процессы, протекающие при этом в системе, зависят от природы системы и от характера ее равновесного состояния.

Предположим теперь, что изменение внешних условий происходит достаточно медленно. Именно, будем считать, что заметное изменение внешних условий происходит за промежутки времени, очень большие по сравнению со временем релаксации. Тогда в каждый данный момент времени система будет успевать приходить в состояние равновесия, соответствующее данным внешним условиям.

Поясним это на простом примере. Рассмотрим процесс сжатия и расширения газа под поршнем. При движении поршня он производит работу над порциями газа, непосредственно к нему прилегающими. Соответствующие молекулы получают избыточную энергию по сравнению с остальной массой молекул газа, и газ становится неоднородным. Благодаря процессам соударения между молекулами, возникшая неоднородность будет стремиться исчезнуть, а подведенная энергия равномерно распределится между всеми молекулами газа. Для того чтобы этот процесс успел произойти, и газ, выведенный из равновесного состояния, успел в него вернуться, требуется некоторое время, являющееся характерным временем релаксации для данного процесса. Если поршень перемещается настолько медленно (например, очень слабыми и редкими толчками), что время, требующееся для продвижения поршня на заметное расстояние, очень велико по сравнению со временем релаксации, то все нарушения однородности газа будут успевать рассасываться.

Газ будет все время однородным по составу, т. е. будет находиться в состоянии равновесия.

Аналогично в случае нагревания в области, непосредственно примыкающей к источнику тепла (например, к одной из стенок сосуда), будет происходить изменение распределения молекул по скоростям и будет увеличиваться процент молекул с большими скоростями. Процессы столкновения будут приводить к выравниванию неоднородности газа за некоторое время релаксации. Если нагревание газа происходит настолько медленно, что заметное изменение температуры будет происходить за время, значительно большее времени релаксации, возникшие неоднородности будут успевать рассасываться и газ будет все время находиться в состоянии равновесия.

Таким образом, условием квазистатичности процесса является условие его медленности. Каждому времени релаксации отвечает своя быстрота изменения внешних условий, при которых процесс может считаться квазистатическим.

Само собой разумеется, что квазистатический процесс представляет некоторую идеализацию реальных процессов, идущих всегда с конечной скоростью.

Всякий квазистатический процесс является процессом обратимым. Это означает, что если в ходе процесса система прошла через данную последовательность равновесных состояний (прямой процесс), то ее можно также перевести в первоначальное состояние, проходя через ту же самую последовательность состояний (обратный процесс). Для этого следует лишь изменять в обратном порядке внешние условия, в которых находится система.

Это невозможно сделать для неквазистатических процессов. При неквазистатическом процессе состояние равновесия в системе нарушено. Состояние неравновесной системы не определяется заданием внешних параметров и температуры системы, но требует указания целого ряда других величин, например, распределения температуры или плотности внутри системы. Изменение внешних условий в обратной последовательности не будет еще означать, что система проходит через те же состояния в обратном порядке. Поэтому неквазистатические процессы являются необратимыми.

Само собой разумеется, что вполне обратимый процесс является некоторой идеализацией. Реальные процессы всегда происходят с конечной скоростью и сопровождаются нарушением равновесия в системе. Однако очень часто можно в достаточно хорошем приближении не учитывать малых нарушений равновесного состояния системы и считать процесс, фактически идущий с конечной скоростью, процессом обратимым.

§ 24. Энтропия и основное термодинамическое равенство

Формула (23,5) показывает, что при квазистатическом процессе количество тепла, получаемого или отдаваемого системой, может быть представлено в виде

$$\delta Q = \theta\,\delta\sigma, \tag{24,1}$$

где $\delta\sigma$ — изменение некоторой функции:

$$\delta\sigma = \delta\left(\frac{E}{\theta} + \ln Z\right). \tag{24,2}$$

Очевидно, что $\delta\sigma$ представляет полный дифференциал выражения, стоящего в скобках,

$$\sigma = \frac{E}{\theta} + \ln Z + \mathrm{const}, \tag{24,3}$$

где const — произвольная постоянная. Функция σ получила название энтропии системы. Физический смысл этой важнейшей величины будет выяснен несколько позднее.

С помощью энтропии изменение энергии системы при квазистатическом процессе может быть записано в виде

$$\delta E = \theta\,\delta\sigma - \Lambda\,\delta\lambda. \tag{24,4}$$

Чаще всего внешним параметром является объем системы V. Тогда

$$\delta E = \theta\,\delta\sigma - p\,\delta V. \tag{24,5}$$

Формулы (24,4) или (24,5), выражающие изменение энергии системы в самом общем случае квазистатического процесса, носят название основного термодинамического равенства.

Основное термодинамическое равенство было получено нами чисто статистическим путем. Исторически, однако, это равенство, а также энтропия, определенная формулой (24,1), были введены в феноменологической термодинамике (см. ниже).

Основное термодинамическое равенство показывает, что полное изменение энергии системы при квазистатическом процессе определяется изменением внешнего параметра $\delta\lambda$ и энтропии $\delta\sigma$. Действительно, из формул (24,4) и (24,5) находим

$$\Lambda = -\left(\frac{\partial E}{\partial\lambda}\right)_\sigma, \quad p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_\sigma, \quad \theta = \left(\frac{\partial E}{\partial\sigma}\right)_\lambda, \tag{24,6}$$

так что можно написать

$$\delta E = \theta\,\delta\sigma - \Lambda\,\delta\lambda = \left(\frac{\partial E}{\partial\sigma}\right)_\lambda \delta\sigma + \left(\frac{\partial E}{\partial\lambda}\right)_\sigma \delta\lambda. \tag{24,7}$$

Таким образом, термодинамическую внутреннюю энергию системы можно рассматривать как функцию независимых

переменных σ и λ (или V). При этом, как видно из равенства $\theta = \left(\frac{\partial E}{\partial \sigma}\right)_\lambda$ и условия $\theta > 0$, энергия является монотонной функцией энтропии.

Формула для изменения энергии по своей структуре сходна с формулой, связывающей изменение потенциальной энергии с обобщенной координатой в механике. По этой причине внутреннюю энергию называют термодинамическим потенциалом по отношению к обобщенным координатам σ и λ. Величины θ и Λ играют роль обобщенных сил.

Величина δE является полным дифференциалом в отличие от количества тепла δQ и работы δW, которые в общем случае не представляют полных дифференциалов каких-либо выражений.

Взяв интеграл по замкнутому циклу изменений состояния системы, находим

$$\oint \delta E = 0.$$

Это вполне естественно, так как внутренняя энергия E является однозначной функцией состояния системы. При возвращении системы в первоначальное состояние ее энергия также будет приобретать первоначальное значение.

Работа W и количество тепла Q зависят не только от состояния, но и от характера процесса, происходящего с системой. Поэтому не имеет смысла говорить о количестве тепла, заключенном в системе в данном состоянии. Смысл имеет лишь изменение количества тепла δQ.

Формула (24,1) показывает, что отношение $\frac{\delta Q}{\theta}$ является полным дифференциалом, следовательно, энтропия σ представляет однозначную функцию состояния системы. Для нее имеет место условие:

$$\oint \delta\sigma = \oint \frac{\delta Q}{\theta} = 0.$$

Температуру θ можно с математической точки зрения рассматривать как интегрирующий делитель выражения δQ.

Для выяснения физического смысла энтропии, которое будет проведено в следующем параграфе, мы должны еще рассмотреть другие ее свойства.

Согласно формуле (24,3), для вычисления энтропии необходимо лишь знать функцию состояний Z. В формуле (24,3) фигурирует постоянная интегрирования. Таким образом, энтропия определена с точностью до произвольной постоянной. Существенно, однако, что, как это будет показано в § 36, постоянная

энтропия является действительно постоянной, не зависящей не только от температуры системы, но также и от всех других параметров, характеризующих ее состояние (объема, физического и химического состояния системы и т. д.). Эту постоянную можно выбрать за начало отсчета энтропии и написать формулу (24,3) в виде

$$\sigma = \frac{E}{\theta} + \ln Z. \tag{24,8}$$

Преобразуем последнее выражение для энтропии, воспользовавшись тем, что в состоянии статистического равновесия система подавляюще большой промежуток времени будет обладать энергиями ε_i, близкими к средней энергии $\bar{\varepsilon}$.

Преобразуем функцию состояний системы, учитывая, что заметный вклад в нее вносит только наиболее вероятное состояние с энергией $\bar{\varepsilon}$. Мы можем написать

$$Z = \sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i) \approx e^{-\frac{\bar{\varepsilon}}{\theta}} \Omega(\bar{\varepsilon}) = e^{-\frac{E}{\theta}} \Omega(\bar{\varepsilon}). \tag{24,9}$$

При этом в сумме по состояниям мы пренебрегли всеми членами, кроме самого большого.

Подставляя (24,9) в (24,8), находим

$$\sigma = \ln \Omega(\bar{\varepsilon}). \tag{24,10}$$

Энтропия макроскопической квазизамкнутой системы оказывается равной логарифму числа состояний, отвечающему средней энергии системы, т. е. логарифму числа состояний системы, находящейся в состоянии статистического равновесия.

Таким образом, энтропия σ идентична функции σ, введенной нами в § 16 (формула (16,7)). Весьма важным свойством энтропии является ее аддитивность. Энтропия сложной системы, находящейся в равновесии и состоящей из n подсистем, равна

$$\sigma = \ln \Omega = \ln \prod_n \Omega_n = \sum \ln \Omega_n = \sum \sigma_n. \tag{24,11}$$

Аддитивность энтропии непосредственно следует из ее определения (16,7) или (24,3).

Степень точности утверждения об аддитивности энтропии та же, что и утверждения об аддитивности энергии.

§ 25. Закон возрастания энтропии

В предыдущих параграфах мы рассматривали квазизамкнутую систему, находящуюся в состоянии статистического равновесия или совершающую квазистатический (обратимый) процесс. При этом мы установили, что ряду макроскопических

понятий — внутренней энергии, работе, количеству тепла может быть дано молекулярное (статистическое) истолкование. К таким понятиям принадлежит и введенная нами макроскопическая величина — энтропия.

Формулы (24,8) и (24,10) позволяют вычислять значение энтропии, но не проливают света на смысл этой величины. Для выяснения молекулярного смысла энтропии следует рассмотреть систему с более простым статистическим поведением, чем квазизамкнутая система, — систему замкнутую. Простота замкнутой системы позволит нам не ограничиваться изучением свойств равновесных систем, но включить в рассмотрение также и системы неравновесные.

Представим себе замкнутую макроскопическую систему как совокупность большого числа частей. Каждая из этих частей имеет размеры, малые по сравнению со всей системой в целом, но содержит еще огромное число частиц и является квазизамкнутой системой. Поскольку наше разбиение является совершенно произвольным, его всегда можно произвести. Предположим, что все части нашей сложной системы пришли в состояние статистического равновесия. Тогда для каждой из них можно написать выражение для энтропии (24,10):

$$\sigma_n = \ln \Omega_n(\bar{\varepsilon}_n), \tag{25,1}$$

где индекс n означает номер части.

Мы не будем, однако, предполагать, что имеет место статистическое равновесие между частями системы; например, различные части системы могут иметь разную температуру, хотя в каждой из частей имеет место постоянство своей температуры. Вся замкнутая система, как целое, будет находиться в неравновесном состоянии.

Определим энтропию замкнутой неравновесной системы.

По самому смыслу этого понятия энтропию сложной системы следует считать аддитивно слагающейся из энтропий всех входящих в нее частей, т. е.

$$\sigma = \sum_n \sigma_n. \tag{25,2}$$

Как мы видели выше, формула тривиальна для случая системы, в которой существует равновесие между частями. Она представляет естественное обобщение понятия энтропии на случай неравновесной системы.

Для каждой из частей системы можно представить равновесное значение энтропии по формуле (24,10). Тогда имеем

$$\sigma = \sum \sigma_n = \sum \ln \Omega_n(\bar{\varepsilon}) = \ln \prod_n \Omega_n(\bar{\varepsilon}_n) = \ln \Omega, \tag{25,3}$$

где $\Omega = \prod_{n=1}^{N} \Omega_n(\bar{\varepsilon}_n)$ — полное число состояний системы, состоящей из N независимых частей.

Мы видим, что энтропия замкнутой системы оказывается равной логарифму числа состояний системы. Она может быть при этом не равна логарифму числа состояний $\Omega(\bar{\varepsilon})$ всей этой системы в состоянии статистического равновесия (как это всегда имеет место для каждой из ее частей или для всей системы, находящейся в состоянии статистического равновесия).

В рассматриваемой замкнутой системе имеет место закон микроканонического распределения (16,1), связывающий вероятность состояния замкнутой системы с числом ее состояний Ω. Выражая Ω через w, находим

$$\sigma = \ln w + \text{const}. \tag{25,4}$$

Формула (25,4), представляющая основу статистического толкования термодинамики, носит название формулы Больцмана.

Формула Больцмана связывает значение энтропии замкнутой системы с вероятностью ее состояния. Изменение энтропии при переходе замкнутой системы из одного состояния в другое равно

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \Delta\sigma = \ln\frac{w_2}{w_1}, \tag{25,5}$$

где w_1 и w_2, σ_1 и σ_2 — вероятности и энтропии первого и второго состояний соответственно.

Иногда энтропию связывают с числом состояний Ω не формулой (25,3), а выражением

$$\sigma' = \ln \int_0^E d\Omega, \tag{25,3$'$}$$

где интегрирование ведется по всем энергиям, меньшим E. Поскольку число состояний $\Omega(E)$ в макроскопических системах, при $N \gg 1$, большая величина, приближенно можно считать

$$\Omega(E) \simeq \int_0^E d\Omega.$$

При этом оба определения (25,3) и (25,3$'$) приводят к одному и тому же значению σ, а именно к среднему значению. Это свойство формулы Больцмана именуют ее нечувствительностью. Формула Больцмана связывает между собой понятия разной физической природы. Энтропия является макроскопической величиной, тогда как вероятность имеет механический и не макроскопический смысл.

Энтропия квазизамкнутой системы может быть выражена через плотность вероятности $\rho(p, q)$, входящую в классическое распределение Гиббса (19,4), следующим образом.

Функция ρ удовлетворяет условию нормирования

$$\int \rho\, d\Omega = 1.$$

Учитывая, что $\rho(\varepsilon)$ имеет резкий максимум при $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, имеем приближенно

$$\int \rho\, d\Omega \approx \rho(\bar{\varepsilon})\, \Omega(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\bar{\varepsilon}}{\theta}} \Omega(\bar{\varepsilon}) = 1.$$

Поэтому энтропия системы на основании (24,10) равна

$$\sigma = \ln \Omega(\bar{\varepsilon}) = \ln \frac{1}{\rho(\bar{\varepsilon})} = -\ln \rho(\bar{\varepsilon}) = \ln Z + \frac{\bar{\varepsilon}}{\theta}.$$

С другой стороны, можно написать

$$\overline{\ln \frac{1}{\rho(\varepsilon)}} = \int \rho(\varepsilon) \ln \frac{1}{\rho(\varepsilon)}\, d\Omega = \int \rho(\varepsilon) \left(\ln Z + \frac{\varepsilon}{\theta}\right) d\Omega = \ln Z + \frac{\bar{\varepsilon}}{\theta}.$$

Поэтому для энтропии квазизамкнутой системы σ можно написать в виде

$$\sigma = \overline{\ln \frac{1}{\rho(\varepsilon)}}. \tag{25,6}$$

Эта формула понадобится нам в дальнейшем.

Вернемся к формуле Больцмана (25,4) и посмотрим, как с ее помощью можно установить закономерности изменения во времени состояния замкнутой системы.

Предположим, что первоначально замкнутая система находилась в некотором неравновесном состоянии. Тогда w_1 означает вероятность начального неравновесного состояния. По прошествии времени релаксации система перейдет из неравновесного состояния в состояние статистического равновесия. Этот переход происходит благодаря слабому, но всегда существующему взаимодействию между ее частями. Не вдаваясь в рассмотрение того, как именно и за какое время устанавливается равновесие, — это задача физической кинетики, — мы можем утверждать, что этот переход совершается неизбежно во всякой макроскопической системе по прошествии времени релаксации. По определению, вероятность w_2 состояния статистического равновесия (в котором макроскопическая система проводит почти все время) имеет максимальное значение, так что $w_2 > w_1$. Из формулы (25,5) следует, что при переходе замкнутой системы из неравновесного состояния в равновесное ее энтропия увеличивается. Таким образом, возрастание энтропии замкну-

той системы оказывается связанным с переходом ее из менее вероятного в более вероятное состояние. Наибольшее значение имеет энтропия системы, находящейся в состоянии полного статистического равновесия. Полученный результат можно сформулировать следующим образом.

Если некоторая замкнутая макроскопическая система первоначально находится в неравновесном состоянии, то вероятность этого состояния и его энтропия не имеют наибольшего возможного значения. Наиболее вероятным будет такое поведение системы, при котором по прошествии времени релаксации она перейдет в наиболее вероятное состояние, энтропия которого максимальна.

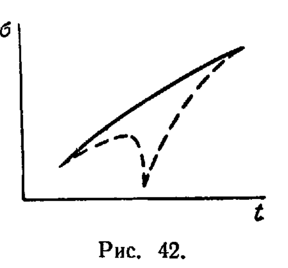


Рис. 42.

Можно показать, что в среднем этот переход совершается монотонно, т. е. что система приходит в состояние статистического равновесия, проходя последовательно ряд все более и более вероятных состояний до тех пор, пока она не достигнет состояния полного равновесия. При этом энтропия системы постепенно возрастает, достигая максимального значения в наиболее вероятном равновесном состоянии. Таким образом, изменение энтропии во времени происходит так, как это изображено на рис. 42 сплошной (но не пунктирной!) кривой.

Представим себе теперь такой случай, когда замкнутая система в начальный момент уже находилась в состоянии полного статистического равновесия, в котором ее энтропия имеет максимальное значение. Тогда в течение весьма длительного времени, превышающего время релаксации, система будет оставаться в состоянии равновесия, а ее энтропия — сохранять неизменное максимальное значение. В общем случае мы можем сказать, что наиболее вероятным ходом процессов в замкнутой макроскопической системе является такой, при котором ее энтропия возрастает или остается постоянной:

$$\Delta\sigma \geqslant 0, \qquad (25,7)$$

где знак неравенства относится к процессам, приближающим систему к состоянию статистического равновесия, а знак равенства — к процессам, происходящим в системе, уже находящейся в состоянии равновесия.

Мы знаем, однако, что в применении к макроскопическим системам вероятные предсказания имеют практически вполне достоверный характер. Поэтому, оставляя до § 36 вопрос о более полной и глубокой трактовке закона возрастания энтропии, будем учитывать лишь наиболее вероятный ход энтропии и

считать, что формула (25,7) имеет не вероятностный, а достоверный характер.

Тогда изменение или постоянство энтропии может рассматриваться как критерий необратимости и обратимости процессов, происходящих в замкнутой системе. При необратимых процессах, в ходе которых система приближается к состоянию равновесия, энтропия увеличивается, при обратимых процессах — остается постоянной.

В виде важного примера необратимого процесса, происходящего в замкнутой системе, рассмотрим процесс, возникающий при соприкосновении частей системы, имеющих различные температуры.

Если соприкасаются две части системы, имеющие температуры θ_1 и θ_2 (для конкретности будем считать $\theta_2 > \theta_1$), то изменение энтропии замкнутой системы равно

$$\delta\sigma = \delta\sigma_1 + \delta\sigma_2 = \frac{\partial\sigma_1}{\partial E_1}\delta E_1 + \frac{\partial\sigma_2}{\partial E_2}\delta E_2 = \frac{\delta E_1}{\theta_1} + \frac{\delta E_2}{\theta_2} \geqslant 0.$$

Поскольку система является замкнутой, ее полная энергия сохраняется, так что

$$\delta E = \delta E_1 + \delta E_2 = 0.$$

Следовательно,

$$\delta\sigma = \delta E_1\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2}\right) \geqslant 0. \qquad (25,8)$$

Формула (25,8) показывает, что если $\theta_2 > \theta_1$, то из закона возрастания энтропии следует, что $\delta E_1 \geqslant 0$. Это означает, что первая часть, имеющая более низкую температуру, получает энергию от второй части. Иными словами, тепло всегда переходит от более нагретого к менее нагретому телу.

§ 26. Основное термодинамическое неравенство

Естественно прежде всего обобщить полученный нами закон возрастания энтропии на случай незамкнутых систем.

Такое обобщение может быть без труда сделано в случае систем незамкнутых, но теплоизолированных. Под теплоизолированными системами мы будем понимать системы, у которых все взаимодействие с окружающими телами сводится к возможному воздействию на систему внешних полей, т. е. изменению внешних параметров.

Изменение внешних полей, как это было выяснено в § 22, может приводить к изменению энергетических уровней системы (или энергий отдельных частиц в случае газов), но не приводит к изменению распределения вероятностей. Поэтому переход из менее вероятных к более вероятным состояниям в теплоизоли-

рованной системе происходит по тем же законам, что и в системе замкнутой. Можно непосредственно перенести результаты предыдущего параграфа на случай незамкнутых, но теплоизолированных систем, написав для них закон возрастания энтропии

$$\delta\sigma \geqslant 0. \qquad (26,1)$$

В общем случае незамкнутых систем, произвольным образом обменивающихся энергией с окружающими телами, можно написать неравенство

$$\delta\sigma \geqslant \frac{\delta Q}{\theta}. \qquad (26,2)$$

При квазистатических процессах оно переходит в равенство (24,1), при переходе к теплоизолированной системе — в неравенство (26,1).

Физически неравенство (26,2) означает, что при необратимых процессах энтропия системы возрастает на величину, избыточную по сравнению с $\frac{\delta Q}{\theta}$, на которую увеличивается энтропия вследствие получения системой тепла. Это избыточное по сравнению с $\frac{\delta Q}{\theta}$ возрастание энтропии связано с переходом в более вероятное состояние, т. е. приближением к равновесию.

Комбинируя (26,2) с основным термодинамическим равенством, можно написать для общего случая произвольных процессов в незамкнутых системах основное термодинамическое неравенство

$$\delta E \leqslant \theta\,\delta\sigma + \delta W, \qquad (26,3)$$

где знак равенства относится к обратимым процессам, а знак неравенства — к процессам необратимым.

Основное термодинамическое неравенство объединяет запись закона сохранения энергии и закона возрастания энтропии и может быть названо объединенной формой записи первого и второго начал термодинамики.

Полученные соотношения позволяют указать способ определения шкалы статистической и абсолютной температур.

Статистическая температура измеряется в эргах, тогда как на практике для измерения температуры пользуются другой системой единиц — градусами.

Важное значение имеет абсолютная шкала температур, в которой температура отсчитывается от абсолютного нуля и по своему существу идентична статистической температуре.

Для установления связи между статистической и абсолютной температурами необходимо найти лишь числовое выражение

энергетических единиц через градусы. Именно, можно написать

$$\theta = kT, \tag{26,4}$$

где постоянная k представляет переходный множитель, связывающий эрги с градусами. Он является некоторой универсальной постоянной, численное значение которой может быть получено только из опыта.

Величина k получила название постоянной Больцмана. Произведенные измерения (например, измерения теплоемкостей газов) показали, что $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град.*

Пользуясь абсолютной шкалой температур и вводя энтропию, выраженную в *эрг/град*, $S = k\sigma$, можем переписать формулы (25,4), (24,3) и (24,5) в виде

$$S = k \ln w + \text{const} = \frac{E}{T} + k \ln Z + \text{const}, \tag{26,5}$$

$$\delta E = T\,\delta S - p\,\delta V. \tag{26,6}$$

§ 27. Максимальная работа процессов. Невозможность построения вечного двигателя второго рода и феноменологическое определение энтропии

Мы можем теперь обратиться к рассмотрению вопросов, изучение которых исторически послужило толчком к созданию феноменологической термодинамики. Речь идет о вычислении полезной работы, которая может быть получена при изменении внутренней энергии системы. В термодинамике принято именовать тепловыми машинами устройства, предназначенные для получения работы.

Все тепловые машины можно разделить на два типа.

Машины первого типа выполняют полезную работу за счет последовательности замкнутых (круговых) циклов. К таким машинам относятся: паровые машины, паровые и газовые турбины, компрессоры, двигатели внутреннего сгорания и т. п. В итоге каждого цикла машина возвращается в первоначальное состояние.

Поэтому сама машина служит как бы передаточным механизмом, способствующим переходу внутренней энергии рабочего вещества в работу.

Машины второго типа совершают некруговые процессы, производя при этом полезную работу. В подобного рода устройствах машина — некоторая система, находящаяся первоначально в неравновесном состоянии, приходит в состояние равновесия. Переход в равновесное состояние сопровождается получением полезной работы.

К такого рода машинам относятся все устройства однократного действия. Чаще всего в таких устройствах полезная работа

получается за счет химических реакций, протекающих в системе. В виде примера можно указать на гальванические элементы, ракеты и т. п.

Рассмотрим вначале тепловые машины, совершающие замкнутые циклы (машины первого типа).

В рамках этой книги мы не можем, разумеется, подробно изучать теорию действия конкретных тепловых машин. Это задача технической термодинамики. Мы ограничимся лишь выяснением принципиальной стороны дела.

Именно, рассмотрим прежде всего вопрос о том, можно ли непосредственно превратить внутреннюю энергию — энергию теплового движения частиц, имеющихся в теле, в полезную работу.

Покажем, что существование такого устройства, которое мы назвали выше вечным двигателем второго рода, противоречит закону возрастания энтропии и поэтому невозможно. Для этого рассмотрим произвольную теплоизолированную систему, имеющую начальную энергию E_0, энтропию S_0 и внешние параметры λ_0. Предположим, что система, оставаясь теплоизолированной, неквазистатическим образом переходит за счет изменения внешних параметров в новое состояние с энергией E', энтропией S' и параметрами λ'. После этого система квазистатическим путем возвращается в состояние с внешними параметрами λ_0. При этом, однако, в конечном состоянии она будет иметь энтропию S' и энергию E', отличные от начальных значений энтропии и энергии.

Согласно закону возрастания энтропии для теплоизолированной системы $S' \geqslant S_0$. Но из условия $\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_\lambda = T > 0$, выражающего монотонность энергии как функции энтропии, следует, что возрастанию энтропии отвечает также возрастание внутренней энергии тела, т. е. $E' \geqslant E_0$.

В ходе рассмотренного процесса энергия теплоизолированного тела должна возрастать. Увеличение энергии может происходить только за счет работы, произведенной над системой внешними телами.

Таким образом, из закона возрастания энтропии следует, что рассмотренная система не только не может служить источником полезной работы, но, наоборот, при необратимом переходе ее в состояние с новой энергией над системой необходимо произвести работу.

Мы можем поэтому утверждать, что закон возрастания энтропии эквивалентен положению о невозможности создания вечного двигателя второго рода.

Разумеется, справедливо и обратное утверждение — из невозможности построения вечного двигателя второго рода

однозначно вытекает существование в замкнутой системе монотонно возрастающей функции состояния — энтропии (см. ниже).

Исходя из сформулированного принципа, можно было ввести в термодинамику энтропию и закон ее возрастания как количественное выражение второго начала термодинамики. Именно так развивалась термодинамика, и этот исторический порядок изложения термодинамики сохранен и в современных учебниках термодинамики.

Таким образом, ход исторического развития термодинамики был обратным той последовательности, которая была принята при изложении материала в нашей книге.

Возвращаясь к рассмотрению проблемы получения работы, замечаем, что для получения полезной работы необходимо иметь по крайней мере два тела, имеющих различные температуры, T_1 и T_2, т. е. систему тел, не находящихся в равновесии.

Прежде чем вычислить получаемую работу, покажем, что наибольшая работа получается при обратимом (квазистатическом) процессе.

Пусть изменение энергии в общем случае равно

$$\delta E = \delta Q + \delta W.$$

При обратимом процессе то же изменение энергии можно написать в виде

$$\delta E = T\,\delta S + \delta W'.$$

Вычитая, находим

$$\delta W' - \delta W = T\,\delta S - \delta Q.$$

Но $T\delta S > \delta Q$, так что

$$\delta W' - \delta W > 0,$$

или

$$\delta W' > \delta W. \qquad (27,1)$$

Максимальная работа может быть получена при обратимом (квазистатическом) переходе. Для вычисления этой работы заметим прежде всего, что установление теплового контакта между телами с разной температурой приводит к необратимому переходу тепла и не сопровождается получением полезной работы.

Поэтому рабочее устройство должно включать три элемента:

1) систему с температурой T_2 (нагреватель),

2) вспомогательную систему, с помощью которой энергия переносится от более нагретого тела к менее нагретому без непосредственного контакта между ними (рабочее тело),

3) систему с температурой $T_1 < T_2$ (холодильник).

Энергия $\delta E_2 = \delta Q_2$ передается от нагревателя рабочему телу обратимым образом. Для этого необходимо, чтобы температуры

нагревателя и рабочего тела были равны друг другу в течение всего процесса передачи тепла (изотермический процесс). При этом $\delta Q_2 = T_2 \delta S_2$.

Часть полученной от нагревателя энергии должна быть передана холодильнику (в противном случае мы получили бы вечный двигатель второго рода), а часть превращена в полезную работу. При этом баланс энергии гласит:

$$\delta Q_2 + \delta Q_1 = -\delta W.$$

Для того чтобы избежать необратимых процессов, тепло δQ_1 должно передаваться холодильнику изотермическим образом при температуре холодильника T_1. Поэтому рабочее тело должно теплоизолированно и обратимо перейти от температуры T_2 к температуре T_1, после чего квазистатически передать холодильнику количество тепла δQ_1. Для повторения процесса рабочее тело возвращается теплоизолированно (адиабатически) к температуре T_2. Этот замкнутый цикл получил название цикла Карно.

Поскольку все процессы в системе (нагреватель + рабочее тело + холодильник) обратимы, полное изменение энтропии

$$\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 = 0.$$

Для произведенной работы можно написать

$$-\delta W = \delta Q_2 + \delta Q_1 = T_2 \delta S_2 + T_1 \delta S_1 = \\ = (T_2 - T_1)\delta S_2 = \frac{T_2 - T_1}{T_2}\delta Q_2 = \frac{T_2 - T_1}{T_2}\delta E_2.$$

Отношение произведенной работы к количеству затраченной энергии носит название коэффициента полезного действия (к. п. д.) η. В нашем случае

$$\eta = \eta_{\text{макс}} = \frac{(-\delta W)}{\delta E_2} = \frac{\delta Q_2 + \delta Q_1}{\delta Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}. \qquad (27,2)$$

Из смысла проведенного вывода ясно, что полученный к. п. д. имеет максимально возможное значение. Если в тепловой машине происходят необратимые процессы, то всегда $\eta < \eta_{\text{макс}}$.

Таким образом, максимальным коэффициентом полезного действия обладает обратимая машина, работающая по замкнутому циклу Карно. Значение коэффициента полезного действия не зависит от природы рабочего тела и определяется исключительно отношением перепада температур $T_2 - T_1$ к температуре нагревателя T_2.

Воспроизведем теперь кратко ход рассуждений, который привел к введению понятия энтропии в феноменологической термодинамике. Он, до известной степени, был обратным нашему,

Из соотношения (27,2) следует

$$\frac{\delta Q_2}{T_2}+\frac{\delta Q_1}{T_1}=0. \qquad (27,3)$$

Отношение количества тепла δQ, полученного при некоторой температуре T, к величине этой последней, $\frac{\delta Q}{T}$, Клаузиусом было названо приведенным теплом. Следовательно, алгебраическая сумма приведенных теплот для цикла Карно равна нулю. Этот результат был получен нами с помощью формулы, связывающей изменение количества тепла с абсолютной температурой и энтропией. Однако для идеального газа количество тепла, получаемого и отдаваемого при изотермическом процессе, и изменение температуры при адиабатическом процессе могут быть найдены непосредственно. Это позволяет найти к. п. д. обратимой машины, работающей по циклу Карно с идеальным газом, как рабочим веществом, который совпадает, конечно, с (27,2). Таким образом, формулы (27,2) и (27,3) могут быть получены и без введения энтропии.

Рассмотрим теперь тепловую машину, совершающую произвольный обратимый цикл. Этот цикл можно разбить на бесконечное число бесконечно малых циклов Карно. Просуммировав по всем элементарным циклам соотношение (27,3), можем написать

$$\oint\frac{dQ}{T}=0. \qquad (27,4)$$

Отсюда следует, что величина $\frac{dQ}{T}$ представляет полный дифференциал некоторой функции состояния системы S. При круговом процессе полное изменение функции S равно нулю. Функция S получила название энтропии.

Закон постоянства энтропии при обратимом процессе в замкнутой системе (не получающей и не отдающей тепла) непосредственно следует из ее определения. Для нахождения изменения энтропии при необратимом процессе рассматривается переход из некоторого начального состояния A в конечное состояние B по двум путям — обратимому и необратимому. Изменение внутренней энергии, также являющейся функцией состояния, равно

$$\delta E=E_A-E_B$$

и не зависит от пути перехода.

Изменение энтропии на обратимом пути связано с полученным теплом δQ соотношением $\delta S=\frac{\delta Q}{T}$. Поэтому на обратимом пути

$$\delta E=T\,\delta S+\delta W_{\text{обр}}=T\,\delta S-|\delta W_{\text{обр}}|, \qquad (27,5)$$

где $|\delta W_{обр}|$ — работа, произведенная системой над внешними телами. При переходе по необратимому пути произведенная работа будет меньше, чем на обратимом (в противном случае к. п. д. необратимого замкнутого цикла был бы больше к. п. д. цикла Карно). Поэтому, учитывая, что

$$\delta E = \delta Q + \delta W_{необр} = \delta Q - |\delta W_{необр}|, \qquad (27,6)$$

и вычитая (27,5) из (27,6), находим

$$T\,\delta S = \delta Q + |\delta W_{обр}| - |\delta W_{необр}|,$$

или, поскольку $|\delta W_{обр}| > |\delta W_{необр}|$,

$$T\delta S > \delta Q. \qquad (27,7)$$

Отсюда следует, что изменение энтропии при переходе $A \to B$ по необратимому пути

$$\delta S > \frac{\delta Q}{T}. \qquad (27,8)$$

В замкнутой системе необратимый переход сопровождается возрастанием энтропии:

$$\delta S > 0. \qquad (27,9)$$

Таким образом, исходя из факта невозможности создания вечного двигателя второго рода, можно было прийти к условию (27,3). Закон возрастания энтропии получается из (27,3), как прямое следствие, и оказывается, следовательно, эквивалентным исходной предпосылке.

§ 28. Максимальная работа некруговых процессов и термодинамические потенциалы

Рассмотрим теперь вопрос о максимальной работе, которая может быть выполнена системой, совершающей некруговой процесс (тепловой машиной второго рода). Пусть некоторая система (мы будем называть ее основной системой) находится в термостате — среде, в которой поддерживается постоянная температура T_0 и давление p_0. Между системой и средой имеет место взаимодействие — обмен теплом и работой. Кроме основной системы и среды пусть имеется некоторое теплоизолированное тепло, над которым система может производить механическую работу. Это тело будем называть объектом работы, а совершенную над ним работу — полезной работой.

Пусть основная система переходит из начального состояния в некоторое конечное состояние, производя при этом полезную работу $(-\delta W)$.

Если бы система не взаимодействовала со средой, полезная работа (δW) была бы равна изменению ее энергии δE.

Непрерывное взаимодействие основной системы со средой в процессе выполнения полезной работы существенно изменяет это соотношение.

Именно, в то время как основная система выполняет полезную работу, среда в свою очередь может обмениваться энергией с системой.

Поэтому баланс энергии в замкнутой системе (основная система + среда + объект работы) должен быть записан в виде

$$\delta E + \delta E_0 = \delta W, \tag{28,1}$$

где δE_0 — изменение энергии среды, которое можно записать в виде

$$\delta E_0 = \delta Q_0 + \delta W_0.$$

Здесь δQ_0 — тепло, переданное основной системе средой, и δW_0 — работа, произведенная средой над системой. Размеры среды настолько велики, что при любых взаимодействиях с системой в среде происходит бесконечно медленный квазистатический процесс. Среда находится в состоянии равновесия с температурой T_0 и давлением p_0, которое не нарушается при любых процессах в основной системе.

Поэтому для среды можно написать

$$\delta E_0 = T_0 \delta S_0 - p_0 \delta V_0. \tag{28,2}$$

Поскольку объем замкнутой системы (основная среда + система) должен оставаться постоянным, имеем

$$\delta V_0 + \delta V = 0. \tag{28,3}$$

Из (28,1), (28,2) и (28,3) находим

$$\delta W = \delta E + T_0 \delta S_0 + p_0 \delta V. \tag{28,4}$$

Напишем закон возрастания энергии в замкнутой системе (основная система + среда) в виде

$$\delta S + \delta S_0 \geqslant 0.$$

Заменяя в (28,4) δS_0 на δS, находим

$$\delta W \geqslant \delta E - T_0 \delta S + p_0 \delta V = \delta R, \tag{28,5}$$

где величина R равна

$$R = E + p_0 V - T_0 S. \tag{28,6}$$

Согласно сказанному в предыдущем параграфе, наибольшая полезная работа может быть произведена над объектом работы при обратимом процессе, в данном случае обратимом процессе в системе, так как в среде процесс всегда обратим. При этом

в (28,4) должен быть оставлен только знак равенства, и мы приходим к соотношению

$$|\delta W|_{\text{макс}} = -\{\delta E + p_0\delta V - T_0\delta S\} = -\delta R. \qquad (28,7)$$

Таким образом, максимальная полезная работа по абсолютной величине равна убыли величины R. В R входят как величины, относящиеся к системе (именно, E, V, S), так и величины, относящиеся к среде (p_0, T_0).

Конкретное выражение для $\delta W_{\text{макс}}$, содержащее только характерные параметры системы, может быть получено лишь для некоторых специального вида процессов, происходящих в системе.

Предположим, что система совершает изотермический процесс $T = T_0 = \text{const}$ и объем системы не изменяется. В случае системы, находящейся во внешнем поле сил при заданных T и V, состояние системы полностью определено. Если, однако, система находится во внешнем поле или является неоднородной, например, представляет собой смесь реагирующих веществ, то при заданных T и V состояние системы может измениться. Получаемая при этом работа

$$|-\delta W| > \delta(E - TS) = \delta F, \qquad (28,8)$$

где обозначено

$$F = E - TS. \qquad (28,9)$$

Величина F, являющаяся мерой работы, которая может быть получена при изотермо-изохорическом процессе, происходящем в системе, взаимодействующей со средой, именуется свободной энергией системы. Мы видим, что на получение полезной работы может быть затрачена лишь часть внутренней энергии системы. Часть же, равная (TS) и именуемая связанной энергией, остается в системе.

Другим важным случаем является процесс при постоянной температуре $T = T_0 = \text{const}$ и постоянном давлении $p = p_0 = \text{const}$. При этом

$$|-\delta W| \geqslant \delta(E + pV - TS) = \delta\Phi, \qquad (28,10)$$

где

$$\Phi = E + pV - TS, \qquad (28,11)$$

носит название термодинамического потенциала Гиббса.

Термодинамический потенциал является мерой работы при изотермо-изобарическом процессе, подобно тому как свободная энергия служит мерой работы при изотермо-изохорическом процессе и внутренняя энергия — в теплоизолированной системе.

Можно легко показать, что полученные выражения справедливы не только при постоянстве температуры и давления или объема, но также и в том случае, когда равенства $T = T_0$ и

$p = p_0$ или $T = T_0$ и $\Delta V = 0$ имеют место только в начальном и конечном состояниях системы. Действительно, например, при $T_{\text{нач}} = T_{\text{кон}} = T_0$ и $V_{\text{нач}} = V_{\text{кон}}$ имеем

$$-|\Delta W| = (E - T_0 S + p_0 V_{\text{кон}}) - (E - T_0 S + p_0 V_{\text{нач}}) = \Delta F.$$

§ 29. Свойства термодинамических потенциалов

Рассмотрим случай, когда работа $(-\delta W)$, производимая системой, находящейся в среде, равна нулю.

Тогда формула (28,5) приобретает вид

$$\delta R = \delta(E - T_0 S + p_0 V) \leqslant 0. \qquad (29,1)$$

Знак равенства относится к обратимым процессам, знак неравенства — к необратимым. Величина R при всех процессах, происходящих в системе, взаимодействующей со средой, не увеличивается.

Для частных случаев выражение (29,1) упрощается.

В случае замкнутой системы $\delta E = 0$ и $\delta V = 0$, так что (29,1) превращается в прежнее соотношение:

$$\delta S \geqslant 0. \qquad (29,2)$$

Другими важными случаями являются изотермо-изохорический и изотермо-изобарический процессы, происходящие в системе, при которых ее температура или давление равны соответствующим величинам для среды. В первом случае $T = T_0$ и $\delta V = 0$, так что имеет место неравенство

$$\delta(E - T_0 S) = \delta F \leqslant 0. \qquad (29,3)$$

Во втором случае $T = T_0$ и $p = p_0$. Тогда

$$\delta(E - T_0 S + p_0 V) = \delta \Phi \leqslant 0. \qquad (29,4)$$

Таким образом, при необратимом изотермо-изохорическом процессе, происходящем в системе, взаимодействующей со средой, ее свободная энергия уменьшается. При обратимом изотермо-изохорическом процессе свободная энергия остается постоянной. Свободная энергия является аналогом энтропии и подобно энтропии служит критерием обратимости и необратимости процесса.

Если, например, некоторое вещество изотермически растворяется в значительном объеме растворителя, то температура и объем системы остаются постоянными. Свободная энергия образовавшегося раствора будет меньше, чем свободная энергия растворителя и растворенного вещества, так что процесс является необратимым.

Аналогичными свойствами обладает термодинамический потенциал, но при изотермо-изобарическом процессе. На практике

изотермо-изобарические процессы встречаются особенно часто, так как с экспериментальной точки зрения всегда легче реализовать условия для поддержания постоянного давления, чем постоянного объема. Например, в случае химических реакций гораздо проще сохранять постоянное давление в реакционном сосуде, чем поддерживать постоянный объем реагирующей смеси.

Свободная энергия и термодинамический потенциал играют весьма существенную роль в термодинамике. Из неравенств (29,3) и (29,4) видно, что они заменяют энтропию в случае незамкнутых систем, тогда как из (28,8) и (28,10) следует, что они одновременно являются аналогами внутренней энергии.

Напишем выражения для изменения свободной энергии и термодинамического потенциала при обратимом процессе. В общем случае формула (26,6) имеет вид

$$\delta E = T\delta S - p\delta V. \qquad (29,5)$$

Вычитая из нее $\delta(TS)$, по определению свободной энергии, находим

$$\delta F = -S\delta T - p\delta V. \qquad (29,6)$$

Таким образом, свободная энергия является функцией переменных T и V (или λ). Из формулы (29,6) получаем

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \qquad (29,7)$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T. \qquad (29,8)$$

Эти формулы аналогичны формулам (24,6).

Поэтому свободная энергия является потенциалом по отношению к переменным T, V и λ. Величины S, p и Λ, получающиеся из F дифференцированием, играют роль обобщенных сил.

Особенно важной является формула (29,8). Она определяет зависимость давления от объема и температуры, т. е. представляет собой уравнение состояния.

Прибавляя к (29,6) полный дифференциал $\delta(pV)$ и учитывая определение термодинамического потенциала, имеем

$$\delta\Phi = \delta(E - TS + pV) = -S\delta T + V\delta p. \qquad (29,9)$$

Таким образом, термодинамический потенциал Гиббса является потенциалом по отношению к переменным T и p. Роль обобщенных сил играют величины S и V:

$$S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p, \qquad (29,10)$$

$$V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T. \qquad (29,11)$$

Поскольку на практике удобнее всего изменять или поддерживать постоянными температуру и давление, термодинамический

потенциал Гиббса особенно часто применяется и иногда называется основным потенциалом.

Потенциалом относительно пары переменных p и S служит величина, называемая энтальпией:

$$H = E + pV. \tag{29,12}$$

Для нее легко получить

$$\delta H = T\delta S + V\delta p, \tag{29,13}$$

откуда

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p, \tag{29,14}$$

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S. \tag{29,15}$$

Если, кроме объема, состояние системы зависит от других внешних параметров λ, то формулы (29,6), (29,9) и (29,13) могут быть обобщены и записаны в виде

$$\delta F = -S\,\delta T - p\,\delta V - \Lambda\,\delta\lambda, \tag{29,16}$$

$$\delta\Phi = S\,\delta T - V\,\delta p - \Lambda\,\delta\lambda, \tag{29,17}$$

$$\delta H = S\,\delta T + V\,\delta p - \Lambda\,\delta\lambda \tag{29,18}$$

и, соответственно,

$$\Lambda = -\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{T,V} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\right)_{S,V} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{T,p}. \tag{29.19}$$

Как будет видно из дальнейшего, термодинамические потенциалы и их производные полностью определяют термодинамическое поведение произвольной системы. Ниже мы рассмотрим методы теоретического и экспериментального определения термодинамических потенциалов. Однако предварительно необходимо получить ряд термодинамических соотношений, связывающих термодинамические потенциалы и их производные между собой и с непосредственно измеряемыми величинами.

§ 30. Некоторые термодинамические соотношения

Важнейшую роль в термодинамике играют теплоемкости: теплоемкость при постоянном объеме C_V и постоянном давлении C_p, которые определяются соотношениями:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V, \tag{30.1}$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p. \tag{30,2}$$

Используя формулу (26,6), находим

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V. \qquad (30,3)$$

Аналогично

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p. \qquad (30,4)$$

Из определения теплоемкостей ясно, что они являются аддитивными величинами. Обычно удобно пользоваться молярными теплоемкостями, отнесенными к 1 грамм-молю вещества. В дальнейшем, если это особо не оговорено, мы будем пользоваться молярными теплоемкостями. Теплоемкости представляют непосредственно измеряемые термодинамические характеристики вещества.

Другим важным соотношением является формула (29,8). Поскольку свободная энергия является функцией независимых переменных T и V, формула (29,8) может быть записана в виде

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = f(T, V). \qquad (30.5)$$

Она определяет зависимость давления от температуры и объема, т. е. представляет уравнение состояния тела.

Продифференцируем формулы (24,6), (29,7), (29,10) и (29,14) вторично, образовав вторые смешанные производные. Имеем, очевидно,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right) = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right) = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \qquad (30,6)$$

и, аналогично,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \qquad (30,7)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p\,\partial T} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \qquad (30,8)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial S} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p. \qquad (30,9)$$

Формулы (30,6)—(30,9) носят названия перекрестных соотношений Максвелла.

Особенно важными являются второе и третье из этих соотношений. Они связывают производные от энтропии с непосредственно измеряемыми величинами $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ и $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Термодинамические потенциалы E и F, и H и Φ не являются независимыми друг от друга. Легко установить связь между ними, если воспользоваться их определениями и определением энтропии. Так, из (28,9) и (29,7) находим

$$E = F + TS = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V. \tag{30,10}$$

Аналогично

$$H = \Phi - T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p. \tag{30,11}$$

Формулы (30,10) и (30,11) носят название уравнений Гиббса — Гельмгольца.

Уравнения Гиббса — Гельмгольца можно записать также в виде

$$\left(\frac{\partial\left(\frac{F}{T}\right)}{\partial T}\right)_V = -\frac{E}{T^2}, \tag{30,12}$$

$$\left(\frac{\partial\left(\frac{\Phi}{T}\right)}{\partial T}\right)_p = -\frac{H}{T^2}. \tag{30,13}$$

Если известны зависимости энергии и энтальпии от температуры, интегрирование уравнений Гиббса — Гельмгольца позволяет найти зависимость от температуры свободной энергии и термодинамического потенциала:

$$F = -T\int \frac{E}{T^2}\,dT + \text{const}\cdot T, \tag{30,14}$$

$$\Phi = -T\int \frac{H}{T^2}\,dT + \text{const}\cdot T. \tag{30,15}$$

§ 31. Приемы преобразования термодинамических величин

В термодинамике часто приходится производить преобразования термодинамических величин, например, преобразования переменных или замену одних величин, поддерживаемых постоянными в ходе процесса, другими. Такие преобразования нужно совершать по общим правилам замены переменных при дифференцировании по нескольким переменным. Один из приемов таких преобразований мы здесь приведем [1]).

---

[1]) Другой прием, основанный на использовании свойств якобианов, см. в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, Статистическая физика, Гостехиздат, 1951, § 16.

Пусть задана тройка переменных величин (x, y, z) такая, что каждую из них можно считать однозначной функцией двух других, т. е.

$$z = z(x, y),$$
$$y = y(x, z),$$
$$x = x(y, z).$$

Найдем связь между производными $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$.

Для этого напишем очевидные равенства:

$$\left.\begin{aligned} dz(x, y) &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy, \\ dx &= \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz. \end{aligned}\right\} \quad (31.1)$$

Подставляя dx из нижнего равенства в верхнее, имеем

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\right] dy + dz. \quad (31{,}2)$$

Поскольку dy — произвольная бесконечно малая величина, для выполнения (31,2) необходимо, чтобы

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0.$$

Отсюда следует искомое соотношение:

$$\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z. \quad (31{,}3)$$

Рассмотрим еще случай, когда имеются четыре величины (x, y, z, t), причем каждая пара величин полностью определена, если задана другая пара, т. е.

$$t = t(x, y) = t(y, z) = t(x, z)$$

и т. д.

Представляя t как функцию пары переменных x и y, имеем

$$dt = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_x dy. \quad (31{,}4)$$

То же изменение величины t как функции y и z можно написать в виде

$$dt = \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)_y dz. \quad (31{,}5)$$

Подставляя в (31,4) выражение dx из (31,1) находим

$$dt=\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_x\right]dy+\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz=$$
$$=\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_x\right]dy+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)_y dz. \qquad (31,6)$$

Сравнивая (31,5) и (31,6), находим

$$\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_z=\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_x+\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z. \qquad (31,7)$$

Приведем несколько примеров использования соотношений (31,3) и (31,7).

1. Найти связь между производными $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ и $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$; производными $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$ и $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$.

По формуле (31,3) имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}&=-\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S;\\ \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p}&=-\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S.\end{aligned}\right\} \qquad (31,8)$$

2. Термическими коэффициентами именуются величины:

$\alpha=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — коэффициент теплового расширения,

$\beta=\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ — термический коэффициент давления,

$\delta=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ — изотермическая сжимаемость.

Найти связь между ними.

Из определений α и β и (31,3) следует

$$\frac{\alpha}{\delta}=-\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=p\beta. \qquad (31,9)$$

3. Найти отношение адиабатической и изотермической сжимаемостей, выразив его через теплоемкости.

Адиабатическая сжимаемость определяется как

$$\gamma_S=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S. \qquad (31,10)$$

Аналогично, изотермическая сжимаемость будет

$$\gamma_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T. \tag{31,11}$$

По формуле (31,3) находим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V}{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p}; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}.$$

Деля первое равенство на второе, имеем

$$\frac{\gamma_S}{\gamma_T} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p} = \frac{C_V}{C_p}. \tag{31,12}$$

4. Найти связь между $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$ и $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$.

По формуле (31,3) имеем

$$\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p} = -\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H. \tag{31,13}$$

5. Найти связь между теплоемкостями $C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ и $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$.

Поскольку устанавливается связь между четырьмя величинами S, T, p и V, следует воспользоваться формулой (31,7). Она дает

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Из соотношения Максвелла (30,7) и определения теплоемкостей находим

$$C_p = C_V + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{31,14}$$

С помощью (31,9) можно написать

$$C_p = C_V - \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = C_V + \frac{\alpha^2 T V}{\delta}. \tag{31,15}$$

6. Найти связь между изотермической сжимаемостью $\gamma_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ и адиабатической сжимаемостью $\gamma_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$. Используя (31,7), имеем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T.$$

С помощью формулы (30,8) и равенства

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$$

получаем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S - \frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S - \frac{TV^2\alpha^2}{C_p},$$

или

$$\gamma_T = \gamma_S + \frac{TV\alpha^2}{C_p}. \qquad (31,16)$$

§ 32. Определение термодинамических величин методами статистической физики

Для определения введенных нами термодинамических величин существуют две возможности:

1) вычисление их методами статистической физики,

2) нахождение их на основе некоторых тепловых измерений.

Мы начнем с разбора методов вычисления термодинамических величин.

Как видно из формулы (21,3), внутренняя энергия любого тела может быть найдена, если известна его функция состояний Z. Согласно (24,8) энтропия также требует для своего нахождения вычисления функции состояний.

Подставляя в определение свободной энергии значение S по (24,8), имеем

$$F = E - TS = -kT \ln Z. \qquad (32,1)$$

Выражение F через Z оказывается особенно простым.

Напишем еще явное выражение для давления. Согласно (22,5) и (22,3) можно написать

$$-p\,\delta V = \sum (w_i\,\delta\varepsilon_i)_{w_i},$$

откуда

$$p = -\frac{\sum \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial V} e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i)}{Z}. \qquad (32,2)$$

При этом мы воспользовались тем, что распределение вероятностей остается неизменным, и подставили его явное выражение. Формулу (32,2) можно переписать в стандартном виде, выразив ее через функцию состояний Z. Для этого заметим, что

$$\frac{\partial Z}{\partial V}=\frac{\partial}{\partial V}\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)=-\frac{1}{\theta}\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial V}\Omega(\varepsilon_i). \qquad (32,3)$$

Поскольку $\Omega(\varepsilon_i)$ представляет число состояний с данной энергией, оно не зависит от объема системы и его не нужно дифференцировать.

Из (32,3) следует:

$$\frac{\partial\ln Z}{\partial V}=\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial V}=-\frac{1}{\theta Z}\sum\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial V}e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i). \qquad (32,4)$$

Сравнивая (32,4) и (32,2), мы видим, что давление может быть представлено в виде

$$p=\theta\frac{\partial\ln Z}{\partial V}=kT\frac{\partial\ln Z}{\partial V}. \qquad (32,5)$$

Сопоставляя выражение (32,5) с выражением (32,1) для свободной энергии, находим в соответствии с (29,8)

$$p=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T. \qquad (32,6)$$

Из формулы (32,6) следует, что, зная функцию состояний системы Z, можно найти уравнение состояния системы. Действительно, поскольку $F=f(V, T)$, формула (32,6) устанавливает связь между давлением, объемом и температурой системы.

Из хода доказательства видно, что никоим образом нельзя отождествить среднее значение производной $\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial V}$, т. е. $\overline{\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial V}}$, с производной по объему от средней энергии $\frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial V}$, т. е. $\frac{\partial E}{\partial V}$. Последняя величина в силу (30,10) и (29,8), очевидно, равна

$$\frac{\partial E}{\partial V}=\frac{\partial}{\partial V}\left(F-T\frac{\partial F}{\partial T}\right)=-p+T\frac{\partial p}{\partial T}.$$

В дальнейшем изложении важную роль будет играть термодинамический потенциал Гиббса Φ. Найдем его статистическое выражение. Из определения термодинамического потенциала следует, что, в отличие от свободной энергии, он является функцией давления, а не объема. Иными словами, Φ является функцией обобщенной силы $\Lambda=p$, а не обобщенной координаты

$\lambda = V$. Именно с этим обстоятельством связана важная роль Ф в термодинамике — на опыте проще поддерживать постоянное значение давления и других обобщенных сил, чем объема и соответствующих обобщенных координат.

Для получения статистического выражения для Ф необходимо найти зависимость функции состояний Z от обобщенной силы (давления p) как независимой переменной, т. е.

$$Z = Z(T, p).$$

В ходе предыдущего изложения мы считали, что энергетические уровни системы зависели от параметра λ, т. е. $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\lambda)$. Теперь мы будем считать переменной силу Λ, а значение λ — функцией Λ.

Рассмотрим в качестве примера сосуд с идеальным газом, обладающий подвижной стенкой. Если независимой переменной является внешний параметр — объем сосуда, системой является газ в сосуде. Если же независимой переменной является действующая сила — внешнее давление, подвижную стенку следует включить в состав системы.

Таким образом, подсистему образуют N молекул газа и подвижная стенка сосуда, так что всего подсистема будет иметь $3N+1$ степеней свободы. Состояние ее будет характеризоваться координатами и импульсами всех молекул, а также положением и импульсом подвижной стенки.

На подвижную стенку будет действовать давление p. Изменение давления будет приводить к изменению объема системы. Последнее в свою очередь приводит к смещению энергетических уровней системы. Напишем энергию системы (газ+подвижная стенка) в виде

$$\varepsilon_i(p) = \varepsilon_i + (\varepsilon_{\text{кин}} + \varepsilon_{\text{пот}}),$$

где ε_i — энергия газа и $(\varepsilon_{\text{кин}} + \varepsilon_{\text{пот}})$ — энергия стенки.

Для нахождения потенциальной энергии стенки $\varepsilon_{\text{пот}}$ заметим, что работа, совершаемая над системой при изменении внешнего давления p на величину δp, равна

$$\delta W_p = -V\delta p.$$

Поэтому для $\varepsilon_{\text{пот}}$ можно написать

$$\varepsilon_{\text{пот}} = Vp.$$

Кинетической энергией теплового движения стенки $\varepsilon_{\text{кин}}$ можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией молекул газа (поскольку число последних весьма велико). Поэтому окончательно имеем

$$\varepsilon_i(p) = \varepsilon_i + pV.$$

Функция состояний системы имеет вид

$$Z(p,\ T)=\int\sum_{i}e^{-\frac{\varepsilon_i+pV}{kT}}\,\Omega(\varepsilon_i)\,dV, \qquad (32,7)$$

где суммирование ведется по всем уровням системы (значение ε_i зависит от V), а интегрирование — по всему объему системы. По аналогии с (32,1) можно написать

$$\Phi=-kT\ln Z(p,\ T). \qquad (32,8)$$

Формула (32,8) показывает, что логарифмы функции состояний представляет свободную энергию в широком смысле: F в случае переменной V и Φ в случае переменной p. Поскольку в предыдущих рассуждениях не фигурировали конкретная природа системы, а также характер обобщенной силы, полученное выражение для Φ остается справедливым для любой системы и при любой обобщенной силе.

Из формулы (32,8) можно найти средний объем системы

$$V=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_T=-kT\frac{\partial\ln Z(p,\ T)}{\partial p}. \qquad (32,9)$$

Найденные нами соотношения позволяют непосредственно выразить термодинамические функции — внутреннюю энергию тела, его свободную энергию, энтропию и давление через функцию состояний Z. Значение функции состояний определяется молекулярными свойствами системы — ее возможными энергетическими состояниями, а также температурой T и объемом или давлением.

Таким образом, мы приходим к важному выводу. Статистическая физика позволяет находить значения термодинамических величин чисто расчетным путем, если только известны энергетические уровни системы и статистические веса соответствующих состояний.

Однако роль и значение статистической физики не сводятся к этому весьма важному, но все же частному результату. Она позволяет придать термодинамическим величинам и понятиям более глубокий смысл и вскрывает физические законы, лежащие в основе термодинамического поведения системы. Так, мы видели, что понятия термодинамической энергии, работы, энтропии и количества тепла получили ясную физическую интерпретацию. Все эти понятия были связаны с молекулярными процессами, происходящими в системе. В полученных нами формулах нашло математическое выражение общее утверждение о том, что теплота является формой движения.

Правда, до сих пор мы не рассматривали конкретных физических систем, не детализировали характера молекулярного

движения и квантовых состояний системы. Конкретизации найденных закономерностей будут посвящены следующие главы, в которых общие законы статистической физики будут применены к различным физическим системам.

Та общность, с которой мы формулировали статистические законы, имеет очень существенные преимущества. Именно, благодаря общности статистических законов, найденных первоначально для систем, подчиняющихся законам классической механики, они и поныне нисколько не устарели и подверглись лишь незначительным видоизменениям, связанным с заменой классических систем квантовыми. Эта же общность законов статистической механики позволила не ограничивать круг ее рассмотрения чисто тепловыми процессами, которые составили первоначальную основу статистики, но включить в него самые разнообразные свойства вещества — электрические, магнитные, химические и т. п. Эти свойства вещества будут рассмотрены в ч. IV книги. Пока же мы ограничимся изучением тепловых свойств вещества.

§ 33. Определение термодинамических величин из опытных данных

Рассмотрим теперь общие методы нахождения термодинамических величин из опытных данных. Прежде чем перейти к термодинамическим потенциалам, обсудим вопрос об установлении шкалы абсолютной температуры. Для получения этой шкалы необходимо найти некоторую взаимосвязь между абсолютной температурой и эмпирической температурой, измеряемой в произвольной шкале любым термометром.

Найдем связь между величинами $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T$ и $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S$, воспользовавшись формулой (31,7):

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T=\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S+\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T.$$

Пользуясь (24,6) и (30,7), имеем

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T=-p+T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$

Пусть теперь температура измеряется в произвольной эмпирической шкале температур t, для которой можно написать

$$t=f(T) \quad \text{или} \quad T=\varphi(t).$$

где f — неизвестная функция. Тогда, очевидно,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T=\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_t, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_V\frac{dt}{dT}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_t = -p + \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_V \frac{dt}{d\ln T},$$

откуда

$$\frac{d\ln T}{dt} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_V}{\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_t + p} = \psi(t,\ V). \qquad (33,1)$$

В правой части уравнения (33,1) стоят только непосредственно измеряемые величины, выражаемые через объем V и эмпирическую температуру t Поэтому, определив на опыте функцию $\psi(t,\ V)$, можно, проинтегрировав (33,1), найти зависимость T от t Фактически для установления абсолютной шкалы температур, например, при температурах, близких к абсолютному нулю или очень высоких, пользуются не только тепловыми, но и магнитными или оптическими методами измерений.

Перейдем теперь к методам нахождения термодинамических величин. Проще всего определение энтальпии.

При постоянном давлении

$$dH = T\,dS = C_p\,dT.$$

Интегрируя, имеем

$$H = \int_{T_1}^{T} C_p(T)\,dT + H_1. \qquad (33,2)$$

Для экспериментального нахождения $H(T)$ необходимо измерить теплоемкость C_p во всем интервале температур и знать H_1 при некоторой температуре. Если, как это обычно бывает, нас интересуют изменения теплосодержания, то

$$\Delta H = H(T) - H(T_1) = \int_{T_1}^{T} C_p(T)\,dT$$

и постоянная H_1 выпадает.

Для абсолютного измерения H необходимо воспользоваться свойствами H при абсолютном нуле, устанавливаемыми третьим началом термодинамики (см. ниже § 35).

При плавлении и парообразовании происходит рост энтальпии при фиксированной температуре (см. § 62).

Нахождение энтропии производится по тем же значениям теплоемкости

$$S = \int_{T_1}^{T} \frac{C_p\,dT}{T} + S_1 = \int_{T_1}^{T} C_p d\ln T + S_1.$$

Значение S получается графическим интегрированием кривой $C_p = f(\ln T)$. Изменение энтропии

$$\Delta S = S(T) - S(T_1) = \int_{T_1}^{T} C_p d \ln T. \qquad (33,3)$$

Значение $S(0)$ определяется третьим началом термодинамики (см. § 35).

Для нахождения энтропии жидкости и пара необходимо учитывать изменение энтропии при поглощении скрытого тепла плавления и парообразования (см. § 62).

Зависимость энтропии от давления определяется из формулы (30,8):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -V\alpha.$$

Интегрируя, находим

$$S(T, p) = -\int_{p_1}^{p} \alpha V \, dp + S(T, p_1) \qquad (33,4)$$

или для изменения энтропии

$$S(T, p) - S(T, p_1) = -\int_{p_1}^{p} \alpha V \, dp. \qquad (33,5)$$

Зная уравнение состояния $V = V(T, p)$, можно найти коэффициент теплового расширения α и по формуле (33,5) — зависимость энтропии от давления.

Зная H, S и уравнение состояния, можно найти все остальные термодинамические потенциалы:

$$E = H - pV,$$
$$F = E - TS,$$
$$\Phi = F + pV.$$

Таким образом, для нахождения всех термодинамических потенциалов данного вещества необходимо:

1) измерить теплоемкость во всем интересующем интервале температур,

2) измерить коэффициент теплового расширения и

3) определить уравнение состояния.

При этом H, E и S определяются с точностью до некоторой постоянной, представляющей значение этих величин при некоторой температуре, F и Φ — с точностью до линейной функции температуры.

В заключение следует остановиться на термодинамических потенциалах химических соединений. При образовании химического соединения происходят изменения энтальпии ΔH и энтропии $\Delta S = \frac{\Delta H}{T}$ (§ 67). Соответственно термодинамические потенциалы химических соединений аддитивно слагаются из их значений для исходных веществ и их изменений в ходе реакции.

Введение термодинамических потенциалов позволяет в принципе определить термодинамические потенциалы любых сложных веществ, если известны термодинамические потенциалы входящих в них элементов и теплоты химических реакций образования соединений.

§ 34. Дросселирование

Важную роль в современной технике играет процесс, при котором газ, занимавший первоначально объем V_1 при постоянном давлении p_1, выходит из сосуда и переходит, снова при постоянном давлении p_2, в сосуд с объемом V_2. Этот процесс получил название процесса дросселирования или процесса Джоуля — Томсона.

Процесс дросселирования является одним из основных методов получения низких температур в современной криогенной технике. Фактически процесс дросселирования осуществляется путем медленного продавливания газа из одного сосуда в другой через систему тонких капилляров, представляющих большое гидродинамическое сопротивление протеканию газа. Большое гидродинамическое сопротивление обеспечивает малую макроскопическую скорость движения газа. Продавливание газа производится в адиабатических условиях, для чего аппарат покрывается теплоизолирующим материалом.

Поскольку к системе не подводится тепло, а диссипацией энергии из-за трения (ввиду малой скорости движения газа) можно пренебречь, изменение внутренней энергии газа ΔE равно механической работе, производимой над газом,

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W,$$

где E_1 и E_2 соответственно энергия газа в начальном и конечном состояниях. Последняя слагается из производимой над газом работы сжатия при давлении p_1 (от начального объема V_1 до конечного объема, равного нулю) и производимой газом работы расширения при давлении p_2 (от начального объема, равного нулю, до конечного объема V_2), т. е.

$$W = -\left(\int_{V_1}^{0} p_1\,dV + \int_{0}^{V_2} p_2\,dV\right) = -(p_2V_2 - p_1V_1).$$

Поэтому для процесса дросселирования можно написать

$$E_1 + p_1V_1 = E_2 + p_2V_2,$$

или

$$H_1 = H_2. \qquad (34.1)$$

Таким образом, процесс дросселирования представляет процесс при постоянной энтальпии газа.

Считая давления p_1 и p_2 весьма близкими (причем $p_2 < p_1$, $\Delta p < 0$), найдем изменение температуры газа с изменением давления в процессе дросселирования. Это изменение характеризуется производной $\chi = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$, именуемой характеристикой дифференциального эффекта дросселирования. Значение последней было найдено выше (см. (31,13)). Запишем (31,13) в виде

$$\chi = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = -\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p} = -\frac{\left(\frac{\partial (\Phi + TS)}{\partial p}\right)_T}{C_p} =$$

$$= -\frac{V + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T}{C_p} = -\frac{\left[-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V\right]}{C_p}. \qquad (34,2)$$

Применим прежде всего формулу (34,2) к идеальному газу. При этом, очевидно,

$$\chi = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = 0.$$

При дросселировании идеального газа не происходит изменения его температуры. Смысл этого результата очевиден: внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема и не изменяется при его расширении. Иначе дело обстоит с реальным газом, у которого энергия взаимодействия между молекулами и, следовательно, внутренняя энергия зависит от объема. Теория реального газа будет изложена в § 46—47.

В приближении уравнения (47,2) находим

$$\chi = -\frac{-T\left(\frac{dV}{dT}\right)_p + V}{C_p} \approx \frac{N\left(\beta - T\frac{d\beta}{dT}\right)}{2C_p},$$

где β — постоянная, входящая в уравнение Ван-дер-Ваальса. Поскольку $C_p > 0$, знак χ определяется знаком числителя. Из определения β (46,14) находим

$$\beta - T\frac{d\beta}{dT} = \int\left[e^{-\frac{u(r)}{kT}}\left(1 - \frac{u(r)}{kT}\right) - 1\right]dV. \qquad (34,3)$$

При высоких температурах в области притяжения $r > d$, $u(r) \ll kT$ и $e^{-u/kT} \approx 1$. В области отталкивания $r < d$, $u(r) \gg \gg kT$ и $e^{-\frac{u}{kT}} \ll 1$. При этом все подинтегральное выражение в (34,3) отрицательно и $\beta - T\frac{d\beta}{dT} < 0$. При низких температурах в области притяжения $r > d$, $|u(r)| \gg kT$ и $\frac{u(r)}{kT} \gg 1$. При этом подинтегральное выражение положительно и

$$\beta - T\frac{d\beta}{dT} > 0.$$

Таким образом, $\chi < 0$ и температура газа при дросселировании повышается при высоких температурах; $\chi > 0$ и температура газа при дросселировании понижается при низких температурах. При некоторой температуре, именуемой точкой инверсии данного газа, его коэффициент $\chi = 0$. Осуществляя дросселирование при температурах ниже точки инверсии, можно охлаждать газы до весьма низких температур. Дросселирование является одним из широко распространенных методов охлаждения газов.

§ 35. Третье начало термодинамики

Рассмотрим поведение некоторой макроскопической (термодинамической) системы при весьма низких температурах. Мы будем считать, что система находится в состоянии статистического равновесия с энергией $\bar{\varepsilon}$, так что ее энтропия определяется формулой Больцмана. Пусть возможные значения энергии системы (ее энергетические уровни) образуют последовательность ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 ..., где ε_0 — наименьшая возможная энергия (нормальный уровень системы), а ε_1, ε_2, ε_3 ... — возбужденные энергетические уровни. Уровни энергии весьма быстро сближаются с ростом возбуждения. Однако чрезвычайно важным является то обстоятельство, что расстояние $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \Delta\varepsilon$ между нормальным и первым возбужденным уровнями является конечной, хотя и чрезвычайно малой величиной.

Если температура системы достаточно низка, так что тепловая энергия kT значительно меньше расстояния между нижним и первым возбужденным уровнями, т. е. $kT \ll \Delta\varepsilon$, то тепловые возбуждения системы недостаточны для того, чтобы система могла попасть в состояние ε_1. Поэтому при весьма низкой температуре система должна находиться в состоянии с наименьшей энергией ε_0. Термодинамическая энергия системы равна, очевидно,

$$E_0 = \varepsilon_0 \qquad (35,1)$$

и не зависит от температуры $\left(\text{при } T \ll \frac{\Delta\varepsilon}{k}\right)$. Отсюда следует, что теплоемкость системы при постоянном объеме

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T}\right)_V = 0. \tag{35,2}$$

Найдем теперь энтропию системы. По формуле Больцмана энтропия равна

$$S = k \ln \Omega_0, \tag{35.3}$$

где Ω_0 — число состояний системы с энергией ε_0. Но при абсолютном нуле равновесная система находится во вполне определенном состоянии, энергия которого точно равна E_0. Мы знаем, однако, что если энергия системы точно определена, то тем самым определено состояние системы. Поэтому число состояний с энергией ε_0 равно просто единице[1]). Тогда из формулы (35,3) следует, что энтропия системы при абсолютном нуле равна нулю,

$$S = 0 \quad \text{при} \quad T \to 0. \tag{35,4}$$

Условие (35,4) было впервые установлено Нернстом и получило название третьего начала термодинамики, или тепловой теоремы Нернста. Оно было выведено не статистически, а на основе анализа экспериментальных данных, в частности, по тепловым эффектам химических реакций при низких температурах.

Условие (35,4) не является следствием первого и второго начал термодинамики. Вместе с тем его роль в современной термодинамике весьма существенна.

Как мы указывали уже в § 33, для определения значения термодинамических потенциалов из эмпирических или статистических данных нужно знать их значение при абсолютном нуле. Третье начало позволяет это сделать.

Необходимо подчеркнуть, что третье начало термодинамики тесно связано с квантовым характером системы. Если бы рассматриваемая нами система подчинялась законам классической механики, то ее энергия изменялась бы непрерывно. Поэтому, как бы ни была низка температура T, энергия теплового возбуждения kT, имеющаяся в системе, была бы бесконечно велика по сравнению с бесконечно малым расстоянием, на которое разделены энергетические уровни в классической системе. Конечному интервалу энергии kT соответствовало бы бесконечно большое число возможных состояний Ω. При этом энтропия

---

[1]) Если случайно состояние с энергией ε_0 является вырожденным и энергией ε_0 обладает несколько состояний, то дело не изменяется. Если $\Omega_0(\varepsilon_0)$ — небольшое число, то $k \ln \Omega_0(\varepsilon_0)$ практически равно нулю ввиду крайней малости k.

была бы велика при любой как угодно низкой (но конечной) температуре.

Квантовый характер реальных систем, весьма слабо проявляющийся при высоких температурах, приобретает, как мы видим, первостепенное значение при очень низких температурах. Это находится в полном согласии с общими положениями, высказанными в § 1. Недостатком этого рассуждения является то обстоятельство, что оно не учитывает флуктуаций в системе при низкой температуре.

При низкой температуре $T \to 0$ число эффективных степеней свободы становится малым и в системе возможны значительные флуктуации. Поэтому неясно, можно ли вообще говорить о задании в системе средних величин, в частности термодинамических функций.

Нужно еще сказать несколько слов по поводу постоянной энтропии. Хотя мы и пишем $S = 0$ при $T \to 0$, фактически следовало бы формулу (35,4) писать в виде (см. § 24)

$$S \to \text{const} \quad \text{при} \quad T \to 0. \tag{35,5}$$

Постоянная в формуле (35,5) не может быть определена, поскольку она является произвольной постоянной интегрирования.

Значение постоянной в (35,5) не зависит от давления, объема и других параметров, характеризующих состояние системы. В каком бы состоянии ни находилось вещество — в виде химического соединения или чистого вещества, при большой или малой плотности и т. п., — значение этой постоянной будет одним и тем же.

Разность энтропий двух термодинамических состояний одной системы, которые отличаются различными значениями параметров, стремится к нулю при $T \to 0$. Так, например, энтропия S_1 смеси двух молей элементов A и B и энтропия S_2 одного моля их соединения AB равны друг другу при $T \to 0$.

Именно такого типа утверждение следует из тех опытных данных, которые позволили установить третье начало в термодинамике. Довольно часто приходится встречаться с утверждением о том, что с помощью третьего начала термодинамики можно определить постоянную интегрирования в формуле для энтропии и тем самым определить ее абсолютное значение. Рассуждения этого параграфа и § 24 ясно показывают, что абсолютная величина энтропии не имеет физического смысла: энтропия по самому своему существу определена с точностью до произвольной постоянной.

Смысл третьего начала состоит не в том, что оно позволяет находить абсолютное значение энтропии, а в том, что оно устанавливает постоянство ее при $T \to 0$ (в смысле независимости от параметров, характеризующих состояние). Значение этой

постоянной может быть выбрано за начало отсчета значений энтропии.

Часто третье начало термодинамики формулируют как принцип недостижимости абсолютного нуля. Такая формулировка вытекает из условия (35,4). Если энтропия системы $S = 0$, то с ее помощью можно построить вечный двигатель второго рода, с помощью цикла из двух адиабат $S = S_1$ и $S = S_2$, соединенных изотермой $T = 0$ (на которой $S = 0$) и второй произвольной изотермой. Однако нужно заметить, что недостижимость абсолютного нуля не противоречит принципиальной возможности получения температур, как угодно мало отличающихся от $T = 0$.

В ходе предыдущих рассуждений считалось, что система находится в состоянии равновесия. Однако мы не делали никаких предположений относительно ее агрегатного состояния. Полученное нами выражение (35,4) должно быть справедливо в равной мере для твердых, жидких или газообразных систем.

Существует только одна система, остающаяся жидкой вблизи абсолютного нуля — гелий II. Что же касается газов, то все обычные газы при достаточном давлении конденсируются задолго до тех низких температур, при которых энтропия стремится к нулю. Поэтому упругость насыщенного пара над твердым телом при $T \to 0$ совершенно ничтожна. Существуют, однако, системы, которые можно условно считать газообразными при $T \to 0$. Это прежде всего электронный газ в металлах, свойства которого будут нами более подробно рассмотрены в § 79—80.

Все обычные вещества при достаточно низкой температуре переходят в твердое состояние. Нужно заметить, что, помимо истинных твердых тел — кристаллов, довольно много веществ находится в твердообразном, или аморфном, состоянии. Хотя аморфные тела могут обладать рядом свойств, очень сходных со свойствами истинно твердых тел, они в действительности представляют собой переохлажденные жидкости. На свойствах переохлажденных жидкостей мы остановимся несколько ниже.

Справедливость третьего начала термодинамики проверялась на опыте разнообразными способами для большого числа веществ. Хотя опытные данные, подтверждающие справедливость третьего начала термодинамики, не являются еще столь многочисленными и разносторонними, как опытные данные, подтверждающие второе начало, они не оставляют никакого сомнения в его справедливости. Наиболее точным методом проверки является изучение химических равновесий при низких температурах.

Для ряда веществ были проведены прямые измерения теплоемкости, на основе которых были найдены значения энтропии; последние сравнивались с теоретически вычисленными на основе

предположения $S=0$ при $T \to 0$. Примером результатов такой прямой проверки служит табл. 1.

Таблица 1

Энтропия HCl из экспериментальных калориметрических данных

Агрегатное состояние	Интервал температур	Метод нахождения	Энтропия, $\frac{кал}{моль \cdot град}$
Твердая	0—16° K	Экстраполяция кривой, полученной при более высоких температурах	0,30
»	16—98,36° K	Из измеренных значений теплоемкости	7,06
»	98,36° K Фазовый переход в другую кристаллическую модификацию	Скрытое тепло	2,89
»	98,36—158,91° K	Из теплоемкости	5,05
»	158,91° K—плавление	Скрытое тепло	3,00
Жидкая	158,91—188,07° K	Из теплоемкости . . .	2,35
»	188,07° K — кипение	Скрытое тепло	20,52
		Итого . . .	41,17
Газообразная	188,17° K	Измеренная энтропия	41,2
	188,17° K	Вычисленная теоретически с поправкой на неидеальность газа . .	41,3

Наконец, для многих веществ производилась экспериментальная проверка некоторых следствий из третьего начала. Так, например, из условия (35,4) вытекает также, что

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = 0 \quad \text{при} \quad T \to 0.$$

Но

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p\, \partial T} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Поэтому из третьего начала термодинамики следует, что коэффициент теплового расширения должен обращаться в нуль при $T \to 0$. Измерения его для ряда кристаллов (алмаз, HCl, Cu и др.) полностью подтвердили этот вывод.

Однако для ряда веществ измерения энтропии показали, что условие $S=0$ при $T \to 0$ оказывается невыполненным. Число таких веществ сравнительно велико. К ним относятся все аморфные тела, сплавы, а также ряд химических соединений: CO, NO, H_2O и т. д. Существование таких многочисленных исключений

из третьего начала заставляло высказывать сомнение в его общей применимости. Статистическая интерпретация третьего начала позволила выяснить истинное происхождение таких нарушений.

При выводе третьего начала мы предполагали, что наша система находится при абсолютном нуле в состоянии равновесия и при стремлении температуры к нулю переходит в состояние с наименьшей энергией ε_0. Существуют, однако, системы, не находящиеся в равновесии при $T \to 0$, к которым неприменимо третье начало термодинамики. Эти системы обладают при абсолютном нуле энтропией, отличной от нуля.

Мы говорили уже, что время релаксации может изменяться в чрезвычайно широких пределах и в ряде случаев достигать очень больших значений. Это особенно относится к низким температурам, когда тепловая энергия невелика. При этом установление состояния равновесия происходит особенно медленно. Для конкретности представим себе, что наша система построена из двухатомных молекул (например, молекул CO), образующих

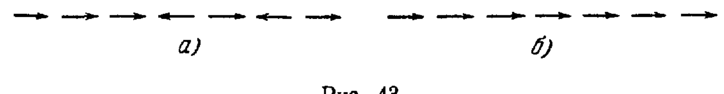


Рис. 43.

правильную кристаллическую решетку. На рис. 43 каждая молекула схематически изображена стрелочкой, один конец которой изображает атом углерода, а второй — кислорода. Возможны два типа ориентации молекул CO в решетке, схематически изображенные на рис. 43, *а* и *б*.

В одном случае имеется совершенно беспорядочная ориентация молекул, в другом — регулярная. Все свойства атомов углерода и кислорода настолько близки, что между обоими видами кристалла, с правильно и хаотически ориентированными молекулами, имеется весьма незначительное различие. Их симметрия и основные свойства совершенно идентичны. Различие в энергиях обоих состояний весьма невелико. Полному равновесию при $T \to 0$ соответствует состояние с регулярной ориентацией молекул, энергия которого оказывается несколько ниже, чем энергия состояния с хаотической ориентацией. Однако при более высоких температурах равновесной является хаотическая ориентация молекул. CO кристаллизуется при относительно высокой температуре, когда хаотическое распределение ориентаций является равновесным. При понижении температуры до $T \ll \frac{\Delta\varepsilon}{k}$ оно оказывается неравновесным, так что молекулы должны были бы перейти в состояние с правильной ориента-

цией. Однако переход молекул из хаотического в регулярное распределение при низких температурах происходит настолько медленно, что при разумно больших временах наблюдения полное равновесие не успеет установиться. Система при сколь угодно низкой температуре будет находиться в состоянии с беспорядочной ориентацией молекул. Это состояние будет фактически реализующимся состоянием с наименьшей возможной энергией. Оно не является равновесным, поскольку при регулярной ориентации энергия системы была бы еще меньшей, но вместе с тем при низких температурах, когда скорость процесса ориентации становится весьма малой, в этом состоянии система может находиться чрезвычайно долго (практически как угодно долго). Состояние с хаотическим распределением ориентаций является, таким образом, метастабильным состоянием. К системе, находящейся в метастабильном состоянии, неприменимы приведенные выше рассуждения, и ее энтропия не удовлетворяет условию (35,4).

Не представляет труда нахождение энтропии системы с вполне беспорядочным расположением молекул. Каждая молекула с равной вероятностью может находиться в двух состояниях, отличающихся только разной ориентацией. Если система содержит N молекул, то полное число состояний равно, очевидно, $\Omega_0 = 2^N$ (при этом ввиду простоты задачи нет надобности выражать это число через фазовый объем). Энтропия системы при абсолютном нуле равна

$$S_{T \to 0} = k \ln \Omega_0 = k \ln 2^N = Nk \ln 2 = 1{,}38 \frac{\textit{кал}}{\textit{моль} \cdot \textit{град}}.$$

Измеренное значение энтропии CO при $T \to 0$, в хорошем согласии с теорией, оказывается равным 1,1 *кал/моль·град.* Мы видим, что энтропия системы действительно отлична от нуля, причем ее величина близка к теоретической.

Третье начало термодинамики имеет очень большое значение для нахождения значений термодинамических функций. При его практическом использовании нужно, однако, всегда иметь в виду то, что оно относится лишь к системам, находящимся в равновесном состоянии, и неприменимо к метастабильным системам. Приведенный пример не является единичным. В § 54 мы вернемся еще к вопросу о поведении систем при низких температурах и приведем другие примеры кажущихся отклонений от третьего начала термодинамики. Во всяком случае, возможность применения третьего начала термодинамики часто бывает не очевидной и требует большой осторожности. До появления статистического вывода третьего начала, когда не были еще выяснены границы его применимости, неосмотрительное

применение третьего начала к метастабильном системам приводило к противоречиям, о которых было сказано выше.

Нужно еще заметить, что, хотя третье начало термодинамики является весьма важным положением, степень его важности для науки вряд ли можно сравнивать со степенью важности второго начала. В этом смысле термин «третье начало» является не вполне удачным.

§ 36. Статистический характер второго начала термодинамики

В предыдущих параграфах мы установили, что закон возрастания энтропии, представлявший в термодинамике непосредственное обобщение результатов опытов, приобретает новое, более глубокое и вместе с тем ясное содержание в свете рассуждений статистической физики. Закон возрастания энтропии с точки зрения статистической физики представляет выражение статистических закономерностей, проявляющихся в системах, состоящих из очень большого числа молекул. В этих системах благодаря силам межмолекулярного взаимодействия всегда происходит переход из менее вероятных в более вероятные состояния до тех пор, пока система не приходит в наиболее вероятное состояние — состояние полного статистического равновесия. Этот переход из неравновесного состояния в равновесное совершается путем сложных процессов, в которых принимает участие огромное число молекул. Механизм установления равновесия и характер происходящих при этом процессов во многих отношениях зависят от конкретных свойств системы.

Простейшим примером может служить установление равновесия — молекулярного хаоса — в идеальном газе. Молекулярный хаос устанавливается в результате соударений молекул со стенкой и между собой.

Сейчас нас будет интересовать вопрос не о том, как именно установится равновесие в системе, а лишь тот факт, что оно обязательно установится за тот или иной промежуток времени. Мы видели, что статистическая формулировка второго начала термодинамики отличается от термодинамической в одном весьма важном отношении: в ней употреблены слова: «наиболее вероятным ходом процессов», тогда как в термодинамике говорится просто о ходе процессов. Формулировка статистической физики имеет значительно менее категорический характер. Она нисколько не исключает, а наоборот, предусматривает возможность процессов, в ходе которых система переходит из более вероятного в менее вероятное состояние и энтропия ее уменьшается. Существование таких процессов, названных флуктуациями, полностью отрицается в термодинамической формулировке второго начала.

Например, представим себе, что газ занимает половину свободного объема. Согласно законам термодинамики газ должен расшириться и занять весь объем, причем это расширение будет сопровождаться возрастанием энтропии. С точки зрения статистической физики такое поведение газа является наиболее вероятным. Однако не исключается и возможность того, что газ будет не расширяться, а сжиматься. В макроскопической системе последний процесс имеет вероятность ничтожно малую по сравнению с вероятностью процесса расширения. Поэтому на практике в макросистемах всегда будет наблюдаться первый процесс.

Большее значение имеют флуктуации, происходящие в системе, уже находящейся в равновесии. Представим себе тот же газ, наполняющий весь объем с равномерной плотностью и находящийся в состоянии равновесия. Если этот газ не будет подвергаться воздействию извне, то с точки зрения термодинамики он будет неопределенно долго находиться в этом состоянии. Статистическая физика утверждает, что, хотя подавляюще бо́льшую часть времени газ будет находиться в состоянии равновесия и занимать весь объем, не исключена возможность флуктуаций, в ходе которых газ будет самопроизвольно выходить из состояния равновесия. В частности, газ может самопроизвольно переходить в состояние, в котором он занимает не весь, а лишь часть объема. Вероятность такого перехода определяется формулой Больцмана.

Мы не будем сейчас останавливаться на разборе конкретных примеров флуктуаций, поскольку этому важному явлению будет посвящена гл. VIII. Подчеркнем лишь, что опыт целиком подтвердил предсказания статистики относительно существования в природе таких самопроизвольных процессов, идущих с уменьшением энтропии. Но тогда, естественно, возникает вопрос: не противоречит ли статистическая формулировка второго начала чисто термодинамической? Не следует ли из статистической формулировки второго начала, что построение вечного двигателя второго рода является трудной, но в принципе осуществимой задачей; нельзя ли для ее решения использовать флуктуационные процессы, идущие с убылью энтропии? Вопрос этот служил предметом дискуссии в течение ряда лет, и решение его оказалось весьма плодотворным для развития основных положений статистической физики. Но прежде чем дать ответ на этот вопрос, необходимо разобрать другой, не менее сложный вопрос, логически ему предшествующий: как вообще могло случиться, что, рассматривая молекулярные процессы, мы пришли к идее о необратимости?

Хорошо известно, что законы механики являются строго обратимыми. Это видно хотя бы из того факта, что уравнение

классической механики

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=F$$

остается неизменным при обращении знака времени. В области внутриатомных процессов также царит полная обратимость: из законов квантовой механики вытекает принцип микроскопической обратимости, устанавливающий, что для всех микроскопических атомных или молекулярных процессов вероятности прямых и обратных процессов равны друг другу. Таким образом, в элементарных законах молекулярных процессов отсутствует необратимость. Все процессы строго симметричны по отношению к будущему и прошедшему. С другой стороны статистическая физика, основанная на молекулярных законах, приводит к появлению необратимости. На первый взгляд может показаться, что законы статистической физики противоречат законам молекулярного движения, на основе которых они были выведены. В действительности, однако, дело обстоит не так. Возрастание энтропии имеет место тогда, когда первоначально система находилась в некотором неравновесном состоянии. При этом наиболее вероятным поведением системы с течением времени будет переход ее в состояние равновесия. На рис. 44 по оси абсцисс отложено время, по оси ординат — энтропия; сплошной кривой изображен этот наиболее вероятный переход, пунктиром — мало вероятный переход в состояние с меньшей энтропией[1]). Здесь направление времени, различие между начальным и конечным моментом времени выступают с полной очевидностью. Но если вдуматься внимательнее в это рассуждение, то можно заметить, что мы всегда начинаем рассмотрение с заведомо неравновесного состояния системы. В самой постановке задачи скрыта некоторая асимметрия; мы говорим: вначале задано неравновесное состояние; что будет происходить с системой, предоставленной самой себе, потом? Попытаемся, однако, представить себе, откуда могло возникнуть это начальное неравновесное состояние. Оно могло возникнуть либо путем вмешательства в систему извне, либо в замкнутой

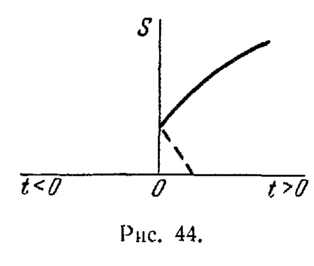


Рис. 44.

[1]) Следует отметить, что приведенные здесь и ниже рисунки нужно считать схемой, служащей для пояснения свойств энтропии. В действительности в системе, состоящей из частей, строго определено значение энтропии в течение некоторого конечного промежутка времени, но не в каждый данный момент. Поэтому график $S(t)$ нельзя понимать буквально (см. В. Г. Левич, Введение в статистическую физику, Гостехиздат, 1954, § 35).

системе самопроизвольно. В первом случае ясно, что отсутствие симметрии в поведении системы по отношению к прошедшему нисколько не противоречит обратимости законов молекулярных процессов. Оно связано с асимметрией самих условий задачи: в прошлом система подвергалась воздействиям извне, в будущем она предоставлена самой себе. Более важным, но менее наглядным является такой случай, когда система не подвергалась никаким воздействиям извне, а пришла в данное (начальное для нашего предыдущего рассмотрения) состояние самопроизвольно, оставаясь все время замкнутой. Спрашивается, в каком состоянии замкнутая система находилась до того, как она пришла в данное состояние? Она могла прийти в данное неравновесное состояние из еще более неравновесного или, наоборот, из равновесного состояния. Но всякая макроскопическая система основную часть времени находится в состоянии статистического равновесия. Если мы спросим, в каком состоянии находилась система при $t<0$, то из самых общих соображений ясно, что с подавляюще большой вероятностью она находилась в состоянии равновесия. Поэтому в данное неравновесное состояние система чаще всего приходит из равновесного состояния. Иными словами, для того чтобы система могла прийти в неравновесное состояние, заданное при $t=0$, она при $t<0$ должна была испытать флуктуацию. На рис. 45 сплошной кривой изображен наиболее вероятный процесс, приводящий систему в состояние, которое являлось исходным для процессов, изображенных на рис. 44. Не исключено, конечно,

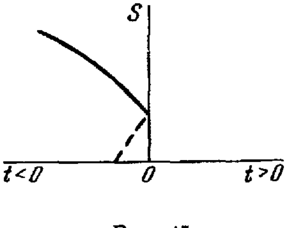


Рис. 45.

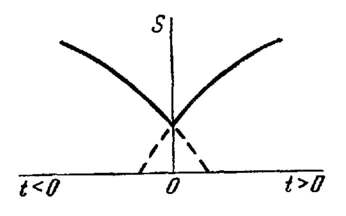


Рис. 46.

что данное при $t=0$ неравновесное состояние возникло из другого, еще более неравновесного состояния, как это изображено на рис. 45 пунктиром. Но поскольку вероятность найти замкнутую систему в неравновесном состоянии мала, такой случай является мало вероятным. Совместим теперь оба рисунка, т. е. рассмотрим весь процесс во времени. Тогда мы получим кривые, изображенные на рис. 46, совершенно симметричные по отношению к будущему и прошедшему. Асимметрия второго начала — указание на то, что энтропия будет возрастать в будущем,

оказывается, таким образом, связанной с асимметрией начального условия — заданием в начальный момент времени системы в неравновесном состоянии.

Представим себе теперь, что состояние замкнутой системы задано как равновесное состояние, отвечающее максимальному значению энтропии (рис. 47). Согласно положениям термодинамики во все дальнейшее время система будет находиться в равновесном состоянии и энтропия ее будет оставаться постоянной.

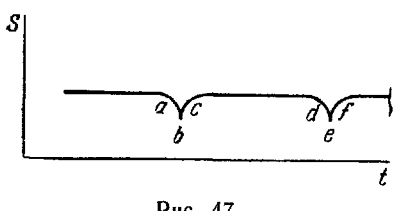


Рис. 47.

Статистическая физика допускает возможность самопроизвольного выхода системы из равновесного состояния — флуктуации. Как мы видели выше, вероятность флуктуации резко уменьшается с ее величиной. Поэтому, для того чтобы мы могли заметить флуктуацию, необходимо наблюдать за системой в течение достаточно большого промежутка времени, во всяком случае много большего, чем время релаксации τ. Кроме того, вероятность флуктуации весьма существенно зависит от размеров системы (числа частиц в ней). Если мы будем следить за поведением замкнутой системы, находящейся в момент времени $t = 0$ в состоянии равновесия, то мы увидим, что энтропия этой системы будет убывать (участки ab и de на кривой рис. 47) и возрастать (участки bc и ef) одинаково часто. Впрочем, это лишь совпадает со сказанным ранее; в сущности, процесс, изображенный на рис. 46, является частным случаем процесса, изображенного на рис. 47, и отвечает одному из зубцов на этом последнем.

Таким образом, мы видим, что если отрешиться от асимметрии в постановке вопроса, т. е. не задаваться в начальный момент времени мало вероятным (неравновесным) состоянием системы, то закон «возрастания» энтропии теряет свой односторонний смысл и становится симметричным по отношению к будущему и прошедшему. Это можно сформулировать еще и следующим образом: в течение достаточно большого промежутка времени в замкнутой системе число переходов из равновесного состояния в неравновесное равно числу обратных переходов из неравновесного состояния в равновесное. Это равенство возникает потому, что число первых равно большому числу начальных (равновесных) состояний, умноженному на малую вероятность флуктуации. Число вторых равно малому числу начальных (неравновесных) состояний, умноженному на большую вероятность перехода в равновесное состояние (релаксации). В системе, являющейся всегда замкнутой, энтропия возрастает и убывает одинаково часто.

В практике, однако, чаще всего приходится иметь дело с системами, находящимися в начальный момент времени в заданном неравновесном состоянии. В случае всегда замкнутой системы всякое неравновесное состояние можно рассматривать как флуктуацию. Если мы будем наблюдать за последующим изменением состояния системы в течение времени, сравнимого с временем релаксации или меньшим, то наиболее вероятным ходом процессов будет возрастание энтропии. Кажущаяся асимметрия возникает при этом из-за асимметрии в постановке задачи.

Возможно также, что в неравновесное состояние система попала в результате внешнего воздействия, которое после этого прекращается. В этом случае система является изолированной не всегда, а лишь начиная с некоторого момента времени. В дальнейшем ее энтропия будет возрастать. Здесь асимметричный ход энтропии связан с существом дела — наличием в прошлом воздействия на систему извне.

Мы видим, что различие между необратимыми и обратимыми процессами становится весьма условным и никакого противоречия между обратимостью законов механики и существованием необратимых процессов в статистике нет. В связи с условным характером понятий обратимости и необратимости возникает необходимость в более четком критерии необратимых и обратимых молекулярных процессов. Чтобы подойти к этой формулировке, рассмотрим еще один конкретный пример.

Представим себе некоторый объем в сосуде, занятом смесью двух газов. Пусть в некоторый начальный момент времени задано неравновесное состояние газа: в рассматриваемом объеме имеется отклонение состава газа от однородного на 1%. Если газ предоставлен самому себе, то с вероятностью порядка единицы по прошествии времени релаксации газы смешаются и система перейдет в состояние с однородной плотностью. При этом энтропия газа будет увеличиваться. С точки зрения чистой термодинамики мы имеем классический пример необратимого процесса. Разберем, однако, этот процесс более внимательно со статистической точки зрения. Система действительно самопроизвольно перейдет от неравномерного к равномерному распределению молекул в смеси. Но нельзя утверждать, что начальное состояние уже никогда не повторится и что система будет во все дальнейшее время находиться в состоянии с равномерным распределением молекул. Наоборот, в системе будут происходить флуктуации, в результате которых равномерность состава газа будет нарушаться. По прошествии достаточно большого времени в системе, предоставленной самой себе, обязательно произойдет флуктуация такого масштаба, что отклонение от однородности в выделенном объеме достигнет 1%, и система

вернется в начальное состояние. Возвращение системы в начальное состояние показывает, что процесс взаимной диффузии газов нельзя считать необратимым. Рассматриваемый процесс можно назвать процессом обращающимся.

Мы вновь приходим, казалось бы, к полному противоречию с чистой термодинамикой. Однако в какой мере это противоречие имеет практическое значение, зависит от масштаба явления и времени, требуемого для возвращения системы в начальное состояние. Последнее можно считать, грубо говоря, обратно пропорциональным вероятности флуктуации соответствующего масштаба. Можно поэтому считать, что время, требующееся для возвращения системы в начальное состояние, тем больше, чем больше размеры системы и чем сильнее различие между начальным и равновесным состояниями. Обозначим это время, именуемое обычно временем возвращения, через τ^*. Тогда очевидно, что если полное время наблюдения T мало́ по сравнению с τ^*, то за время наблюдения система не успеет вернуться в начальное состояние. При этом процесс, идущий с возрастанием энтропии, является необритимым. Если же, наоборот, полное время наблюдения T велико по сравнению с временем возвращения τ^*, то за время наблюдения система обязательно вернется в начальное состояние. В этом случае тот же процесс нужно считать обратимым. Впервые такую трактовку развил М. Смолуховский.

Таким образом, решающим в критерии обратимости и необратимости является отношение времени τ^* и T.

Для получения представления о порядке величины времени возвращения τ^* вычислим его для простейшей системы. Пусть в момент времени $t=0$ идеальный газ, первоначально заключенный в левую половину сосуда, заполняет весь сосуд. Найдем, какое время потребуется для того, чтобы в результате молекулярного движения все N молекул газа вновь собрались в левой половине сосуда с вероятностью, близкой к единице, например равной 0,9.

Вероятность того, что при одном измерении одна из молекул окажется в левой половине сосуда, равной $w_1^{(1)}=\frac{1}{2}$. Соответственно вероятность того, что при одном измерении две молекулы окажутся в левой половине сосуда, равна $w_1^{(2)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, а вероятность нахождения N молекул при одном измерении $w_1^{(N)}=\left(\frac{1}{2}\right)^N$.

Вероятность того, что в левой половине при одном измерении не окажется N молекул, равна, очевидно $\left(1-\frac{1}{2^N}\right)$. Веро-

ятность того, что при n измерениях в левой половине сосуда не окажется N молекул, равна $\left(1-\frac{1}{2^N}\right)^n$.

Вероятность того, что после n измерений N молекул окажутся, в левой половине сосуда, равна

$$w_n^{(N)} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)^n.$$

Положив, по условию, $w_n^{(N)} = 0{,}9$, находим

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{2^N}\right) = \ln 0{,}1.$$

Поскольку N велико, $\frac{1}{2^N} \ll 1$, так что $\ln\left(1-\frac{1}{2^N}\right) \approx -\frac{1}{2^N}$. Тогда имеем $\frac{n}{2^N} = 1$.

Если измерения производятся через каждые Δt *сек*, то N молекул с вероятностью 0,9 окажутся вновь собравшимися в левую половину сосуда по прошествии времени

$$\tau^* = n\,\Delta t \approx 2^N\,\Delta t.$$

Если, например, измерения производятся каждые $\Delta t = 1$ *сек*, то $\tau^* = 2^N$ *сек*. Время возвращения чрезвычайно быстро растет с числом частиц в газе N.

Представления о числовом значении τ^* дают цифры табл. 2.

Таблица 2

N	5	10	100	10^5	10^{19}
τ^*, *сек*	32	1024	10^{32}	2^{10^5}	$2^{10^{19}}$

Мы видим, что при достаточно малом числе частиц в системе время возвращения системы в первоначальное состояние является вполне реальным и может быть наблюдено в течение обозримых промежутков времени.

Наоборот, при большом числе частиц время обращения становится необозримо большим. Нельзя ожидать, чтобы за реально наблюдаемые большие промежутки времени система с большим числом могла вернуться в первоначальное состояние. Заметим, что эксперименты полностью подтвердили расчетные значения времен возврата для скоплений в малых объемах небольшого числа коллоидных частиц (см. § 56).

Из сказанного ясно, что развитая выше точка зрения на обратимость и необратимость практически нисколько не

противоречит выводам термодинамики. Времена возвращения для процессов макроскопического масштаба оказываются столь большими, что для любого времени наблюдения неравенство $\tau^* \gg T$ всегда удовлетворено. Поэтому процессы, являющиеся необратимыми с термодинамической точки зрения, можно считать необратимыми и со статистической точки зрения.

Теперь мы можем перейти к разбору второго вопроса, поставленного в начале этого параграфа: нельзя ли осуществить вечный двигатель второго рода, используя явление флуктуаций?

Представим себе, что у нас имеется некоторый механизм, который можно использовать для производства полезной работы флуктуации, происходящей в некоторой системе. Для конкретности представим себе, что механизм этот представляет поршень, который приводится в одностороннее движение флуктуациями плотности, происходящими в объеме газа под поршнем. Если бы такой механизм можно было практически осуществить, то можно было бы систематически получать полезную работу за счет тепловой энергии среды, т. е. построить вечный двигатель второго рода. Однако легко показать, что построение такого механизма невозможно.

В самом деле, какова бы ни была конструкция механизма, поршень и другие его части, так же как и газ или другая среда, состоят из атомов или молекул. Поэтому рабочий механизм, так же как и среда, будет испытывать флуктуации. Флуктуации механизма и среды являются независимыми друг от друга и происходят вообще говоря, в различные моменты времени и в различных направлениях. Пусть, например, поршень движется и производит работу при расширении газа. Но сам поршень также испытывает флуктуации и при этом смещается в сторону, противоположную той, в которую он движется при расширении. Благодаря независимости флуктуаций в газе и механизме среднее во времени смещение поршня оказывается в точности равным нулю. Следовательно, равна нулю и средняя работа, производимая поршнем.

Эти качественные соображения подтверждаются количественными расчетами различных схем такого рода рабочих механизмов.

Таким образом, систематическое получение полезной работы за счет малых флуктуаций, происходящих в некотором рабочем механизме, оказывается принципиально невозможным. Точно так же невозможно получить полезную работу за счет единичных больших флуктуаций: вероятность больших флуктуаций уменьшается несравненно быстрее, чем растет величина полезного эффекта.

Тем самым доказывается, что построение вечного двигателя второго рода, систематически производящего полезную работу

за счет флуктуаций, принципиально невозможно. Классическая формулировка второго начала — «невозможно построить вечный двигатель второго рода, т. е. приспособление, которое в течение продолжительного времени потребляло бы теплоту более низкой температуры и служило при этом источником полезной работы», — сохраняет полную силу.

В заключение мы должны остановиться на вопросе о так называемой «тепловой смерти» вселенной.

Теория тепловой смерти мира, выдвинутая Клаузиусом, заключается в следующем. В настоящее время вселенная не находится в состоянии теплового равновесия, в ней существуют разности температур, движение и т. п. Однако, поскольку вселенная представляет замкнутую систему, к которой применимы законы статистики и термодинамики, по истечении достаточно большого промежутка времени все разности температур, существующие во вселенной, выравняются и движение прекратится. Вселенная перейдет в состояние полного покоя, тепловой смерти.

Учение Клаузиуса подверглось критике со стороны большого числа физиков-материалистов, в первую очередь Больцмана.

В настоящее время с несомненностью выяснено, что нет никаких оснований для перенесения законов статистической физики — учения о законах движения молекулярных систем — на изменяющуюся во времени вселенную. Уже учет гравитационных явлений в рамках общей теории относительности показывает, что термодинамические свойства систем космического масштаба должны коренным образом отличаться от термодинамических свойств обычных замкнутых систем. В термодинамике, основанной на общей теории относительности, показывается, что энтропия систем космического масштаба не может стремиться к максимальному значению и достигнуть его и в них не может установиться тепловое равновесие[1]).

Более полное изучение закономерностей поведения вселенной и, в частности, ее термодинамического поведения — дело будущего. Но уже сейчас ясно, что они несравненно сложнее, чем свойства обычных макроскопических молекулярных систем, и применение ко вселенной законов обычной термодинамики незаконно и недопустимо.

---

[1]) См R. Tolman, Relativity thermodynamics and cosmology, Oxford, 1934.

ГЛАВА V

ИДЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

§ 37. Функция распределения для идеальных газов

В этой и последующих главах мы рассмотрим приложения общей теории к конкретным системам. В первую очередь будут рассмотрены идеальные газы.

Функция состояний идеального одноатомного газа имеет вид

$$Z = \sum e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \Omega(\varepsilon_n), \qquad (37,1)$$

где ε_n — энергия газа как целого и суммирование ведется по уровням энергии системы.

Поскольку расстояния между уровнями энергии газа как целого весьма малы по сравнению с kT, суммирование по уровням энергии можно заменить интегрированием. Таким образом,

$$Z = \int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\Omega. \qquad (37,2)$$

Найдем число состояний системы с данной энергией $d\Omega$. Поскольку все частицы идеального газа являются независимыми, можно написать

$$d\Omega = \prod_i{}' d\Omega_i = \prod{}' \frac{dp_i\, dq_i}{h^{3N}},$$

где произведение берется по всем координатам и импульсам частиц. Штрих в произведении означает, что при его образовании следует включать в него только такие члены, которые отвечают различным состояниям системы как целого.

Подставляя $d\Omega$ в (37,1), находим

$$Z = \frac{\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \prod_i{}' dp_i\, dq_i}{h^{3N}}. \qquad (37,3)$$

Для того чтобы найти область интегрирования в (37,3), рассмотрим случай двух частиц, совершающих одномерное движение. Пусть p_1 означает импульс первой частицы и p_2 — импульс второй. Интегрирование в (37,3) ведется по всем значениям импульсов, которые может иметь каждая из молекул. Рассмотрим два состояния системы, изображенные на рис. 48 точками. В первом состоянии первая молекула имеет импульс, равный a, вторая молекула — импульс, равный b. Во втором состоянии, наоборот, вторая молекула имеет импульс a, а первая — равный b. Можно сказать, что второе состояние отличается от первого тем, что импульс первой частицы заменен на импульс второй частицы, и наоборот. Иначе говоря, изобразительные точки обеих молекул или, как говорят обычно для краткости, молекулы переставлены между собой в фазовом пространстве.

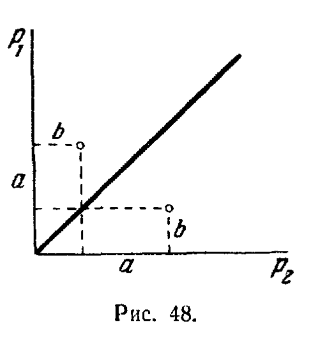


Рис. 48.

При выполнении интегрирования в (37,3) мы учитываем в отдельности каждое из этих и им подобных состояний системы из двух молекул. Интегрируя по p_1 при фиксированном значении p_2, а затем по p_2 при фиксированном p_1, мы проходим через последовательность значений импульсов (p_1, p_2) и (p_2, p_1), отличающихся друг от друга перестановкой частиц в фазовом пространстве. Иначе говоря, мы считаем состояния «первая молекула имеет импульс p_1, вторая — импульс p_2» и «первая молекула имеет импульс p_2, вторая — импульс p_1» двумя различными состояниями. Однако если обе молекулы одинаковы, то эти состояния являются двумя одинаковыми состояниями. Но из положения квантовой теории о полной тождественности элементарных частиц вытекает, что оба эти состояния отвечают одному и тому же физическому состоянию системы. Физическое состояние системы характеризуется тем, что одна частица имеет импульс p_1, а вторая — импульс p_2. Какая именно из частиц имеет импульс p_1, а какая — импульс p_2, совершенно безразлично, поскольку обе частицы являются абсолютно тождественными. Состояния (p_1, p_2) и (p_2, p_1) являются не двумя одинаковыми, а одним и тем же состоянием системы. Поэтому мы совершаем ошибку, учитывая в ходе интегрирования в (37,3) оба состояния (p_1, p_2) и (p_2, p_1) как независимые состояния. В действительности оба они соответствуют только одному физическому состоянию системы. Для того чтобы не впадать в эту ошибку, нужно учитывать только одно из состояний: либо (p_1, p_2), либо (p_2, p_1). Интегрирование по p_1 и p_2 в (37,3) нужно вести не по всем возможным их значениям, а только по значениям, отвечающим

физически различным состояниям системы. Для этого можно, например, интегрировать не по всей фазовой плоскости (p_1, p_2), а по половине ее, отсекаемой биссектрисой, проведенной на рис. 48. Проще, однако, поступить иначе. Можно по-прежнему вести интегрирование по всем значениям p_1 и p_2, а получившийся результат уменьшить вдвое. Тем самым будет компенсировано неправильное удвоение числа состояний при их подсчете. Совершенно аналогично следует поступать и при вычислении той части функции состояний, которая включает интегрирование по координатам двух молекул. Состояния, отличающиеся друг от друга только перестановкой молекул в пространстве, нужно считать не разными, а одним и тем же состоянием.

В общем случае при вычислении интеграла по всем состояниям системы, состоящей из двух частиц, следует производить интегрирование по всем состояниям — координатам и импульсам (p_1, q_1) первой и (p_2, q_2) второй частицы, но полученный результат уменьшить вдвое. При этом будет автоматически учтено, что «перестановка» в фазовом пространстве изобразительных точек, характеризующих состояние каждой из частиц, не приводит к разным состояниям всей системы.

Полученный результат можно обобщить на произвольные состояния газа, содержащего N молекул. Все состояния газа, отличающиеся между собой только тем, что значения координат и импульсов одной молекулы заменены значениями координат и импульсов другой молекулы, являются тождественными физическими состояниями. Можно сказать, что совокупность всех состояний, которые получаются перестановкой между собой N изобразительных точек в фазовом пространстве, отвечает только одному физическому состоянию. При вычислении полной функции состояний газа каждое из них нужно учитывать в интегрировании только один раз. Поэтому при выполнении интегрирования по всем возможным значениям координат и импульсов газовых молекул нужно разделить результат на число перестановок изобразительных точек между собой в фазовом пространстве. Последнее равно, очевидно, $N!$

Следует заметить, что необходимость деления фазового интеграла на $N!$ учитывалась в классической статистике. В противном случае нарушалась аддитивность получаемых термодинамических функций. Однако полная очевидность необходимости такого деления видна в квантовой статистике после учета принципа тождественности атомных частиц.

Итак, мы можем написать

$$d\Omega = \prod_i{}' d\Omega_i = \frac{\prod_i d\Omega_i}{N!} = \frac{1}{N!} \prod_i \frac{dp_i\, dq_i}{h^{3N}}. \qquad (37,4)$$

Распределение Гиббса для идеального газа имеет вид

$$dw = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\Omega = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \frac{dp_1 \ldots dp_{3N}\, dq_1 \ldots dq_{3N}}{h^{3N} N!}.$$

Соответственно для функции состояний получаем

$$Z = \frac{1}{N!} \int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \prod_i d\Omega_i,$$

где интегрирование ведется по всему фазовому пространству. Представив энергию газа как

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i,$$

получаем

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \prod_i \int e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} dp_i\, dq_i = \frac{z^N}{N!},$$

где z — интеграл состояний для одной молекулы, вычислявшийся уже ранее (формула (19,7)). Подставляя его значение, находим

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3N}{2}} V^N. \qquad (37,5)$$

Перейдем к вычислению термодинамических функций идеального одноатомного газа.

Для энергии газа можно написать

$$E = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z = \frac{3}{2} NkT. \qquad (37,6)$$

Энергия газа пропорциональна температуре и не зависит от объема газа в соответствии с формулой (20,14).

Теплоемкость одноатомного газа оказывается равной

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2} Nk \approx 3 \frac{кал}{моль \cdot град}.$$

Для свободной энергии идеального одноатомного газа находим согласно (32,1):

$$F = -kT \ln Z = -NkT \ln V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} + kT \ln N!$$

Для вычисления $N!$ при большом N можно воспользоваться формулой Стирлинга (см. приложение IV). Тогда имеем

$$F = -NkT \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right]. \qquad (37,7)$$

Из свободной энергии можно найти уравнение состояния газа. В соответствии с (32,6) получаем

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{NkT}{V}. \tag{37,8}$$

Мы приходим, таким образом, к хорошо известному уравнению состояния идеального газа. Необходимо подчеркнуть, что это уравнение найдено нами чисто теоретическим путем, без каких-либо ссылок на экспериментальные данные. Экспериментально определяется только числовое значение постоянной k.

Вычислим теперь энтропию газа. Согласно (29,7) она равна

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = Nk\ln\left[\frac{eV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right] + \frac{3}{2}Nk =$$

$$= Nk\ln\frac{V}{N} + C_V\ln kT + \frac{5}{2}Nk + Nkj. \tag{37,9}$$

По причинам, которые будут выяснены позднее, величина

$$j = \ln\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}$$

носит название химической постоянной.

Энтропия, определенная формулой (37,9), выражена как функция числа частиц и объема газа.

Как это и должно быть в силу аддитивности энтропии, она пропорциональна числу частиц в газе. При одновременном увеличении объема и числа частиц в газе в произвольное число раз энтропия увеличивается или уменьшается во столько же раз.

Может показаться странным, что вычисленная нами энтропия не содержит никакой произвольной постоянной, тогда как согласно сказанному в § 24 энтропия определена с точностью до неопределенной постоянной. В действительности в формуле отсутствует произвольная постоянная потому, что мы в основу вычисления F и S положили формулы (29,7) и (32,1), в которых произвольная постоянная энтропии была выбрана за условное начало отсчета энтропии.

Выражение (37,9) для энтропии теряет свою применимость при $T \to 0$. При выводе (37,9) мы не учитывали явления квантового вырождения газа, играющего основную роль в его поведении при весьма низких температурах. Это явление будет рассматриваться нами в гл. X.

Без учета явления вырождения невозможно получить правильное выражение для энтропии, удовлетворяющее третьему началу термодинамики. Нужно, однако, заметить, что обычных газов при столь низких температурах, при которых наступает вырождение, не существует. Задолго до этих температур наступает ожижение газов при всех реальных значениях плотности.

При весьма высоких температурах формула (37,9) вновь неприменима, так как она не учитывает тепловой ионизации атомов. Тем не менее интервал применимости формулы (37,9) весьма широк — от точки ожижения до нескольких тысяч градусов.

На практике часто удобнее выражать энтропию через давление и температуру. Подставляя в (37,9) значение V, выраженное через давление, находим

$$S = \frac{5}{2} Nk \ln kT - Nk \ln p + \frac{5}{2} Nk + Nkj =$$
$$= C_p \ln kT - Nk \ln p + \frac{5}{2} Nk + Nkj. \quad (37,10)$$

Вычислим еще термодинамический потенциал Гиббса (Φ). Имеем для Φ на основании (28,11) и (37,7)

$$\Phi = F + pV = -\frac{5}{2} NkT \ln kT + NkT \ln p - NkTj =$$
$$= NkT \ln p - C_p T \ln kT - NkTj. \quad (37,11)$$

Полученное выше выражение для теплоемкости можно сравнить с опытными данными. Число одноатомных газов сравнительно невелико. Одноатомными являются благородные газы и пары металлов.

В табл. 3 приведены измеренные значения теплоемкости.

Таблица 3

Теплоемкость (при постоянном объеме) одноатомных газов

Вещество	Температура, °C	C_V, $\frac{кал}{моль \cdot град}$
He	291	3,008
	93	2,93
	26	3,00
	18	3,02
Ar	288	3,07
Na (пар)	750—920	2,95
Hg (пар)	548—629	2,97

Из таблицы видно, что предсказания теории хорошо оправдываются на опыте; теплоемкость одноатомных газов постоянна в широком интервале температур и имеет значение, почти точно совпадающее с теоретическим значением

$$C_V = 3 \frac{кал}{моль \cdot град}.$$

В заключение рассмотрим важный вопрос о смешивании газов.

Для наглядности предположим, что газ помещен в две камеры с объемами V_1 и V_2, разделенные вначале непроницаемой перегородкой. Затем перегородка удаляется, и молекулы обеих порций газа начинают взаимно диффундировать. В результате этого процесса происходит перемешивание газов. Мы будем считать, что температуры и давления газов до смешивания были равны между собой.

Найдем изменение энтропии при смешивании двух порций газа. При этом нужно различать два случая: смешивание различных и одинаковых по своей природе газов.

Мы начнем с рассмотрения первого случая.

Согласно (37,9) энтропии различных газов до смешивания даются выражениями

$$S_1^{(0)} = N_1 k \ln \frac{V_1}{N_1} + N_1 f(T),$$
$$S_2^{(0)} = N_2 k \ln \frac{V_2}{N_2} + N_2 f(T),$$

где $f(T)$ — слагаемые в формуле для энтропии, не зависящие от объема.

Полная энтропия системы до смешивания равна

$$S^{(0)} = S_1^{(0)} + S_2^{(0)}.$$

После смешивания каждый из идеальных газов будет вести себя так, как будто бы другого газа не было, и занимать весь суммарный объем $(V_1 + V_2)$. Температура смеси будет равна исходной температуре газа. Поэтому после смешивания энтропия каждого из газов будет равна

$$S_1 = N_1 k \ln \frac{V_1 + V_2}{N_1} + N_1 f(T),$$
$$S_2 = N_2 k \ln \frac{V_1 + V_2}{N_2} + N_2 f(T).$$

Энтропия смеси, состоящей из двух невзаимодействующих идеальных газов, равна сумме их энтропий, т. е.

$$S = S_1 + S_2.$$

Изменение полной энтропии всей системы при смешивании равно

$$\Delta S = S - S^{(0)} =$$
$$= N_1 k \ln \frac{V_1 + V_2}{N_1} + N_2 k \ln \frac{V_1 + V_2}{N_2} - N_1 k \ln \frac{V_1}{N_1} - N_2 k \ln \frac{V_2}{N_2} =$$
$$= N_1 k \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + N_2 k \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}.$$

При данной температуре и давлении

$$\frac{V_1+V_2}{V_1}=\frac{(N_1+N_2)kT}{p}:\frac{N_1kT}{p}=\frac{N_1+N_2}{N_1}$$

и аналогично для $\frac{V_1+V_2}{V_2}$, так что изменение энтропии равно

$$\Delta S=N_1k\ln\frac{N_1+N_2}{N_1}+N_2k\ln\frac{N_1+N_2}{N_2}.$$

Таким образом, энтропия смеси больше, чем энтропия исходных газов.

Процесс смешивания двух различных газов является необратимым процессом. Происхождение этой необратимости вполне понятно. Когда перегородка, разделяющая газы, удаляется, начинается взаимная диффузия газов. До смешения существовала «правильность» в расположении молекул: молекулы одного газа находились в одной части сосуда, молекулы второго газа — в другой.

После того как диффузия полностью перемешает оба газа, наступает равномерное, совершенно хаотическое распределение молекул и вероятность состояния увеличивается. Для обратного разделения газов необходимо затратить некоторую работу, которую в принципе можно вычислить.

Рассмотрим теперь процесс смешивания двух порций одинаковых газов. Газы могут считаться одинаковыми в том случае, когда они ведут себя идентично во всех возможных внешних полях.

Энтропия двух порций одного газа до смешивания равна

$$S_1=N_1k\ln\frac{V_1}{N_1}+N_2k\ln\frac{V_2}{N_2}+(N_1+N_2)f(T).$$

Энтропия всего газа после смешивания равна

$$S_2=(N_1+N_2)k\ln\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2}+(N_1+N_2)f(T).$$

Тогда для изменения энтропии получаем

$$\Delta S=S_2-S_1=(N_1+N_2)k\ln\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2}-N_1k\ln\frac{V_1}{N_1}-N_2k\ln\frac{V_2}{N_2}.$$

Но из уравнения состояния газа следует, что при постоянном давлении и температуре

$$\frac{V_1+V_2}{N_1+N_2}=\frac{V_1}{N_1}=\frac{V_2}{N_2},$$

поэтому

$$\Delta S\equiv 0.$$

Таким образом, изменение энтропии при смешивании двух порций одного газа действительно тождественно равно нулю.

Этот результат, находящийся в полном согласии с опытом, тесно связан с предположением о тождественности между собой всех частиц данного газа. Благодаря этой тождественности перемешивание их между собой не является физическим событием. При смешивании двух порций одного газа при постоянном давлении и температуре распределение молекул во всем объеме сразу оказывается равномерным и хаотическим и никакой взаимной диффузии не происходит. Нужно подчеркнуть, что молекулы или атомы могут считаться принадлежащими к одному сорту и потому тождественными только в том случае, когда они имеют одинаковую химическую структуру, массу и все другие характеристики. Это означает, что даже различные изотопы одного элемента или атомы, находящиеся в разных энергетических состояниях, нельзя считать тождественными. Так, например, смешение двух разных изотопов газа или двух порций газа, состоящих из нормальных и возбужденных молекул, представляет необратимый процесс. Это особенно ясно видно из того, что самопроизвольного обратного разделения смешавшихся газов не происходит, и для их разделения нужно затратить некоторую работу.

§ 38. Распределение Максвелла — Больцмана и распределение Больцмана в однородном поле сил

На практике часто приходится иметь дело с газом, находящимся в однородном внешнем поле сил. Наиболее важным примером такого поля является поле тяжести. До сих пор мы отвлекались от действия поля тяжести на поведение газа. Мы рассмотрим теперь идеальный газ, помещенный в однородное силовое поле. В таком поле каждая молекула обладает полной энергией

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{поступ}} + u(x, y, z),$$

где $\varepsilon_{\text{поступ}}$ — кинетическая энергия ее поступательного движения, а u — потенциальная энергия во внешнем поле, зависящая от положения частицы.

Подставляя это выражение для энергии в распределение Гиббса (19,6) для молекулы идеального газа, имеем

$$dw = \frac{1}{zh^3} e^{-\frac{\varepsilon_{\text{поступ}}+u}{kT}} dp_x dp_y dp_z dV, \qquad (38,1)$$

где интеграл состояний равен, очевидно,

$$z = \int e^{-\frac{\varepsilon_{\text{поступ}}+u}{kT}} \frac{dp_x dp_y dp_z dV}{h^3}. \qquad (38,2)$$

Интегрирование ведется по всем возможным значениям переменных.

Замечая, что интеграл состояний можно записать в виде

$$z=\int e^{-\frac{\varepsilon_{\text{поступ}}}{kT}}\frac{dp_x\,dp_y\,dp_z}{h^3}\int e^{-\frac{u}{kT}}\,dV=\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\int e^{-\frac{u}{kT}}\,dV, \qquad (38,3)$$

мы находим, что нормированное на единицу распределение Гиббса для молекулы идеального газа при наличии внешнего поля имеет вид

$$dw=\left[\frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}}e^{-\frac{p^2}{2mkT}}\,dp_x\,dp_y\,dp_z\right]\left[\frac{e^{-\frac{u}{kT}}\,dV}{\int e^{-\frac{u}{kT}}\,dV}\right]. \qquad (38,4)$$

Полученное распределение вероятностей, характеризующее вероятность того, что молекула имеет данный импульс и находится в данном элементе объема, носит название распределения Максвелла — Больцмана.

Первый из множителей в (38,4) — хорошо знакомое нам распределение Максвелла. Оно характеризует распределение вероятностей по компонентам импульса. Второй множитель зависит только от координат молекулы и определяется видом ее потенциальной энергии $u(x, y, z)$ во внешнем поле сил. Он выражает вероятность нахождения молекулы в данном объеме dV. В частном случае, когда внешнее поле сил отсутствует, распределение молекул по всему объему сосуда является равновероятным и последний множитель сводится к величине $\frac{dV}{V}$.

На основании теоремы умножения вероятностей распределение Максвелла — Больцмана можно рассматривать как произведение вероятностей двух независимых событий — вероятности данного значения импульса и данного положения молекулы. Первая вероятность представляет распределение Максвелла; вторая вероятность — распределение Больцмана. Каждое из распределений нормировано на единицу.

То обстоятельство, что оба эти распределения являются независимыми, выражает важное и заранее совершенно неочевидное физическое положение: вероятность данного значения импульса совершенно не зависит от положения молекулы, и, наоборот, вероятность положения молекулы не зависит от ее импульса.

Рассмотрим теперь более подробно распределение Больцмана для частного случая, когда газ находится в поле земного тяготения. Направим ось z вертикально вверх. Тогда

потенциальная энергия газовой молекулы может быть написана в виде

$$u = mgz.$$

Поскольку потенциальная энергия зависит только от высоты, в плоскости $z = \mathrm{const}$ молекулы распределяются равномерно. Поэтому представляет интерес лишь зависимость распределения вероятностей от координаты z. Она имеет вид

$$dw_{\text{Б}} = \frac{e^{-\frac{mgz}{kT}}\,dz}{\int e^{-\frac{mgz}{kT}}\,dz}, \tag{38,5}$$

где интеграл берется по всем возможным значениям z.

Вводя вместо распределения вероятностей среднее число частиц в 1 $см^3$ на данной высоте, можно переписать (38,5) в виде

$$dn = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}\,dz, \tag{38,6}$$

где n_0 — число частиц в 1 $см^3$ на условном уровне отсчета координаты z в плоскости $z = 0$.

Формула (38,6) показывает, что плотность газа в поле тяжести убывает по экспоненциальному закону. Она уменьшается в e раз при поднятии на высоту $\delta = \frac{kT}{mg}$. Эту величину можно назвать характеристической длиной распределения частиц в поле тяжести. Для водорода δ составляет при комнатной температуре около $3 \cdot 10^5$ *м*, для воздуха δ соответственно равно 10^4 *м*. На всех высотах имеет место максвелловское распределение молекул по скоростям с постоянной температурой T Однако число молекул, находящихся на разных высотах, убывает по экспоненциальному закону (38,6). На первый взгляд неизменность температуры на всех высотах может показаться противоречащей следующему простому энергетическому рассуждению: если некоторая молекула, имевшая на высоте z_0 энергию $\frac{mv^2}{2}$, поднимается на высоту z, то ее энергия должна уменьшаться до значения $\left[\frac{mv_0^2}{2} - mg(z - z_0)\right]$, где $mg(z - z_0)$ — работа против силы тяжести. Поэтому на большой высоте молекула будет иметь меньшую скорость и энергию. Но с другой стороны, температура связана со средней квадратичной скоростью соотношением (10,6). Следовательно, температура газа должна падать с высотой. Ошибочность этого рассуждения коренится в том, что в нем фигурирует только одна молекула, рассматриваемая без учета ее столкновений с другими газовыми молекулами. Макс-

велловское распределение скоростей устанавливается благодаря столкновениям между молекулами. В предыдущем рассуждении установление максвелловского распределения игнорируется и рассматривается не имеющая смысла «температура молекулы». Фактически подниматься вверх будут преимущественно те молекулы, которые имеют большую скорость. Поэтому максвелловское распределение будет устанавливаться автоматически на всех высотах.

Рассмотрим некоторые выводы, которые можно получить из распределения плотности газа с высотой. Прежде всего остановимся на понятии веса газа. Представим себе сосуд высотой h, в котором находится газ. Как известно, этот газ обладает некоторым весом. Часто говорят, что вес газа — это вес всех входящих в него молекул. В действительности, однако, это не совсем верно. Вес газа измеряется разностью давлений, оказываемых газом на дно и крышку сосуда. В создании этой разности давлений участвуют все молекулы газа, находящиеся в непрерывном движении и большей частью непосредственно ни с дном, ни с крышкой сосуда не сталкивающиеся. В этом заключается различие между весом газа и весом тела, лежащего на тарелке весов.

Найдем вес столба газа высотой h. Для этого можно поступить двояким образом: во-первых, можно определить его чисто формально, написав, что вес столба газа равен весу всех входящих в него молекул; во-вторых, его можно найти, взяв разность давлений, оказываемых газом на дно ($z = 0$) и крышку ($z = h$) сосуда.

В первом случае имеем

$$P = mg \int dN = mgn_0 \int_0^h e^{-\frac{mgz}{kT}}\, dz \int dx\, dy = \\ = Smgn_0 \cdot \frac{kT}{mg}\left(1 - e^{-\frac{mgh}{kT}}\right) = SkT\,(n_0 - n_h),$$

где S — площадь сечения сосуда, а n_0 и n_h — плотности газа на высотах $z = 0$ и $z = h$.

Во втором случае мы можем написать

$$P = S(p_0 - p_h) = S(n_0 - n_h)kT,$$

где p_0 и p_h — давления на высотах $z = 0$ и $z = h$ соответственно. Таким образом, расчет подтверждает правильность представления о весе газа как разности давлений на дно и крышку сосуда.

Молекулы газа, находящиеся в поле тяжести, обладают некоторой средней потенциальной энергией, избыточной по

сравнению со средней энергией газа, находящегося вне поля сил. Поэтому средняя энергия газа в поле тяжести, а следовательно, и его теплоемкость должны быть больше вычисленных нами ранее. Найдем избыточную теплоемкость, которую должен иметь газ, находящийся в поле тяжести. Для этого вычислим среднюю потенциальную энергию газовой молекулы в поле тяжести. По определению, она равна

$$\bar{u} = mg\bar{z} = mg \int z\, dw_{\text{Б}}, \tag{38,7}$$

где $dw_{\text{Б}}$ — вероятность того, что молекула будет находиться на высоте z и $z + dz$, даваемая формулой (38,5). Подставляя выражение для $dw_{\text{Б}}$ в (38,7), имеем

$$\bar{u} = mg\bar{z} = mg \frac{\int z e^{-\frac{mgz}{kT}} dz}{\int e^{-\frac{mgz}{kT}} dz}. \tag{38,8}$$

При вычислении интегралов, входящих в (38,8), очень существенно знать высоту столба газа. Рассмотрим прежде всего случай бесконечно высокого столба газа, точнее, столба, заключенного в сосуд, высота которого значительно больше, чем характеристическая высота δ. Тогда пределы интегрирования по z распространяются от $z = 0$ до $z \to \infty$. Вычисление простых интегралов (см приложение IV) дает

$$\bar{u} = kT.$$

Средняя потенциальная энергия одной молекулы в бесконечном столбе газа оказывается пропорциональной абсолютной температуре. Средняя потенциальная энергия грамм-моля газа в бесконечном столбе равна

$$\bar{U} = N_0\bar{u} = N_0kT.$$

Отсюда находим для избыточной теплоемкости при постоянном объеме на один грамм-моль, обусловленной потенциальной энергией,

$$C_V^{\text{пот}} = N_0k.$$

Полученная теплоемкость, таким образом, сравнима с теплоемкостью, обусловленной кинетической энергией молекул.

К совершенно иному выводу мы придем в случае столба, заключенного в сосуд высотой $h \ll \delta$. В этом случае средняя

потенциальная энергия молекулы равна

$$\bar{u} = mg \frac{\int\limits_0^h e^{-\frac{mgz}{kT}} z\, dz}{\int\limits_0^h e^{-\frac{mgz}{kT}} dz}.$$

Поскольку в пределах интегрирования $\frac{mgz}{kT} = \frac{z}{\delta} \ll 1$, подынтегральную функцию можно разложить в ряд и ограничиться первым членом разложения. Это дает

$$\bar{u} = \frac{mgh}{2},$$

$$\bar{U} = N\bar{u} = \frac{Nmgh}{2}.$$

В этом приближении средняя потенциальная энергия столба газа вообще не зависит от температуры. Соответствующий вклад в теплоемкость равен нулю. В следующем приближении можно получить некоторую теплоемкость, весьма малую по сравнению с теплоемкостью, обусловленной наличием кинетической энергии. Таким образом, в практически интересных случаях долей, вносимой потенциальной энергией в теплоемкость газа, можно пренебречь.

Рассмотрим, наконец, распределение по высоте молекул, обладающих различной массой. Из вида распределения (38,5) ясно, что чем больше масса молекулы, тем быстрее убывает число соответствующих молекул с высотой. Если молекулы с массами m_1 и m_2 на высоте $z = 0$ имеются в одинаковом количестве, то отношение числа молекул обоих сортов на высоте h равно

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{(m_1 - m_2)\, gh}{kT}}.$$

Если бы простые законы равновесного распределения плотности были применимы к земной атмосфере, то наблюдалось бы резкое изменение состава атмосферы с высотой. В действительности, однако, произведенные измерения состава атмосферы не подтверждают этого вывода. Общеизвестно также понижение температуры с высотой, что тоже находится в полном противоречии с требованием постоянства температуры в равновесном столбе газа. Эти, а также ряд других фактов показывают, что атмосфера не находится в состоянии статистического равновесия.

§ 39. Вычисление теплоемкости двухатомных молекул с помощью классической статистики и закон равномерного распределения по степеням свободы

Большая часть веществ в газообразном состоянии существует в виде молекул. Весьма часто приходится иметь дело с двухатомными газами. Таковы H_2, O_2, N_2, HCl, CO и целый ряд других. Нашей ближайшей задачей является обобщение полученных результатов на случай неодноатомных газов и, в особенности, на самый простой случай двухатомных газов.

Основным отличием неодноатомных газов от одноатомных является наличие у них вращательных и колебательных степеней свободы. Мы начнем рассмотрение с более простого случая — двухатомных газов. При этом мы будем вначале считать, что молекула представляет систему, подчиняющуюся законам классической механики. Поскольку внутреннее движение электронов в атоме нас интересовать не будет, каждый атом мы будем заменять материальной точкой, не имеющей протяженности. Две материальные точки, связанные между собой в молекулу, можно уподобить миниатюрной гантели, на концах которой находятся бесконечно малые шарики с массами m_1 и m_2 (различными массами атомов). Поскольку связь между атомами в молекуле является не абсолютно жесткой, возможны следующие виды движения: поступательное движение (три степени свободы); вращение вокруг двух осей, перпендикулярных к оси, соединяющей оба атома (две степени свободы); колебания атомов вдоль линии, их соединяющей. Мы считаем молекулы материальными точками, имеющими бесконечно малые размеры, так что говорить о вращении вокруг оси молекулы не имеет смысла.

Энергия молекулы может быть написана в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{поступ}} + \varepsilon_{\text{вращ}} + \varepsilon_{\text{колеб}}, \qquad (39,1)$$

где $\varepsilon_{\text{поступ}}$, $\varepsilon_{\text{вращ}}$ и $\varepsilon_{\text{колеб}}$ — соответственно энергии поступательного, вращательного и колебательного движений.

Состояние молекулы, образованной из двух связанных между собой атомов, определяется заданием шести координат и шести импульсов. Координатами являются: координаты x, y, z, определяющие положение центра инерции в пространстве; углы θ и φ, определяющие положение оси молекулы в пространстве; координата q, определяющая отклонение атомов от равновесного расстояния. Импульсы, соответствующие этим координатам, равны

$$p_x,\ p_y,\ p_z,\ M_1 = I\omega_1,\quad M_2 = I\omega_2,\ p_q.$$

Здесь I означает момент инерции, а ω — угловую скорость вращения молекулы. Соответствующее фазовое пространство имеет $2\cdot(3\cdot 2) = 12$ измерений.

Применим к молекуле распределение Гиббса, считая ее квазизамкнутой подсистемой. Очевидно, имеем

$$dw = \frac{1}{h^6 z}\cdot \exp\left[-\frac{\varepsilon_{\text{поступ}} + \varepsilon_{\text{вращ}} + \varepsilon_{\text{колеб}}}{kT}\right] d\Gamma. \qquad (39,2)$$

Элемент фазового пространства двухатомной молекулы может быть записан в виде

$$d\Gamma = d\Gamma_{\text{поступ}}\, d\Gamma_{\text{вращ}}\, d\Gamma_{\text{колеб}}, \qquad (39,3)$$

где введены обозначения:

$$d\Gamma_{\text{поступ}} = dp_x\, dp_y\, dp_z\, dx\, dy\, dz;$$
$$d\Gamma_{\text{вращ}} = dM_1\, dM_2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi; \quad d\Gamma_{\text{колеб}} = dp_q\, dq. \qquad (39,4)$$

Первый множитель в выражении фазового объема соответствует трем степеням свободы поступательного движения, второй — двум степеням свободы вращательного движения и третий — колебательному движению молекулы. Таким образом,

$$dw = \frac{1}{h^6 z} \exp\left[-\frac{\varepsilon_{\text{поступ}} + \varepsilon_{\text{вращ}} + \varepsilon_{\text{колеб}}}{kT}\right]\cdot d\Gamma_{\text{поступ}}\, d\Gamma_{\text{вращ}}\, d\Gamma_{\text{колеб}}. \qquad (39,5)$$

Мы видим, что распределение Гиббса распадается на три независимых множителя, соответствующих поступательному, вращательному и колебательному движениям. Каждый из этих видов движения является независимым от двух других. Поэтому поступательное движение, вращение и колебания можно рассматривать независимо друг от друга.

Поступательное движение двухатомных молекул ничем не отличается от поступательного движения одноатомных молекул, поскольку поступательное движение сводится к движению центра тяжести системы.

Рассмотрим теперь вращательное движение двухатомной молекулы.

Энергия вращения двухатомной молекулы при заданном расстоянии между атомами имеет вид

$$\varepsilon_{\text{вращ}} = \frac{I\omega_1^2}{2} + \frac{I\omega_2^2}{2} = \frac{M_1^2}{2I} + \frac{M_2^2}{2I}, \qquad (39,6)$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости молекулы, а M_1 и M_2 — моменты количества движения. Момент инерции молекулы I равен

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2, \qquad (39,7)$$

где a — расстояние между атомами и m_1 и m_2 — их массы.

Вероятность того, что молекула имеет значения момента количества движения, лежащие между M_1 и $M_1 + dM_1$, M_2 и $M_2 + dM_2$, и ориентирована в пространстве так, что ее ось образует с осями координат углы между θ, $\theta + d\theta$ и φ, $\varphi + d\varphi$, имеет вид

$$dw_{\text{вращ}} = \text{const} \cdot e^{-\frac{M_1^2+M_2^2}{2IkT}}\, dM_1\, dM_2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \qquad (39,8)$$

Поскольку мы не интересуемся ориентацией молекулы в пространстве, удобнее перейти от выражения (39,8) к выражению вероятности того, что моменты количества движения имеют данное значение при любой ориентации оси молекулы в пространстве. Интегрируя выражение (39,8) по углам θ и φ, получим

$$dw_{\text{вращ}} = \text{const} \cdot e^{-\frac{M_1^2+M_2^2}{2IkT}}\, dM_1\, dM_2. \qquad (39,9)$$

Постоянная в выражении (39,9) может быть найдена из условия нормирования.

Вместо моментов количества движения относительно осей можно ввести более привычные величины — угловые скорости. Тогда вероятность того, что молекула имеет компоненты угловой скорости, лежащие между ω_1, $\omega_1 + d\omega_1$ и ω_2, $\omega_2 + d\omega_2$, дается выражением

$$dw_{\text{вращ}} = \text{const} \cdot e^{-\frac{I\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)}{2kT}}\, d\omega_1\, d\omega, \qquad (39,10)$$

где постоянная снова определяется из условия нормирования.

Интегрируя формулу (39,10) по всем значениям компонент угловой скорости (пределы интегрирования можно распространить до $\pm\infty$ на том же основании, что и для компонент поступательной скорости), имеем

$$1 = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int e^{-\frac{I\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)}{2kT}}\, d\omega_1\, d\omega_2, \qquad (39,11)$$

откуда

$$\text{const} = \frac{I}{2\pi kT}. \qquad (39,12)$$

Поэтому окончательно имеем

$$dw_{\text{вращ}} = \frac{I}{2\pi kT}\, e^{-\frac{I\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)}{2kT}}\, d\omega_1\, d\omega_2. \qquad (39,13)$$

Исходя из условия (39,10), найдем среднюю энергию вращения

$$\bar{\varepsilon}_{\text{вращ}} = \frac{I}{2}\left(\overline{\omega_1^2} + \overline{\omega_2^2}\right). \tag{39,14}$$

Для среднего значения компоненты скорости имеем

$$\overline{\omega_1^2} = \frac{I}{2\pi kT} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^2 e^{-\frac{I\omega_1^2}{2kT}}\, d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{I\omega_2^2}{2kT}}\, d\omega_2 = \frac{kT}{I}. \tag{39,15}$$

Из соображений симметрии ясно, что

$$\overline{\omega_1^2} = \overline{\omega_2^2}, \tag{39,16}$$

поэтому среднее значение энергии вращения равно

$$\bar{\varepsilon}_{\text{вращ}} = kT. \tag{39,17}$$

На каждую степень свободы для вращательного движения приходится энергия, равна $\frac{kT}{2}$.

Переходя к колебательному движению двухатомной молекулы, заметим прежде всего, что можно в первом приближении ограничиться учетом малых колебаний около положения равновесия, т. е. равновесного расстояния между обоими атомами. При этом энергию колебаний двухатомной молекулы можно написать в виде

$$\varepsilon_{\text{колеб}} = \frac{\mu\dot{q}^2}{2} + \frac{\mu\omega^2 q^2}{2} = \frac{p_q^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2 q^2}{2}, \tag{39,18}$$

где q — отклонение атомов от положения равновесия, μ — приведенная масса, ω — частота колебаний, связанная с постоянной квазиупругой силы $\varkappa$ соотношением $\omega = \sqrt{\frac{\varkappa}{\mu}}$. Импульсом колеблющейся системы будет $p_q = \mu\dot{q}$.

Вероятность того, что атомы в колеблющейся молекуле находятся в положении q и имеют импульс p_q, имеет вид

$$dw_{\text{колеб}} = \frac{1}{z} \cdot e^{-\frac{p_q^2}{2\mu kT}} e^{-\frac{\mu\omega^2 q^2}{2kT}} \frac{dp_q\, dq}{h}. \tag{39,19}$$

Функция состояний z в выражении (39,19) находится из условия нормирования:

$$z = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p_q^2}{2\mu kT}}\, dp_q \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu\omega^2 q^2}{2kT}}\, dq; \tag{39,20}$$

поскольку подынтегральные функции весьма быстро убывают с ростом аргументов и интегралы быстро сходятся, мы распространили пределы до бесконечности. Простое вычисление дает

$$z=\frac{2\pi kT}{h\omega}. \tag{39,21}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$dw_{\text{колеб}}=\left(\frac{\omega}{2\pi kT}\right)e^{-\frac{p_q^2}{2\mu kT}}e^{-\frac{\mu\omega^2q^2}{2kT}}\,dp_q\,dq. \tag{39,22}$$

Найдем среднюю энергию колебательного движения

$$\bar{\varepsilon}_{\text{колеб}}=\frac{\overline{p_q^2}}{2\mu}+\frac{\mu\omega^2\overline{q^2}}{2}. \tag{39,23}$$

Вычисляя средние, имеем

$$\overline{p_q^2}=\mu kT,\quad \overline{q^2}=\frac{kT}{\mu\omega^2}. \tag{39,24}$$

Подставляя средние значения из (39,24) в (39,23), находим

$$\bar{\varepsilon}_{\text{колеб}}=kT. \tag{39,25}$$

На одну колебательную степень свободы приходится в среднем энергия, вдвое большая, чем на одну степень свободы поступательного или вращательного движений. Смысл этого станет понятным, если вспомнить, что при колебательном движении средняя (за период) кинетическая энергия системы равна средней потенциальной энергии. Энергия колебательного движения состоит из двух слагаемых, имеющих одинаковую структуру, — квадратичных выражений относительно независимой переменной p_q или q. Для остальных степеней свободы энергия выражается одним квадратичным в отношении независимой переменной членом на каждую степень свободы. Усреднение каждого квадратичного слагаемого в энергии приводит к средней энергии $\frac{kT}{2}+\frac{kT}{2}=kT$.

В общем случае мы можем сказать, что каждое квадратичное слагаемое, входящее в энергию системы, имеет среднее значение, равное $\frac{kT}{2}$. Мы убедились в том на примере одно- и двухатомных молекул. Все наши рассуждения могут быть перенесены без особого труда на случай многоатомных молекул.

Рассмотрим, например, трехатомные молекулы. Трехатомная молекула может иметь структуру, подобную молекуле CO_2 или подобную H_2O и SO_2 (рис. 49). В первом случае все атомы ее расположены вдоль линии и молекула называется линейной.

Молекулы второго типа называются нелинейными. В случае трехатомной линейной молекулы, имеющей девять степеней свободы, возможны следующие виды движения: поступательное движение молекулы как целого (три степени свободы); вращение вокруг двух осей, перпендикулярных к оси молекулы (две степени свободы); колебательное движение (четыре степени свободы). Возможные типы колебательного движения линейной молекулы изображены на рис. 49. Стрелками показаны направления движения в одной фазе нормальных колебаний; ν_1, ν_2 и ν_3 означают частоты колебаний. Возможны два колебания с частотой ν_2, происходящих независимо друг от друга в двух перпендикулярных плоскостях. Средняя энергия линейной молекулы слагается из средней энергии поступательного, вращательного и колебательного движений. Каждый из этих видов движения, а также различные нормальные колебания независимы друг от друга. Поэтому к каждому из этих видов движения в отдельности мы можем применить рассуждения предыдущих параграфов. На каждую степень свободы поступательного и вращательного движений приходится средняя энергия $\frac{kT}{2}$, а на каждую колебательную степень свободы — энергия kT. Таким образом, средняя энергия линейной трехатомной молекулы равна

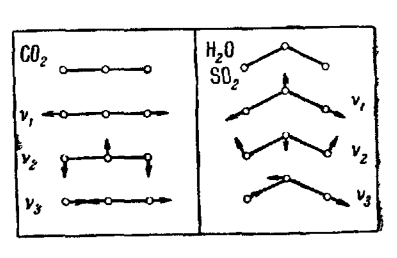


Рис. 49.

$$\bar{\varepsilon} = 3\frac{kT}{2} + 2\frac{kT}{2} + 4kT = 6{,}5kT.$$

Для нелинейной молекулы средняя энергия оказывается иной. У такой молекулы возможны следующие виды движения: поступательное движение молекулы как целого (три степени свободы); вращение вокруг трех взаимно перпендикулярных осей (три степени свободы); колебания (три степени свободы). Возможные нормальные колебания изображены на рис. 48. Все остальное, сказанное относительно линейных молекул, относится и к нелинейным трехатомным молекулам. Таким образом, средняя энергия нелинейной трехатомной молекулы равна

$$\bar{\varepsilon} = 3\frac{kT}{2} + 3\frac{kT}{2} + 3kT = 6kT.$$

Аналогичным образом может быть рассмотрен вопрос о средней энергии многоатомной молекулы. Если молекула содержит n атомов, то из $3n$ степеней свободы всегда имеется три

поступательные степени свободы, три или две (в случае линейной молекулы) вращательные и соответственно $(3n-6)$ или $(3n-5)$ колебательные степени свободы. Каждая из степеней свободы вносит соответственный вклад в среднюю энергию, такой же, как и у двухатомных или трехатомных молекул. Таким образом, средняя энергия n-атомной молекулы равна в случае нелинейной молекулы

$$\bar{\varepsilon}=\frac{3kT}{2}+3\,\frac{kT}{2}+(3n-6)\,kT,$$

а в случае линейной молекулы

$$\bar{\varepsilon}=\frac{3kT}{2}+2\,\frac{kT}{2}+(3n-5)\,kT.$$

В общем случае можно написать

$$\bar{\varepsilon}=r\,\frac{kT}{2},$$

где r — число квадратичных слагаемых, входящих в выражение для энергии. Таким образом, оказывается, что все степени свободы молекулы являются равноправными: каждое квадратичное слагаемое в энергии дает вклад в среднюю энергию молекулы, равный $\frac{kT}{2}$ (закон равномерного распределения по степеням свободы). Закон равномерного распределения является весьма общим законом. При выводе его мы не делали каких-либо специальных предположений, а считали лишь, что справедливы законы статистической физики и что движение молекулы происходит по законам классической механики.

Следует еще заметить, что название этого важного закона является весьма неудачным. В самой формулировке его подчеркивается различие между колебательными и другими степенями свободы.

Поскольку, однако, приведенная формулировка является общепринятой, мы будем ею пользоваться в дальнейшем. Более того, часто числом степеней свободы мы будем для краткости называть число квадратичных слагаемых в энергии.

Зная среднюю энергию газовой молекулы и учитывая, что все молекулы в идеальном газе совершенно одинаковы и равноправны, мы можем без труда найти среднюю энергию газа в целом. Если в газе имеется N частиц, то средняя энергия газа равна

$$E=N\bar{\varepsilon}=N\,\frac{rkT}{2}. \qquad (39{,}26)$$

Теплоемкость газа при постоянном объеме C_V равна

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{Nkr}{2}. \qquad (39,27)$$

В частности, для одного грамм-моля газа теплоемкость при постоянном объеме равна

$$C_V = \frac{rR}{2}. \qquad (39,28)$$

Соответственно теплоемкость при постоянном давлении равна

$$C_p = C_V + R = (r+2)\frac{R}{2}. \qquad (39,29)$$

Таким образом, теплоемкость идеальных газов оказывается не зависящей от температуры и определяется исключительно структурой молекулы. У одноатомных газов теплоемкость при постоянном объеме, вычисленная по формуле (39,28), равна $C_V = \frac{3R}{2} = 2{,}98$ *кал/моль · град*.

Для сравнения с опытом в табл. 3 (стр. 481) приведены измеренные значения теплоемкостей некоторых одноатомных газов при постоянном объеме и различных температур. Из табл. 3 видно, что предсказания теории хорошо оправдываются на опыте: теплоемкость одноатомных газов постоянна в широком интервале температур и имеет почти точно теоретическое значение.

Совершенно иная картина наблюдается у двухатомных газов. Согласно предсказаниям теории, теплоемкость двухатомных газов должна быть равна

$$C_V = \frac{7R}{2} = 6{,}95\ \frac{\text{кал}}{\text{моль}\cdot\text{град}}. \qquad (39,30)$$

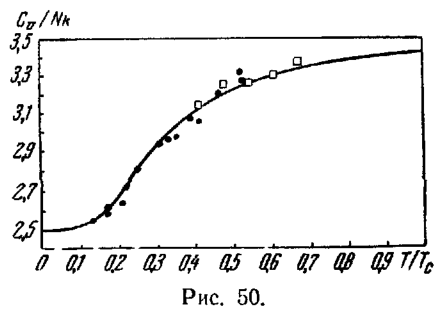


Рис. 50.

Однако опыт показывает, что такой большой теплоемкостью двухатомные газы в действительности не обладают. Кроме того, оказывается, что теплоемкость двухатомных газов зависит от температуры. Эта зависимость иллюстрируется рис. 50. Общий характер зависимости теплоемкости от температуры можно характеризовать следующим образом. При очень высоких температурах теплоемкость хотя и не достигает теоретического значения (39,30), но стремится к нему; с понижением температуры теплоемкость падает и стремится к значению

$$C_V = \frac{5R}{2} = 4{,}98\frac{\text{кал}}{\text{моль}\cdot\text{град}}. \qquad (39,31)$$

Это значение имела бы двухатомная молекула с абсолютно жесткой связью между атомами, при которой колебательное движение невозможно. Такое исчезновение колебательного движения с точки зрения классической механики является совершенно необъяснимым. С этой точки зрения, как мы неоднократно подчеркивали, все степени свободы являются совершенно равноправными. Исчезновение малых колебаний при понижении температуры находится в резком противоречии с

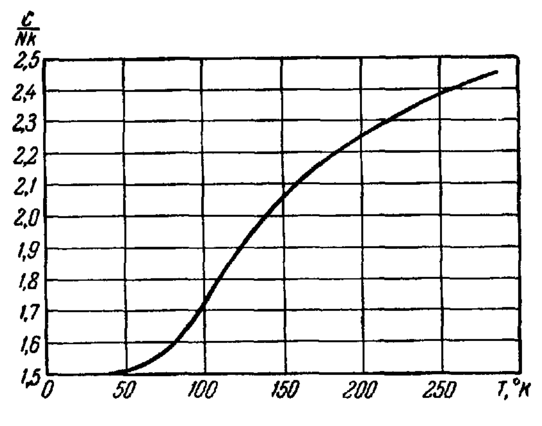


Рис. 51.

основными положениями классической механики. Еще более разительный пример такого противоречия дает поведение водорода при низких температурах. Именно, как видно из рис. 51, при понижении температуры теплоемкость водорода уменьшается и падает до значения $\frac{3}{2}R$, равного значению теплоемкости одноатомного газа. Таким образом, при низких температурах в молекулах водорода исчезает не только колебательное, но также и вращательное движение. Двухатомная молекула может совершать только поступательное движение.

С точки зрения обычных представлений кажется совершенно непонятным, почему протяженное тело, которым является двухатомная молекула, может потерять способность к вращению. Противоречие этого факта наглядным представлениям, основанным на законах классической механики, еще более очевидно, чем в случае исчезновения колебаний.

Все сказанное относительно двухатомных молекул целиком относится и к многоатомным молекулам. Доля энергии, приходящаяся на колебательные степени свободы, всегда значительно меньше той, которая должна была бы быть при выполнимости закона равномерного распределения. Например, в случае ли-

нейной молекулы CO_2 колебательная теплоемкость должна была бы быть равной $4R \approx 8$ *кал/моль·град*. Фактически она составляет около 0,8 *кал/моль·град* при комнатной температуре и возрастает до значения 6 *кал/моль·град* при очень высоких температурах. Аналогично молекулы CH_4, обладающие девятью колебательными степенями свободы, которым по закону равномерного распределения должна соответствовать теплоемкость 18 *кал/моль·град*, имеют колебательную теплоемкость, не превышающую 3,3 *кал/моль·град*.

Таким образом, опыт указывает на неприменимость закона равномерного распределения энергии по степеням свободы. Но, как мы подчеркивали, этот закон основан только на двух предположениях — предположении о применимости общих статистических законов к простейшим молекулярным системам и предположении о применимости законов классической механики к описанию движения отдельных молекул. Поскольку в справедливости первого предположения нет никаких сомнений, противоречие с опытом, к которому приводит закон равномерного распределения, показывает, что второе предположение является ошибочным. В действительности движение отдельных молекул подчиняется законам квантовой механики. Ниже будет изложена статистика молекулярных систем, движущихся по законам квантовой механики.

§ 40. Термодинамические функции системы, могущей находиться в двух квантовых состояниях

Прежде чем перейти к рассмотрению более сложных двух- и многоатомных молекул, следует рассмотреть в общем виде свойства системы, которая может находиться в двух квантовых состояниях. Мы не будем при этом конкретизировать природу этих квантовых уровней. В следующих параграфах мы увидим, что это могут быть квантовые уровни энергии вращательного или колебательного движений; иногда они могут иметь и другую природу.

Найдем функцию состояний такой системы. По определению,

$$z = \sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} g(\varepsilon_i), \qquad (40,1)$$

где ε_i — квантовые уровни энергии и $g(\varepsilon_i)$ — число состояний частицы, энергия которых равна ε_i. Если g отлично от единицы, так что одному значению энергии системы отвечает несколько различных состояний, то эти последние называются вырожденными состояниями, а число их — статистическим весом уровня энергии ε_i. В нашем случае, когда мы для простоты

ограничиваемся двумя уровнями энергии, индекс i пробегает значения 0,1. Обозначим $g(\varepsilon_0)$ через g_0, а $g(\varepsilon_1)$ — через g_1. Тогда

$$z = g_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} + g_1 e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} = g_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} \left(1 + \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{kT}}\right). \qquad (40,2)$$

Если выражать энергию в тепловых единицах kT, то можно написать

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = kT_c, \qquad (40,3)$$

где T_c — некоторая температура, отвечающая разности $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)$; с помощью (40,3) выражение (40,2) можно написать в виде

$$z = g_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} \left(1 + \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{T_c}{T}}\right). \qquad (40,4)$$

Из выражений (40,2) или (40,4) видим, что если разность энергий между возбужденным и основным уровнями настолько велика, что при температуре T имеет место неравенство $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \gg kT$ или $T_c \gg T$, то вторым членом в (40,4) можно пренебречь, так что

$$z = g_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}. \qquad (40,5)$$

Физически это означает, что при данной температуре вероятность того, что система попадает в возбужденное состояние с энергией ε_1, весьма мала. Температура является слишком низкой для того, чтобы тепловое возбуждение могло с заметной вероятностью переводить систему в верхнее энергетическое состояние. Если, однако, в функцию состояний входит лишь один член, так что система с вероятностью, равной единице, находится в состоянии с энергией ε_0, то ее энергия в точности равна ε_0. Это же подтверждает прямое вычисление.

Функция состояний системы, образованной из N независимых одинаковых частиц, равна

$$Z = \frac{1}{N!} \left(g_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}\right)^N.$$

Энергия системы согласно (21,3) равна

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = N\varepsilon_0.$$

Теплоемкость системы при постоянном объеме равна

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = 0. \qquad (40,6)$$

Мы видим, таким образом, что при $T \ll T_c$ наличие второго уровня совершенно не сказывается на термодинамических свойствах системы, которая ведет себя, как система с постоянной энергией. Теплоемкость системы при достаточно низкой температуре равна нулю.

Представляет интерес поведение теплоемкости системы с двумя уровнями энергии при повышении температуры. Если неравенство $T_c \gg T$ не выполняется, то в функции состояний нужно оставить оба члена, написав

$$z = g_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}\left(1 + \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}}\right).$$

При этом

$$Z = \frac{1}{N!}\left(g_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}\right)^N \left(1 + \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}}\right)^N.$$

Энергия системы

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = N\varepsilon_0 + \frac{N g_1 \Delta\varepsilon e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}}}{g_0\left(1 + \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}}\right)}. \qquad (40,7)$$

Наконец, теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = N\left(\frac{g_1}{g_0}\right)\left(\frac{(\Delta\varepsilon)^2}{kT^2}\right)\frac{e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}}}{\left(1 + \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}}\right)^2} =$$

$$= Nk\left(\frac{g_1}{g_0}\right)\left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \frac{e^{-\frac{T_c}{T}}}{\left[1 + \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{T_c}{T}}\right]^2}. \qquad (40,8)$$

Ход теплоемкости изображен на рис. 52. Из рис. 52 видно, что теплоемкость обнаруживает своеобразный ход: при $T = 0$ она в согласии со сказанным ранее равна нулю. При повышении температуры теплоемкость возрастает и имеет характерный максимум. При дальнейшем росте температуры теплоемкость вновь обращается в нуль. Последнее обстоятельство представляет характерную особенность системы с конечным числом уровней. Причина обращения C_V в нуль становится понятной из формулы (40,7). При очень высокой температуре энергия

системы равна

$$E \approx N\varepsilon_0 + \frac{Ng_1}{g_0}\,\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{(1+g_1/g_0)} = \text{const} \tag{40,9}$$

и не зависит от температуры. Физически это означает, что при $T \gg T_c$ тепловое возбуждение так велико, что система может одинаково легко находиться и в нормальном и в возбужденном состояниях. Вероятность нахождения ее в возбужденном состоянии сравнима с вероятностью ее нахождения в нормальном состоянии

Если бы система имела другие возбужденные уровни, простиравшиеся до как угодно больших энергий, последнее обстоятельство не имело бы места. Даже при высокой температуре нашлись бы такие уровни энергии, в которые система попадала бы с малой вероятностью. Поэтому средняя энергия такой системы не выражалась бы формулой типа (40,9), а при высокой температуре зависела бы от температуры.

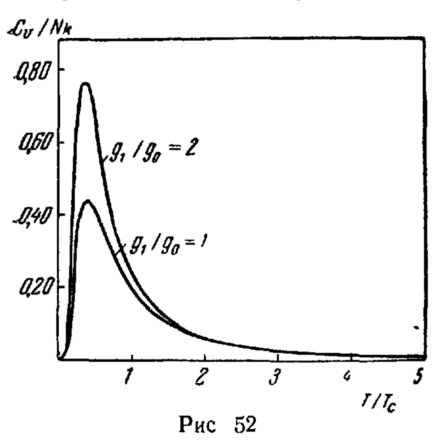


Рис 52

Соответственно при высокой температуре не будет обращаться в нуль теплоемкость системы.

Характерный ход теплоемкости с максимумом, обращающейся в нуль со стороны низких и высоких температур, является специфическим для системы с уровнями, лежащими в конечном интервале энергий. Наличие именно двух уровней упрощает расчет, но не является сколько-нибудь существенным. Аналогичный ход теплоемкости будет иметь место и в системах с несколькими уровнями Важно лишь, чтобы они лежали достаточно близко друг к другу, так чтобы можно было достигнуть температуры, при которой выполнено условие $kT \gg \gg (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)$. Типичным примером атомов с двумя близкими уровнями являются атомы галоидов и щелочных металлов. У галоидов нижний уровень обладает четырехкратным вырождением $g_0 = 4$, ближайший к нему возбужденный уровень вырожден двукратно, $g_1 = 2$. Расстояние между уровнями — у фтора $T_c = 582{,}7°$ K, у хлора $T_c = 1299°$ K, у брома $T_c = 5275°$ K. Следующий уровень энергии лежит много выше — соответствующая температура составляет несколько десятков тысяч градусов (например, у брома — около $88 \cdot 10^{3}°$ K) — и не дает практически никакого вклада в теплоемкость.

§ 41. Двухатомные молекулы

Простейшими молекулами являются двухатомные молекулы, представляющие устойчивое соединение двух одинаковых или различных атомов. Мы лишены возможности подробно разбирать вопрос о природе сил, приводящих к образованию молекул из свободных атомов, а также детально описывать движение атомов в молекулах. Поэтому мы ограничимся лишь самой поверхностной характеристикой молекул, приведя только те сведения, которые нам понадобятся для дальнейшего. (Теории молекул посвящена гл. X ч. V.)

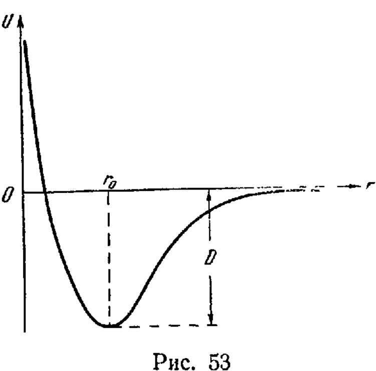


Рис. 53

На рис. 53 изображена типичная кривая, представляющая энергию взаимодействия электронных оболочек атомов как функцию расстояния между ними. Потенциальная энергия взаимодействия имеет минимум в некоторой точке, обозначенной буквой r_0. Вправо от нее на больших расстояниях тангенс угла наклона кривой, а следовательно, и сила взаимодействия положительны. Это означает, что атомы притягиваются друг к другу. Слева от точки, в области, где электронные оболочки перекрываются, возникает сильное отталкивание между атомами.

Таким образом, устойчивому положению равновесия в молекуле отвечает некоторое определенное расстояние между ядрами атомов, которое можно назвать диаметром молекулы (см. табл. 4 на стр. 506). Энергия электронных оболочек $U(r_0)$ имеет минимальное значение. Если расстояние между ядрами изменяется на малую величину x, то энергия молекулы становится равной $U(r_0+x)$. При малых значениях x ее можно разложить в ряд по степеням x и ограничиться первыми членами разложения:

$$U(r_0+x) \approx U(r_0) + \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=r_0} x + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_{r=r_0} \frac{x^2}{2} = U(r_0) + \varkappa \frac{x^2}{2} \quad (41,1)$$

(в точке минимума первая производная равна нулю, а вторая — положительна). Формула (41,1) показывает, что при отклонении атомов от равновесного положения на них действует квазиупругая сила, возвращающая их в положение равновесия. Из сказанного ясно, что в молекуле, помимо движения электронов в атомных оболочках, возможно еще колебание атомов

около положения равновесия. Кроме того, молекула как целое может вращаться вокруг двух осей, перпендикулярных к прямой, соединяющей ядра.

Таким образом, энергию молекулы можно считать слагающейся из энергии поступательного движения молекулы как целого в пространстве, энергии движения электронов, энергии колебаний и энергии вращения молекулы. Поступательное движение двухатомной молекулы ничем не отличается от поступательного движения одноатомной молекулы. Нас поэтому будет интересовать только внутреннее движение двухатомной молекулы. Ее внутреннюю энергию можно написать в виде

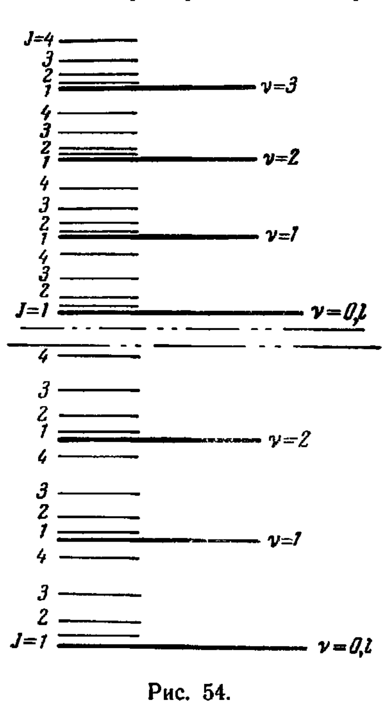


Рис. 54.

$$\varepsilon_{внутр} = \varepsilon_{эл} + \varepsilon_{колеб} + \varepsilon_{вращ}, \qquad (41,2)$$

где $\varepsilon_{эл}$ — энергия движения электронов, $\varepsilon_{колеб}$ — энергия колебаний и $\varepsilon_{вращ}$ — энергия вращения. Внутреннее движение молекулы оказывается квантованным. Энергии $\varepsilon_{эл}$, $\varepsilon_{колеб}$ и $\varepsilon_{вращ}$ принимают дискретный ряд значений. При этом оказывается, что расстояние между соседними уровнями энергии электронов в молекуле $\Delta\varepsilon_{эл}$ гораздо больше расстояния между соседними уровнями энергии колебательного движения $\Delta\varepsilon_{колеб}$. В свою очередь расстояние между соседними уровнями энергии колебательного движения $\Delta\varepsilon_{колеб}$ очень велико по сравнению с расстоянием между соседними уровнями вращательного движения $\Delta\varepsilon_{вращ}$. Итак,

$$\Delta\varepsilon_{эл} \gg \Delta\varepsilon_{колеб} \gg \Delta\varepsilon_{вращ}. \qquad (41,3)$$

Поэтому энергетические уровни молекулы расположены так, как это схематически показано на рис. 54. На этом рисунке схематически показаны колебательные и вращательные уровни, принадлежащие к двум электронным уровням, l и l'. Расстояние между последними велико и показано штрих-пунктиром в знак того, что оно не может поместиться в масштабе рисунка. Жирные линии отвечают колебательным состояниям с квантово-

выми числами $v = 0$, 1, 2. Тонкие линии — разные вращательные уровни с квантовыми числами $J = 1$, 2, 3, 4. Поскольку движение электронов происходит гораздо быстрее, чем движение тяжелых ядер (при колебаниях и вращении молекулы как целого), в первом приближении можно считать, что движение ядер не сказывается на движении электронов.

Далее, если амплитуда колебаний ядер в молекуле достаточно мала, можно пренебречь влиянием колебательного движения на вращение. При малой амплитуде колебаний изменение расстояний между ядрами настолько мало, что соответствующее изменение момента инерции молекулы весьма мало и его можно не учитывать. Вращение будет происходить с неизменным моментом инерции, как будто бы колебаний не происходило. Таким образом, в первом приближении все три вида движения в молекуле можно считать независимыми друг от друга.

Следует заметить, что точность современных методов измерений такова, что для многих целей вычисления, основанные на представлении о независимом вращательном и колебательном движениях, оказываются недостаточно точными. В современной теории приходится учитывать изменение момента инерции молекулы, обусловленное ее колебаниями.

Соседние уровни энергии электронного движения, так же как и уровни энергии в атомах, лежат на расстоянии порядка нескольких электрон-вольт, что соответствует температуре в несколько тысяч градусов. Для того чтобы перевести молекулу с одного уровня электронного движения на другой, ей должна быть сообщена соответствующая энергия. Это возможно только при очень высоких температурах (а также при нетепловых воздействиях на молекулу, например при освещении ее светом, ударе быстрым электроном и т. п.). Обычно, однако, можно считать, что источники возбуждения электронного движения отсутствуют и молекулы находятся на самом низком энергетическом уровне электронного движения. В дальнейшем мы ограничимся исследованием этого случая. Таким образом, при рассмотрении теплового движения молекул электронные уровни энергии вообще можно не принимать во внимание.

Рассмотрим теперь колебательное движение двухатомной молекулы. Колебания обоих ядер около равновесного расстояния можно свести к колебательному движению одной материальной точки с приведенной массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Такая материальная точка представляет собой линейный осциллятор, рассмотренный в § 1. При достаточно малой амплитуде колебаний его можно считать гармоническим осциллятором. Энергия гармонического осциллятора принимает дискретный ряд

значений, даваемый формулой (1,18):

$$\varepsilon_{\text{колеб}} = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

где квантовое число n принимает ряд целочисленных значений: $n = 0, 1, 2, \ldots$, ν — классическая частота, связанная с постоянной квазиупругой силы $\varkappa$ и массой осциллятора обычным соотношением

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\varkappa}{\mu}}.$$

Все уровни осциллятора являются невырожденными, так что каждому значению квантового числа n отвечает вполне определенная энергия $\varepsilon_{\text{колеб}}$. Разность энергий между соседними уровнями колебательного движения равна

$$\Delta\varepsilon_{\text{колеб}} = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right) - h\nu\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right) = h\nu$$

и не зависит от квантового числа n: уровни энергии расположены на равных расстояниях друг от друга.

Согласно правилу частот Бора при переходе системы с одного уровня энергии на другой излучается или поглощается свет с энергией $h\nu$. В квантовой механике показывается, что изменение квантового числа n подчиняется так называемому правилу отбора:

$$\Delta n = \pm 1.$$

Измеряя частоты поглощения или излучения света молекулами, можно определить собственную частоту ν молекулы и найти постоянную квазиупругой силы $\varkappa$ и разности энергий $\Delta\varepsilon_{\text{колеб}}$. Значения этих величин для некоторых молекул приведены в табл. 4. Частоты, излучаемые или поглощаемые моле-

Таблица 4

Основные величины, характеризующие свойства двухатомных молекул

Молекула	Расстояние между атомами r_0, 10^{-8} *см*	Момент инерции I, 10^{-40} *г см*^{2}	Частота колебаний $\frac{\nu}{c}$, *см*$^{-1}$	Вращательная постоянная $\frac{B}{c} = \frac{h}{8\pi^2 Ic}$, *см*$^{-1}$	Постоянная квазиупругой силы $\varkappa$, 10^{-5} *дн/см*	Энергия диссоциации D, *эв*
H_2 . . .	0,74	0,46	4276	59,35	5,1	4,48
N_2 . . .	1,10	13,84	2360	2,00	22,2	7,38
O_2 . . .	1,21	19,13	1580	1,45	11,3	5,08
Cl_2 . . .	1,99	113,5	565	0,24	3,21	2,47
HCl . .	1,27	2,67	2989	10,6	8,65	4,40
CO . . .	1,13	14,37	2169	1,92	18,6	9,61
NO . .	1,15	16,43	1906	1,68	15,4	5,29

кулами при изменении их колебательного состояния (при фиксированном значении электронной энергии), лежат в инфракрасной области спектра[1]) и составляют обычно 100—4000 $см^{-1}$.

Приведенные формулы для энергии колеблющейся молекулы справедливы лишь в приближении малых колебаний. При большом возбуждении колебаний (например, при высокой температуре) амплитуда их становится не малой и следует учитывать ангармоничные члены в потенциальной энергии.

Рассмотрим теперь вращательное движение двухатомной молекулы. Если пренебречь изменением момента инерции молекулы из-за колебаний, то молекулу можно считать твердым ротатором с моментом инерции $I=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} r_0^2$, вращающимся вокруг центра тяжести. Как показывается в квантовой механике (§ 81, ч. V), энергия вращающегося ротатора выражается формулой

$$\varepsilon_{\text{вращ}}=\frac{h^2}{8\pi^2 I} j(j+1)=hBj(j+1), \qquad (41,4)$$

где j — квантовое число, принимающее целочисленные значения: $j=0, 1, 2, \ldots,$ и $B=\frac{h}{8\pi^2 I}$ — постоянная, называемая вращательной постоянной. При этом оказывается, что состояния ротатора, отвечающие данной энергии вращения, являются $(2j+1)$-кратно вырожденными (см. § 30 и § 81, ч. V).

При изменении квантовых состояний молекулы квантовое число изменяется на величину $\Delta j=\pm 1$. Расстояние между соседними уровнями энергии вращения равно

$$\Delta\varepsilon_{\text{вращ}}=\frac{h^2}{4\pi^2 I}(j+1).$$

Наблюдая излучение при переходе между вращательными уровнями, можно определить величину $\Delta\varepsilon_{\text{вращ}}$ и, следовательно, момент инерции молекулы I. Значение этих величин для некоторых молекул можно вычислить с помощью табл. 4. Подставляя в выражения для $\varepsilon_{\text{вращ}}$ и $\varepsilon_{\text{колеб}}$ значения постоянных, приведенных в четвертом и пятом столбцах таблицы, убеждаемся в справедливости предположения о том, что $\Delta\varepsilon_{\text{колеб}} \gg \Delta\varepsilon_{\text{вращ}}$ ($\Delta\varepsilon_{\text{вращ}}$ в 800—1000 раз меньше $\Delta\varepsilon_{\text{колеб}}$). Нужно заметить, что на практике редко удается наблюдать переходы молекулы между разными вращательными уровнями при неизменных электронном и колебательном состояниях, так как $\Delta\varepsilon_{\text{вращ}}$ столь мало, что соответствующие частоты $\nu=\frac{\Delta\varepsilon_{\text{вращ}}}{h}$ лежат в далекой

[1]) Нужно заметить, что это не относится к симметричным молекулам типа H_2 и O_2, у которых таких переходов нет. У этих молекул $\Delta\varepsilon_{\text{колеб}}$ определяется из переходов с одновременным изменением электронных состояний.

инфракрасной части спектра, где точность измерений мала. Чаще всего наблюдаются спектры излучения и поглощения молекул в области видимого спектра. Эти спектры возникают при одновременном изменении электронного, колебательного и вращательного состояний молекулы. Излучаемый (или поглощаемый) при этом спектр имеет характер групп близких спектральных линий, сливающихся в слабом спектроскопе в сплошные полосы (полосатый спектр молекул). Происхождение полос легко понять из рис. 53. Пусть, например, переход происходит с верхних на самый нижний уровень. Основная частота излучается при переходе с уровня 2 $v=0$, $j=1$. Близкие к ней частоты излучаются при переходе с уровней 2, $v=1$, $j=0$; $v=2$, $j=0$ и т. д. Таким образом, при одновременном изменении колебательного, вращательного и электронного состояний молекулы излучается целый ряд частот, лежащих близко друг к другу (поскольку выполнено неравенство (41,3)). Совокупность спектроскопических данных позволила установить положение энергетических уровней для очень большого числа двухатомных молекул.

§ 42. Термодинамические функции двухатомных газов

Теперь мы можем перейти к рассмотрению теплоемкостей и термодинамических функций двухатомных газов, вычисление которых оказалось непреодолимо трудным для классической статистики. Схема вычисления термодинамических функций двухатомных газов ничем не отличается от рассмотренной уже нами схемы вычисления для одноатомных газов. Поскольку молекулы являются тождественными между собой независимыми частицами, функция состояний всего газа, содержащего N молекул, может быть написана в виде

$$Z=\frac{1}{N!}(z)^N. \qquad (42,1)$$

Нам требуется найти функцию состояний одной молекулы. Энергию молекулы можно разбить на энергию движения ее как целого в пространстве и энергию внутреннего движения:

$$\varepsilon=\varepsilon_{\text{поступ}}+\varepsilon_{\text{внутр}}.$$

Поскольку эти два вида движения являются независимыми, число состояний системы, отвечающих энергии ε, распадается на число состояний, отвечающих энергии поступательного и внутреннего движений:

$$\Omega=\Omega(\varepsilon_{\text{поступ}})\,\Omega(\varepsilon_{\text{внутр}}).$$

Соответственно этому функцию состояний можно разбить на произведение двух множителей

$$z = \sum e^{-\frac{\varepsilon_{\text{поступ}}}{kT}} \Omega(\varepsilon_{\text{поступ}}) \cdot \sum e^{-\frac{\varepsilon_{\text{внутр}}}{kT}} \Omega(\varepsilon_{\text{внутр}}) = z_{\text{поступ}} \cdot z_{\text{внутр}}, \quad (42.2)$$

где $z_{\text{поступ}}$ — функция состояний, связанная с поступательным движением молекулы как целого, и $z_{\text{внутр}}$ — функция состояний внутреннего движения.

Функция состояний поступательного движения двухатомной молекулы ничем не отличается от функции состояний одноатомной молекулы, поскольку она движется в пространстве как материальная точка с массой $m = m_1 + m_2$, находящейся в центре тяжести молекулы. Поэтому для функции состояний поступательного движения можно написать

$$z_{\text{поступ}} = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} V. \quad (42,3)$$

Более сложным является вычисление $z_{\text{внутр}}$. Внутреннее движение двухатомной молекулы сводится к вращению ее относительно двух взаимноперпендикулярных осей и колебаниям атомов около положения равновесия. В первом приближении можно не учитывать влияния малых колебаний на величину момента инерции молекулы и считать колебательное и вращательное движения независимыми друг от друга (ср. § 41). Электронную энергию, остающуюся все время неизменной, можно совсем не рассматривать. Поэтому согласно (41,2) энергию внутреннего движения молекулы можно написать в виде

$$\varepsilon_{\text{внутр}} = \varepsilon_{\text{колеб}} + \varepsilon_{\text{вращ}}.$$

Соответственно этому функция состояний для внутреннего движения распадается на произведение двух множителей

$$z_{\text{внутр}} = \sum e^{-\frac{\varepsilon_{\text{колеб}} + \varepsilon_{\text{вращ}}}{kT}} \Omega(\varepsilon_{\text{колеб}}) \Omega(\varepsilon_{\text{вращ}}) =$$
$$= \sum e^{-\frac{\varepsilon_{\text{колеб}}}{kT}} \Omega(\varepsilon_{\text{колеб}}) \sum e^{-\frac{\varepsilon_{\text{вращ}}}{kT}} \Omega(\varepsilon_{\text{вращ}}) = z_{\text{колеб}} \cdot z_{\text{вращ}}. \quad (42,4)$$

Подставляя в (42,1) выражения для z из (42,2) и (42,4), получим

$$Z = \frac{1}{N!} (z_{\text{поступ}})^N (z_{\text{колеб}})^N (z_{\text{вращ}})^N. \quad (42,5)$$

Отсюда можно найти выражения для термодинамических функций:

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln \frac{z^N_{\text{поступ}}}{N!} - kT \ln z^N_{\text{вращ}} - kT \ln z^N_{\text{колеб}} =$$
$$= F_{\text{поступ}} + F_{\text{колеб}} + F_{\text{вращ}}, \quad (42,6)$$

где через $F_{\text{поступ}}$, $F_{\text{колеб}}$ и $F_{\text{вращ}}$ обозначены отдельные слагаемые в свободной энергии, обязанные своим происхождением поступательному, колебательному и вращательному движениям молекул газа. Выражение для $F_{\text{поступ}}$ совпадает со свободной энергией одноатомного газа (формула (37,7)), если заменить в последней массу одного атома на суммарную массу двухатомной молекулы. Аналогично

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = E_{\text{поступ}} + E_{\text{колеб}} + E_{\text{вращ}}, \tag{42,7}$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = S_{\text{поступ}} + S_{\text{колеб}} + S_{\text{вращ}}, \tag{42,8}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = C_{V_{\text{поступ}}} + C_{V_{\text{колеб}}} + C_{V_{\text{вращ}}}. \tag{42,9}$$

Таким образом, все термодинамические функции распадаются на отдельные слагаемые. Каждое слагаемое соответствует одному из не зависящих друг от друга видов движения двухатомной молекулы: поступательному, колебательному или вращательному. Для вычисления термодинамических функций атомного газа необходимо найти соответствующие функции состояний внутреннего движения. В следующих параграфах мы рассмотрим функции состояний колебательного и вращательного движений.

§ 43. Колебательная фукция состояний и вклад колебаний в энергию и теплоемкость

В первом приближении колеблющуюся двухатомную молекулу можно рассматривать как квантовый гармонический осциллятор, энергия которого выражается формулой (1,18). Все уровни энергии осциллятора являются невырожденными, т. е. с весом $\Omega = 1$. Подставляя выражение для энергии (1,18) в функцию состояний, имеем

$$z_{\text{колеб}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right)}{kT}} = e^{-\frac{h\nu}{2kT}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu n}{kT}}. \tag{43,1}$$

Воспользовавшись известной формулой суммирования бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$z_{\text{колеб}} = e^{-\frac{h\nu}{2kT}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)^n = \frac{e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}. \tag{43,2}$$

Из формулы (43,2) видим, что функция состояний, а следовательно, и термодинамические величины определяются зна-

чением переменной $h\nu/kT$. В обозначениях § 40 мы можем, выразив $h\nu$ в энергетических единицах, написать: $h\nu = kT_c$, где T_c — так называемая характеристическая температура. Формулу (43,2) можно переписать в виде

$$z_{\text{колеб}} = \frac{e^{-\frac{T_c}{2T}}}{1 - e^{-\frac{T_c}{T}}}.$$

Вычислим теперь термодинамические функции двухатомной молекулы, отвечающие ее колебательному движению. Найдем прежде всего среднюю колебательную энергию:

$$E_{\text{колеб}} = N\bar{\varepsilon}_{\text{колеб}} = NkT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln z_{\text{колеб}} = NkT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{e^{-\frac{T_c}{2T}}}{1 - e^{-\frac{T_c}{T}}} =$$

$$= \frac{NkT_c}{2} \operatorname{ctg} \frac{T_c}{2T} = \frac{Nh\nu}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{h\nu}{2kT}\right). \quad (43,3)$$

Для колебательной теплоемкости находим

$$C_{V_{\text{колеб}}} = \frac{\partial E_{\text{колеб}}}{\partial T} = \frac{Nk}{4}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{h\nu}{2kT}\right)} = \frac{Nk}{4}\left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{T_c}{2T}\right)}. \quad (43,4)$$

Мы видим, что средние колебательные энергия и теплоемкость оказываются сложными функциями температуры T и характеристической температуры T_c (или собственной частоты ν). Рассмотрим предельный вид этих функций при высоких ($T \gg T_c$) и низких ($T \ll T_c$) температурах. В первом случае экспоненциальную функцию можно разложить в ряд и ограничиться первыми членами разложения. Это дает

$$E_{\text{колеб}} \approx NkT, \quad (43,5)$$

$$C_{V_{\text{колеб}}} \approx Nk. \quad (43,6)$$

При низких температурах $e^{\frac{T_c}{T}} \gg 1$, так что

$$E_{\text{колеб}} \approx \frac{NkT_c}{2} + NkT_c e^{-\frac{T_c}{T}}, \quad (43,7)$$

$$C_{V_{\text{колеб}}} \approx Nk\left(\frac{T_c}{T}\right)^2 e^{-\frac{T_c}{T}}. \quad (43,8)$$

Формулы (43,5) и (43,6) совпадают с классическими формулами § 39. Наоборот, при низких температурах выражения для энергии и теплоемкости очень существенно отличаются от классических. При понижении температуры энергия колебаний стремится к постоянному пределу $E_0 = \frac{NkT_c}{2} = \frac{Nh\nu}{2}$. Последняя величина, представляющая энергию колебаний молекул при абсолютном нуле, носит название нулевой энергии. Существование нулевой энергии является характерной особенностью квантового движения. Оно является выражением того факта, что в квантовой теории понятие полного покоя частицы оказывается лишенным физического смысла.

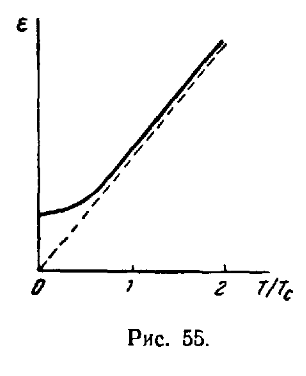


Рис. 55.

Численное значение E_0 может быть найдено из спектроскопических данных; для этого нужно лишь найти значение собственной частоты колебаний молекулы ν. Теплоемкость при низких температурах оказывается малой величиной, убывающей по экспоненциальному закону, т. е. стремящейся к нулю при $T \to 0$. Таким образом, общая схема изменения энергии и теплоемкости с температурой сводится к тому, что при высоких температурах, когда тепловая энергия kT велика по сравнению с расстоянием между уровнями энергии $\Delta\varepsilon = h\nu = kT_c$, теплоемкость и энергия даются классическими выражениями; при низких температурах энергия стремится к предельному значению — к нулевой энергии квантового осциллятора, а теплоемкость — к нулю. Такой ход величин находится в согласии с общими соображениями. При высоких температурах размер квантовых ступенек $\Delta\varepsilon$ оказывается малым по сравнению с тепловой энергией, так что осциллятор может находиться в большом числе возбужденных квантовых состояний, а его энергию можно считать изменяющейся непрерывно, как у классического осциллятора. Наоборот, при низких температурах осциллятор все время находится в нормальном состоянии и тепловое возбуждение является недостаточным для перевода его в верхние возбужденные состояния.

Кривая зависимости средней энергии осциллятора от отношения T/T_c, даваемая формулой (43,3), изображена на рис. 55. Из рис. 55 видно, что при приближении T к T_c происходит плавный переход между предельными значениями (43,5) и (43,7). Основное отличие классического выражения для средней энергии осциллятора (43,5) от квантового выражения (43,3) состоит в том, что в последнем случае энергия зависит от частоты. Благодаря этому задание температуры не характеризует еще пол-

ностью энергию осциллятора. При одной и той же температуре два осциллятора с разными собственными частотами колебаний будут иметь различные энергии. На рис. 56 изображена зависимость энергии осциллятора от частоты при фиксированной температуре T.

Теплоемкость плавно убывает с падением температуры от ее классического значения (43,6) до нуля. Таким образом, исчезновение колебательной теплоемкости, «замораживание» колебаний, о котором шла речь в § 39, появляется при рассмотрении свойств молекулы как квантового осциллятора самым непосредственным и естественным образом.

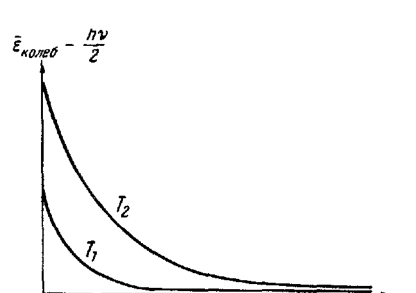


Рис. 56.

При низких температурах частота колебаний ν оказывается относительно (по сравнению с kT/h) очень большой. Большой частоте соответствует большая жесткость связи обоих атомов. С понижением температуры рост относительной жесткости приводит к тому, что колебания постепенно прекращаются.

Чтобы можно было представить себе порядки величин и, в частности, порядок характеристических температур различных молекул, мы приводим в табл. 5 соответствующие значения для ряда молекул. Значения частот собственных колебаний молекул находятся из спектроскопических данных.

Таблица 5

Молекула	Характеристическая температура × 1000° K	Молекула	Характеристическая температура × 1000° K
H_2	6,0	HCl . . .	4,14
N_2	3,34	HBr . . .	3,7
O_2	2,23	HJ	3,2
CO	3,07		

Из табл. 5 можно сразу же сделать важный в практическом отношении вывод: поскольку характеристические температуры колебаний всех молекул имеют порядок нескольких тысяч градусов, температура порядка 300° K соответствует предельному случаю $T \ll T_c$. Поэтому колебательная теплоемкость большинства молекул при комнатных температурах очень мала. Например,

в случае HJ при 640° K вычисление по общей формуле (43,4) показывает, что колебательная теплоемкость составляет около 0,08 *кал/град · моль*. В большинстве практически важных случаев при не очень высоких температурах можно считать, что колебательное движение является замороженным и его вклад в теплоемкость равен нулю. Во всяком случае он существенно меньше, чем это следовало бы из закона равномерного распределения. Колебательная часть теплоемкости зависит от температуры и неодинакова у молекул различных веществ.

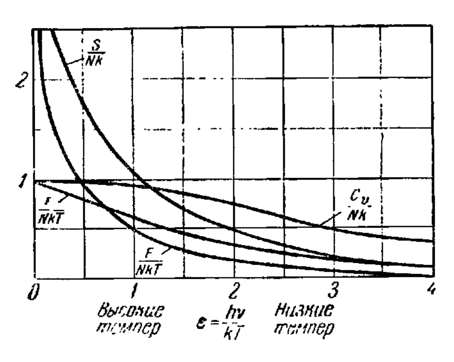


Рис. 57.

Перейдем теперь к вычислению других термодинамических величин. Свободная энергия, обусловленная колебательным движением, имеет вид

$$F_{\text{колеб}} = -NkT\ln z_{\text{колеб}} = \frac{Nh\nu}{2} + NkT\ln\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) =$$

$$= \frac{NkT_c}{2} + NkT\ln\left(1 - e^{-\frac{T_c}{T}}\right). \quad (43,9)$$

Соответственно, энтропия

$$S_{\text{колеб}} = -\frac{\partial F_{\text{колеб}}}{\partial T} = -Nk\ln\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) + \frac{Nh\nu}{T}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} =$$

$$= Nk\left(\frac{T_c}{T}\right)\frac{1}{\exp\left[\frac{T_c}{T}\right] - 1} - Nk\ln\left[1 - \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)\right]. \quad (43,10)$$

При высоких температурах можно произвести разложение по степеням отношения T_c/T и ограничиться первыми членами разложения. Это дает

$$F_{\text{колеб}} \approx E_0 + NkT\ln\frac{T_c}{T},$$

$$S \approx Nk - Nk\ln\frac{T_c}{T}.$$

Наоборот, при низких температурах $e^{-\frac{T_c}{T}} \ll 1$, так что

$$F_{\text{колеб}} \approx E_0,$$

$$S_{\text{колеб}} \approx 0.$$

Для практического вычисления функции состояний колебательного движения и термодинамических величин требуется знание одной характерной молекулярной постоянной — собственной частоты колебаний молекулы ν. Ее значение для большинства двухатомных молекул известно из спектроскопических данных, в частности инфракрасных колебательных спектров.

Значения функций, входящих в формулы (43,3), (43,4), (43,9) и (43,10), табулированы и находятся прямо по таблицам. Зависимость их от отношения $h\nu/kT$ показана на рис. 57.

§ 44. Вращательная функция состояний и вклад вращения в термодинамические функции

Рассмотрим теперь функцию состояний для вращательного движения двухатомной молекулы.

Энергия ротатора принимает дискретный ряд значений

$$\varepsilon_{\text{вращ}} = \frac{h^2}{8\pi^2 I} j(j+1), \tag{44,1}$$

где $j=0, 1, 2, 3, \ldots$

Каждое состояние с определенной энергией вращения, т. е. с определенным значением вращательного квантового числа, оказывается $(2j+1)$-кратновырожденным. Поэтому функция состояний вращательного движения имеет вид

$$z_{\text{вращ}} = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-\frac{h^2 j(j+1)}{8\pi^2 IkT}}. \tag{44,2}$$

Функция состояний $z_{\text{вращ}}$ зависит от отношения $\frac{h^2}{8\pi^2 IkT} = \frac{T_c}{T}$, где $T_c = \frac{h^2}{8\pi^2 kI}$ — характеристическая температура для вращения. Таким образом,

$$z_{\text{вращ}} = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-\frac{T_c j(j+1)}{T}}. \tag{44,3}$$

В табл. 6 приведены значения характеристических температур для вращения различных двухатомных молекул.

Из табл. 6 видно что, в отличие от характеристических температур для колебательного движения, характеристические температуры для вращательного движения чрезвычайно малы и лежат значительно ниже точки конденсации газа при нормальном давлении. Исключение составляют молекулы H_2 и D_2, у которых характеристические температуры сравнительно велики и лежат выше температуры конденсации. Высокие характеристические температуры H_2 и D_2 обусловлены малостью их

Таблица 6

Молекула	Характеристическая температура, °K	Молекула	Характеристическая температура, °K
H_2	85,4	O_2	2,07
D_2	43	HCl . . .	15,1
N_2	2,85	HJ	9,0

моментов инерции $\left(I_{H_2}=\frac{m_H a^2}{2}\right.$ и $\left.I_{D_2}=\frac{m_D a^2}{2}\right.$, где m_H и m_D — массы протона и дейтрона и a — расстояние между ними в молекулах). Поэтому для всех молекул, кроме H_2 и D_2, можно считать, что расстояния между двумя последовательными уровнями энергии вращения малы по сравнению с тепловой энергией. Иначе говоря, по отношению к вращению тяжелых молекул температура всегда является высокой.

При высоких температурах суммирование по отдельным уровням энергии в (44,3) можно заменить интегрированием по почти слившимся уровням:

$$z_{\text{вращ}}=\sum(2j+1)e^{-\frac{T_c j(j+1)}{T}}\approx\int_0^\infty(2j+1)e^{-\frac{T_c j(j+1)}{T}}dj. \quad (44,4)$$

Вводя новую переменную интегрирования $y=j(j+1)$, находим

$$z_{\text{вращ}}=\int_0^\infty e^{-\frac{T_c y}{T}}dy=\frac{T}{T_c}=\frac{8\pi^2 IkT}{h^2}. \quad (44,5)$$

Мы приходим, таким образом, к классическому выражению для $z_{\text{вращ}}$.

В следующем приближении функцию состояний можно вычислить при помощи известной формулы суммирования Эйлера[1]):

$$\sum_{j=0}^\infty f(j)\approx\int_0^\infty f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(0)-\frac{1}{12}f'(0)+\frac{1}{720}f'''(0).$$

В данном случае $f(j)=(2j+1)e^{-\frac{T_c j(j+1)}{T}}$, так что

$$f(0)=1;\ f'(0)=2-\frac{T_c}{T};\ f'''(0)\approx-12\frac{T_c}{T}$$

[1]) См., например, А. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, 1952, стр. 343.

и для $z_{\text{вращ}}$ получаем

$$z_{\text{вращ}} \approx \frac{8\pi^2 IkT}{h^2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{h^2}{15 \cdot 8\pi^2 IkT}\right). \qquad (44,6)$$

Второй и третий члены представляют квантовую поправку к классическому значению $z_{\text{вращ}}$. Из формулы (44,6) видно, что эта поправка мала при температуре T, большей T_c, и быстро убывает с ростом T.

Учитывая приведенные значения характеристических температур, можно сказать, что вся область реальных температур лежит гораздо выше T_c. Поэтому квантовые поправки к $z_{\text{вращ}}$ у всех молекул, кроме самых легких, играют весьма незначительную роль.

При низких температурах ($T \ll T_c$) в общем выражении для $z_{\text{вращ}}$ нужно оставить лишь первые, самые большие члены. Это дает

$$z_{\text{вращ}} \approx 1 + 3e^{-2\frac{T_c}{T}}. \qquad (44,7)$$

Найдем теперь слагаемые в термодинамических функциях, связанные с вращательным движением. Очевидно, имеем

$$E_{\text{вращ}} = NkT^2 \frac{\partial \ln z_{\text{вращ}}}{\partial T} = NkT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-\frac{T_c j(j+1)}{T}}. \qquad (44,8)$$

При высоких температурах имеем

$$E_{\text{вращ}} \approx NkT\left(1 - \frac{h^2}{24\pi^2 IkT}\right). \qquad (44,9)$$

Соответственно вращательная теплоемкость при высокой температуре имеет классическое значение:

$$C_{V_{\text{вращ}}} \approx Nk. \qquad (44,10)$$

При низкой температуре

$$E_{\text{вращ}} = NkT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln\left(1 + 3e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 IkT}}\right) \approx \frac{3h^2 N}{4\pi^2 I} e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 IkT}} \qquad (44,11)$$

и теплоемкость

$$C_{V_{\text{вращ}}} \approx 3\left(\frac{h^2}{4\pi^2 I}\right)^2 \frac{N}{kT^2} e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 IkT}}. \qquad (44,12)$$

Таким образом, при очень низких температурах вращательная энергия и теплоемкость оказываются экспоненциально убывающими с температурой. Как мы подчеркивали ранее, фактически наблюдать уменьшение по экспоненциальному закону величины

теплоемкости с температурой можно только у самых легких молекул.

Напишем еще выражения для свободной энергии и энтропии. При высоких температурах будет

$$F_{вращ} = -NkT \ln z_{вращ} = -NkT \ln \left[\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) e^{-\frac{T_c j(j+1)}{T}} \right] \approx$$

$$\approx NkT \left(\ln \frac{T_c}{T} - \frac{T_c}{3T} \right) \qquad (44,13)$$

и

$$S_{вращ} \approx -Nk \ln \frac{T_c}{T} + Nk. \qquad (44,14)$$

При низких температурах, с учетом (44,7), получаем

$$F_{вращ} \approx -3NkTe^{-\frac{2T_c}{T}} \qquad (44,15)$$

и

$$S_{вращ} \approx 3Nke^{-\frac{2T_c}{T}} + \frac{6NkT_c}{T} e^{-\frac{2T_c}{T}}. \qquad (44,16)$$

Таким образом, вращательная энергия и энтропия при очень низких температурах экспоненциально убывают. Общий ход теплоемкости, связанной с вращением, имеет тот же характер, что и ход теплоемкости, связанной с колебаниями молекул: при высоких температурах теплоемкость стремится к классическому значению, при низких в согласии с требованиями третьего начала термодинамики теплоемкость стремится к нулю. Однако понятия высокой и низкой температур для вращения и колебаний оказываются существенно различными — для колебаний комнатная температура, как правило, должна считаться низкой, для вращения — высокой.

Как видно из формул (44,8), (44,12) и последующих, для фактического вычисления функции состояний и термодинамических величин нужно знать только одну молекулярную постоянную — момент инерции молекулы I. Значение этой функции для большинства двухатомных молекул известно из спектроскопических данных, в частности из вращательных инфракрасных спектров. Если же известен вращательно-колебательный спектр молекулы, т. е. ее уровни энергии вращательного и колебательного движений, то вычисление функций состояний можно производить с помощью непосредственного суммирования [1]).

В заключение отметим, что в случае водорода и дейтерия необходимо учитывать влияние спина ядра на вращательное

---

[1]) Подробнее см. И. Н. Годнев, Вычисление термодинамических функций по молекулярным данным, Гостехиздат, 1956.

движение. Оказывается, что ядерный спин существенно влияет на характер вращательных состояний молекул, состоящих из одинаковых атомов. В частности, в зависимости от значения ядерного спина молекулы водорода могут находиться в двух типах вращательных состояний.

В состояниях первого типа, отвечающих суммарному значению спина обоих ядер, равному нулю, вращательное квантовое число j пробегает ряд четных значений $j=0, 2, 4, 6, \ldots$ В состояниях второго типа, отвечающих суммарному спину обоих ядер, равному единице, квантовое число пробегает ряд нечетных значений $j=1, 3, 5, \ldots$

Молекулы первого типа носят название *параводорода*, а второго — *ортоводорода*. Между орто- и параводородом в обычных условиях не существует переходов, так что газ как целое нужно считать смесью двух различных модификаций.

Это обстоятельство существенно отражается на виде вычисленных термодинамических функций [1]).

§ 45. Многоатомные молекулы

Рассмотрение многоатомных молекул в принципе мало отличается от рассмотрения двухатомных молекул. Функция состояний многоатомной молекулы, так же как и функция состояний двухатомной молекулы, может быть написана в виде

$$z=z_{\text{поступ}}z_{\text{колеб}}z_{\text{вращ}}, \qquad (45,1)$$

если только пренебречь влиянием колебаний на вращение молекулы (в связи с изменением размера последней). Функция состояний поступательного движения ничем не отличается от вычисленной ранее. Однако вычисление функции состояний внутреннего движения у многоатомных молекул несравненно сложнее, чем у двухатомных молекул.

При рассмотрении вращательного движения молекулы нужно различать три случая: линейной молекулы, симметричного и асимметричного волчка. Вращательное движение линейной многоатомной молекулы ничем не отличается от вращения двухатомной молекулы. У симметричного волчка два главных момента инерции равны между собой ($I_1=I_2\neq I_3$), тогда как у асимметричного волчка все моменты инерции различны ($I_1\neq I_2\neq I_3$) В первом случае квантовомеханическое рассмотрение позволяет вычислить уровни энергии вращения молекулы, которые выражаются формулой, сходной с формулой для уровней энергии простого волчка. Однако явного выражения для

[1]) См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, Гостехиздат, 1951, стр 163.

уровней энергии асимметричного волчка не существует. В случае молекул типа асимметричных волчков обычно пользуются некоторыми приближенными выражениями для энергетических уровней, точность которых не очень велика. Однако положение существенно облегчается тем, что характеристические температуры для вращения многоатомных молекул обычно еще меньше, чем у двухатомных молекул. Поэтому обычные температуры, при которых можно работать с несконденсированными многоатомными газами, являются высокими, и для функции состояний вращательного движения можно без сколько-нибудь заметной погрешности пользоваться классическим выражением для $z_{вращ}$. Так, например, отличие между квантовым и классическим выражением для вращательной функции состояний у молекулы HCN при температуре 100° К составляет около 0,5%, у молекул CH_3Cl — около 1%; при температуре 300° К это отличие становится совсем ничтожным и лежит за пределами точности измерений. В большинстве расчетов функции состояний многоатомных молекул пользуются классическим приближением.

Характерной особенностью большого числа многоатомных молекул, в частности молекул органических соединений, является наличие у них большего или меньшего числа одинаковых атомов. С наличием одинаковых атомов в молекуле тесно связана ее симметрия. Благодаря наличию симметрии молекула совмещается сама с собой при определенных поворотах, точно так же как двухатомная молекула, содержащая два одинаковых атома, при повороте на 180°. Наличие симметрии у молекулы требует введения во вращательную функцию состояний множителя симметрии γ. Множитель симметрии $\gamma=2$ следует вводить и для двухатомных молекул с одинаковыми ядрами. Он представляет число физически неразличимых положений молекулы при ее поворотах, как твердого тела. Для получения правильного выражения для вращательной функции состояний, в которой каждое физическое состояние учитывалось бы только один раз, функцию состояний, полученную при интегрировании по всем значениям угла поворота (в классическом приближении), нужно разделить на множитель симметрии γ. С введением множителя симметрии вращательную функцию состояний многоатомной молекулы с тремя различными моментами инерции в *классическом* приближении можно записать в следующем виде:

$$z_{вращ}=\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma h^3}\sqrt{8\pi^2(kT)^3 I_1 I_2 I_3}, \qquad (45,2)$$

где моменты инерции выражены в *г·см*² и температура отсчитывается по абсолютной шкале. Если известна структура молекулы, то значения множителя γ находятся из простых соображений симметрии. В случае линейной молекулы CO_2 (см. рис. 48)

множитель симметрии $\gamma=2$, так как молекула совмещается сама с собой при повороте на угол π. Нелинейная молекула SO_2 (рис. 48) также совпадает сама с собой при повороте на угол π, и для нее $\gamma=2$. Молекула метана CH_4 представляет правильный тетраэдр с атомом углерода в центре. Она совмещается сама с собой при повороте на угол 120° вокруг вертикальной оси и при совмещении каждого из четырех углов тетраэдра, всего при 12 поворотах, так что $\gamma=12$. Молекула аммиака NH_3 представляет пирамиду с атомом азота в вершине. Она совмещается сама с собой при повороте на 120° вокруг вертикальной оси, так что $\gamma=3$.

Колебательное движение многоатомных молекул несравненно сложнее, чем колебательное движение двухатомных молекул. Число колебательных степеней свободы составляет $3n-6$ у нелинейных многоатомных молекул и $3n-5$ у линейных и может быть довольно велико у сложных молекул. Например, у молекул SO_2 имеются три колебательные степени свободы, у молекулы NH_3 их уже шесть, у молекулы C_6H_6 число колебательных степеней свободы равно 30. Изучение колебаний подобных систем представляет сложную задачу. Тем не менее, колебательное движение очень большого числа молекул исследовано. Если считать отклонения атомов от положений равновесия малыми (что не всегда возможно в случае многоатомных молекул; см. ниже), то движение системы будет представлять собою малые колебания и колебательное движение молекулы можно разложить на совокупность независимых нормальных колебаний[1]). Каждой степени свободы отвечает одно нормальное колебание со своей собственной частотой. Частоты нормальных колебаний (собственные частоты системы) связаны с массами ядер и постоянными квазиупругих сил обычными соотношениями. В общем случае частоты всех нормальных колебаний являются различными. Однако нередко частоты некоторых нормальных колебаний совпадают. В этом случае колебания являются вырожденными.

---

[1]) В произвольных координатах потенциальная энергия системы колеблющихся точек имеет вид

$$U=\frac{1}{2}\sum a_{ik}\xi_i\xi_k,$$

где ξ — смещения. Для нахождения нормальных колебаний необходимо найти такие координаты ξ_i, в которых потенциальная энергия системы имеет вид ортогональной квадратичной формы $U=\frac{1}{2}\sum a_i\zeta_i^2$. Выбор новых переменных может быть сделан чисто алгебраическим путем, но очень существенно упрощается при использовании свойств симметрии системы (см., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, 1960).

Значения собственных частот могут быть найдены из анализа инфракрасных спектров, а также спектров рассеяния молекул, хотя это является далеко не простой задачей. Спектры ряда более простых молекул изучены достаточно подробно, и их собственные частоты определены с большой степенью точности. На рис. 48 изображены нормальные колебания некоторых типичных молекул (H_2O, SO_2 и CO_2). Каждое нормальное колебание с собственной частотой ν_l вносит свою долю в функцию состояний $z_{\text{колеб}}$, которая в силу независимости нормальных колебаний может быть представлена в виде произведения соответствующих множителей:

$$z_{\text{колеб}} = \prod_{l=1}^{3n-6} \frac{e^{-\frac{h\nu_l}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu_l}{kT}}} = \prod_{l=1}^{3n-6} \frac{e^{-\frac{T_c^{(l)}}{2T}}}{1 - e^{-\frac{T_c^{(l)}}{T}}}, \qquad (45,3)$$

где $T_c^{(l)}$ — характеристическая температура l-го нормального колебания. Значения $T_c^{(l)}$ для различных нормальных колебаний могут заметно отличаться друг от друга. Так например, у молекулы аммиака шесть нормальных колебаний имеют следующие характеристические температуры $T_c^{(l)}$ (в 10^2° К): 13,6; 23,3; 23,3; 47,8; 48,8; 48,8. Мы видим, что характеристические температуры могут отличаться друг от друга в три раза. Различие характеристических частот связано с различием в величине постоянных квазиупругих сил (различие жесткости связей атомов в молекулах). Характеристические температуры многоатомных молекул, как и характеристические температуры двухатомных молекул, составляют несколько сотен или тысяч градусов. Поэтому вклад колебаний в теплоемкость при умеренных температурах сравнительно невелик. Во всяком случае, колебательная часть теплоемкости во много раз меньше, чем это следовало бы из закона равномерного распределения.

В качестве примера можно привести ту же молекулу аммиака. Полная теплоемкость молекулы NH_3 составляет

$$C_V = C_{V_{\text{поступ}}} + C_{V_{\text{вращ}}} + C_{V_{\text{колеб}}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + C_{V_{\text{колеб}}} \text{ (в единицах } Nk).$$

В табл. 7 приведены вычисленные по (45,3) и наблюденные на опыте значения (в *кал/моль·град*) колебательной теплоемкости $C_{V_{\text{колеб}}}$.

При $T > 240$° К вращательную теплоемкость можно считать имеющей классическое значение $^3/_2$. Таким образом, при температуре около 800° К колебательная теплоемкость составляет около $^2/_3$ от полной теплоемкости молекулы и ею никоим образом нельзя пренебрегать. Даже при комнатной температуре

Таблица 7

$T°$ К	$c_{V_{\text{колеб}}}$ (вычисл.)	$c_{V_{\text{колеб}}}$ (наблюд.)	$T°$ К	$c_{V_{\text{колеб}}}$ (вычисл.)	$c_{V_{\text{колеб}}}$ (наблюд.)
243	0,12	0,14	423	0,70	0,75
272	0,19	0,22	582	1,31	1,2
303	0,29	0,31	655	1,72	1,5
334	0,37	0,45	796	2,06	1,9
383	0,56	0,60			

$c_{V_{\text{колеб}}}$ составляет около 7% от полной теплоемкости. Тем не менее, она значительно меньше, чем это следует из закона равномерного распределения ($6Nk$). Подобная ситуация является характерной для большинства многоатомных молекул.

Вклад различных видов движения в значение энтропии молекулы аммиака показан на рис. 58.

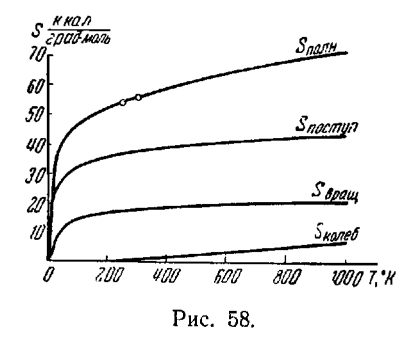


Рис. 58.

Колебательное движение многоатомных молекул имеет одну замечательную особенность, которая не имеет аналога у двухатомных молекул. Именно, очень часто амплитуда нулевых колебаний определенных групп, входящих в молекулу, оказывается настолько большой, что соответствующее движение перестает быть гармоническим или совсем теряет колебательный характер. Яснее всего это видно на конкретных примерах. В большое число многоатомных молекул, особенно органических, входят отдельные группы или радикалы, имеющие характер самостоятельных групп, например, молекул этилена C_2H_4 представляет образование из двух групп CH_2. Аналогично молекула этана C_2H_6 состоит из двух групп CH_3. Молекула диметилацетилена $CH_3—C{\equiv}C—CH_3$ содержит две группы CH_3 и углеродный остов. Благодаря существованию взаимодействия между водородными атомами потенциальная энергия групп CH_2 или CH_3 имеет минимумы при вполне определенной ориентации одной группы относительно другой. Именно, минимуму потенциальной энергии отвечает значение угла поворота (отсчитываемого от средней линии) одной группы CH_3 относительно другой, равное 60° или 180°. Иначе говоря, потенциальная энергия имеет минимум, когда обе группы расположены зеркально относительно друг друга (рис. 59). При смещении из положения равновесия (повороте одной из групп относительно другой) потенциальная энергия возрастает и возникает сила, стремящаяся вернуть молекулу

к равновесному расположению. При этом возникают вращательные колебания вокруг оси молекулы. Если, однако, нулевая энергия этих колебаний оказывается настолько большой, что она превышает потенциальный барьер, препятствующий повороту группы, вращательные колебания превращаются в свободное вращение группы относительно оси молекул. Последний случай встречается сравнительно редко. Примером его может служить упомянутая выше молекула диметилацетилена. В ней

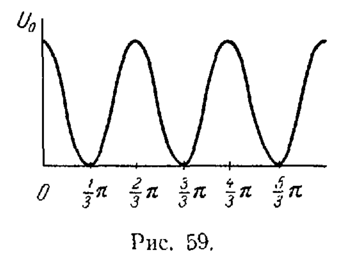


Рис. 59.

обе группы CH_3 отстоят друг от друга на сравнительно большом расстоянии и их взаимодействие не очень велико. Поэтому высота барьера, препятствующего вращению, оказывается относительно небольшой и группы CH_3 находятся в свободном вращении. Однако в большинстве случаев вращение отдельных групп является заторможенным. При низких температурах происходят вращательные колебания большой амплитуды, которые превращаются во вращение при очень высоких температурах, когда тепловая энергия kT оказывается большей, чем высота барьера U_0. Существование свободного вращения изменяет величину теплоемкости и других термодинамических величин по сравнению с молекулами без вращений: часть колебательных степеней свободы заменяется вращательными. Если считать вращение свободным, то расчет теплоемкости и других термодинамических величин не представляет труда, поскольку вращение сравнительно тяжелой группы можно считать классическим. Если же вращение является заторможенным, то для расчета необходимо знать высоту барьера, препятствующего торможению. Нахождение этой высоты из спектроскопических данных весьма затруднительно. Поэтому поступают в обратном порядке: вычисляют термодинамические величины, чаще всего энтропию, задаваясь различными значениями высоты барьера, и сравнивают ее вычисленные и измеренные значения. Совмещение теоретической и экспериментальной кривой зависимости энтропии от температуры позволяет найти высоту барьера. У различных молекул высота барьера варьирует в довольно широких пределах. Так, для вращения групп CH_3 в молекуле этана $H_3C—CH_3$ высота барьера составляет около 1570° K, так что вращение при температуре $T > 1570°$ K просиходит свободно. У молекулы этилена C_2H_4 барьер, препятствующий вращению групп CH_2, имеет высоту около 6000° K, так что вращение при комнатной температуре сильно заторможено и фактически происходят вращательные колебания сравнительно небольшой амплитуды.

ГЛАВА VI

СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

§ 46. Взаимодействие между молекулами в неидеальных газах

До сих пор мы ограничивались изучением свойств настолько разреженных газов, чтобы взаимодействием между молекулами можно было пренебречь. Теперь мы перейдем к рассмотрению статистического поведения систем взаимодействующих частиц.

В § 6 мы уже коснулись вопроса о характере межмолекулярного взаимодействия. На больших расстояниях между молекулами это взаимодействие сводится к слабым силам притяжения, которые быстро убывают с расстоянием между центрами молекул. На малых расстояниях, когда молекулы вплотную подходят друг к другу, так что происходит взаимное проникновение их электронных оболочек, возникает весьма сильное отталкивание. Благодаря этому отталкиванию невозможно заметное проникновение молекул друг в друга и их деформация при столкновениях. В дальнейшем мы ограничимся одноатомным газом и будем считать, что взаимодействие зависит только от расстояния между атомами.

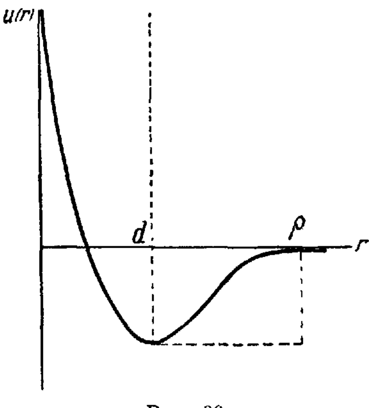


Рис. 60.

Ход потенциальной энергии взаимодействия двух молекул изображен на рис. 60. Мы будем предполагать, что силы притяжения являются настолько слабыми, что наибольшее значение потенциальной энергии притяжения — при сближении молекул вплотную (расстояние между центрами равно диаметру d). Но $|u(d)|$ все же мало по сравнению с тепловой энергией kT,

$$|u(d)| \ll kT. \tag{46,1}$$

Потенциальная энергия настолько быстро убывает с расстоянием, что она практически обращается в нуль уже при расстояниях между центрами молекул, составляющих несколько диаметров. Введем формально некоторое расстояние ρ, дальше которого взаимодействием можно полностью пренебречь. Это расстояние мы будем называть радиусом взаимодействия. Это означает, что истинную кривую потенциальной энергии мы заменяем упрощенной кривой, изображенной на рис. 60 пунктиром и выражаемой формулой

$$u = \begin{cases} 0, & r \geqslant \rho, \\ -u(r), & \rho > r > d, \\ \infty, & d \geqslant r. \end{cases} \tag{46,2}$$

Здесь через r обозначено расстояние между центрами i-й и k-й молекул Это означает, что взаимодействие отсутствует, когда расстояние между центрами молекул превышает ρ, представляет притяжение (знак минус при $u(r)$), когда расстояние между центрами меньше ρ, но больше d, так что молекулы непосредственно не соприкасаются, и превращается в очень сильное (бесконечно сильное в нашем приближении) отталкивание, когда молекулы приходят в непосредственный контакт. Величина ρ обычно равна трем-четырем диаметрам молекул.

Если газ не является очень плотным, то среднее расстояние между молекулами весьма велико по сравнению с их размерами. Поэтому можно считать, что, как правило, на расстояние взаимодействия одновременно сближается не более двух молекул сразу. Иначе говоря, можно считать, что молекулы взаимодействуют только парами. Такие конфигурации, когда в сфере взаимодействия одновременно находится «рой» из трех, четырех и так далее частиц, встречаются редко, и мы будем ими пренебрегать.

Вычислим функцию состояний газа при этом условии. Энергия всего газа ε может быть написана в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{кин}} + U. \tag{46,3}$$

Первый член в (46,3) выражает сумму кинетических энергий молекул. Он совпадает с энергией идеального газа. Второй член представляет потенциальную энергию взаимодействия молекул, зависящую только от их взаимных расстояний. Воспользовавшись этим выражением для ε, можно написать функцию состояний газа в виде

$$Z = \frac{1}{N!\,h^{3N}} \left(\int e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp_x\, dp_y\, dp_z \right)^N \left(\int e^{-\frac{U}{kT}} dV_1 \ldots dV_N \right), \tag{46,4}$$

где $dV_1 \ldots dV_N$ — произведение дифференциалов пространственных координат $dx\,dy\,dz$ для каждой молекулы. Первый множитель не отличается от соответствующей величины для идеального газа. В силу результатов § 37 его можно написать в виде

$$\int e^{-\frac{p^2}{2mkT}}\,dp_x\,dp_y\,dp_z = (2\pi mkT)^{3/2},$$

так что

$$Z = \frac{1}{N!\,h^{3N}}(2\pi mkT)^{\frac{3N}{2}}\left(\int e^{-\frac{U}{kT}}\,dV_1 \ldots dV_N\right). \qquad (46,5)$$

Здесь же нам нужно вычислить второй множитель, именуемый конфигурационным интегралом:

$$J = \int e^{-\frac{U}{kT}}\,dV_1\,dV_2 \ldots dV_N. \qquad (46,6)$$

Для его вычисления воспользуемся тем, что молекулы взаимодействуют между собой только попарно Поэтому энергию взаимодействия можно представить в виде суммы энергий взаимодействия пар молекул

$$U = \sum u(r_{ik}), \qquad (46,7)$$

где под парой мы подразумеваем две молекулы, сблизившиеся на расстояние, меньшее расстояния взаимодействия ρ. Энергия взаимодействия каждой пары обозначена через u; она определена формулой (46,2). Число слагаемых в сумме (46,7) равно числу пар, образующихся в газе из N молекул. Оно равно числу сочетаний из N элементов по два, т. е. $\frac{N(N-1)}{2}$ При большом N можно считать это число равным $\frac{N^2}{2}$. Тогда

$$e^{-\frac{U}{kT}} = e^{-\frac{\Sigma u(r_{ik})}{kT}} = \prod e^{-\frac{u(r_{ik})}{kT}},$$

где произведение берется по всем парам, т. е.

$$e^{-\frac{U}{kT}} = e^{-\frac{u(r_{12})}{kT}} \cdot e^{-\frac{u(r_{13})}{kT}} \ldots \qquad (46,8)$$

Это произведение содержит $\frac{N^2}{2}$ сомножителей Каждый член в этом произведении при $r_{ik} > \rho$ стремится к единице, поскольку $u(r_{ik}) \to 0$. Удобнее ввести функцию f_{ik}, определенную равенством

$$f_{ik} = e^{-\frac{u(r_{ik})}{kT}} - 1, \qquad (46,9)$$

которая стремится к нулю при $r_{ik} > \rho$ и отлична от нуля только при $r_{ik} < \rho$. Тогда, очевидно, $e^{-\frac{u(r_{ik})}{kT}} = 1 + f_{ik}$ и

$$e^{-\frac{U}{kT}} = \prod (1 + f_{ik}) = (1 + f_{12})(1 + f_{13})(1 + f_{14}) \ldots =$$
$$= 1 + (f_{12} + f_{13} + f_{14} + \ldots) + (f_{12}f_{13} + f_{12}f_{14} + \ldots) + \ldots \quad (46,10)$$

Действительно, попарные, тройные и так далее произведения функций f_{ik} по определению этой функции и в силу предположения об отсутствии роев всегда весьма малы. Так, например, для того, чтобы $f_{12} \cdot f_{13}$ было существенно отлично от нуля, нужно, чтобы одновременно были отличны от нуля f_{12} и f_{13}, т. е. одновременно малы (меньше ρ) расстояния r_{12} и r_{13}. Это значит, что первая, вторая и третья молекулы одновременно попали в область взаимодействия ρ, образовав не пару, а тройку молекул. Точно так же $f_{12} \cdot f_{13} \cdot f_{14}$ отлично от нуля, только если одновременно не равны нулю f_{12}, f_{13} и f_{14}. Последнее имеет место только тогда, когда первая, вторая, третья и четвертая молекулы одновременно оказались в области порядка ρ. Поэтому с достаточной степенью точности можно написать

$$e^{-\frac{U}{kT}} \approx 1 + (f_{12} + f_{13} + \ldots) = 1 + \sum f_{ik}. \quad (46,11)$$

Число слагаемых в $\sum f_{ik}$ равно числу пар, т. е. $\frac{N^2}{2}$. Поскольку все молекулы одинаковы, можно считать, что все f_{ik} также одинаковы, так что

$$e^{-\frac{U}{kT}} \approx 1 + \frac{N^2}{2} f(r_{ik}). \quad (46,12)$$

Подставляя выражение $e^{-\frac{U}{kT}}$ из (46,12) в (46,6), имеем

$$J = \int e^{-\frac{U}{kT}} dV_1 \ldots dV_N = \int \left(1 + \frac{N^2}{2} f_{ik}\right) dV_1 \ldots dN_N =$$
$$= \int dV_1 \ldots dV_N + \frac{N^2}{2} \int f_{ik}\, dV_1 \ldots dV_N. \quad (46,13)$$

Первый интеграл в (46,13) равен, очевидно, V^N. Во втором интегрирование по всем элементам объема, кроме i-го и k-го, дает

$$\int dV_1 \ldots dV_{i-1} dV_{i+1} \ldots dV_{k-1} dV_{k+1} \ldots dV_N \int f_{ik} dV_i dV_k =$$
$$= V^{N-2} \int f_{ik} dV_i dV_k.$$

Таким образом,

$$J = V^N + \frac{N^2}{2} V^{N-2} \int f_{ik}\, dV_i\, dV_k.$$

Для выполнения последнего интегрирования введем сферические координаты с центром, помещенным в одной из молекул. Тогда $r_{ik} = r$ и

$$\int f_{ik}\, dV_i\, dV_k = \int \left(e^{-\frac{u(r_{ik})}{kT}} - 1\right) dV_i\, dV_k = \int dV \int \left(e^{\frac{u(r)}{kT}} - 1\right) 4\pi r^2\, dr,$$

где 4π — результат интегрирования по углам. Поэтому, обозначив

$$4\pi \int \left(e^{-\frac{u(r)}{kT}} - 1\right) r^2\, dr = \beta, \qquad (46,14)$$

получаем

$$\int f_{ik}\, dV_i\, dV_k = V\beta.$$

Для J окончательное выражение будет следующим:

$$J = V^N \left(1 + \frac{N^2}{2V}\beta\right). \qquad (46,15)$$

Подставляя выражение (46,15) для J в (46,5), имеем

$$Z = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3N}{2}} V^N}{N!\, h^{3N}} \left(1 + \frac{N^2}{2V}\beta\right) = Z_{\text{ид}} \left(1 + \frac{N^2\beta}{2V}\right), \qquad (46,16)$$

где через $Z_{\text{ид}}$ обозначена функция состояний идеального одноатомного газа. Заметим, что величина $\frac{N^2}{2V}\beta = \frac{N}{V} \cdot \frac{N\beta}{2}$ мала при малой плотности газа $\frac{N}{V}$.

§ 47. Уравнение состояния неидеального газа

С помощью функции состояний (46,16) можно вычислить термодинамические функции газа, слабо отклоняющегося от идеального. Мы ограничимся вычислением давления, поскольку уравнение состояния газа представляет первоочередный интерес.

Отклонение газа от идеального учитывается с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса, которое для малых плотностей газа может быть записано в виде

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{N^2 a}{V^2} \approx \frac{NkT}{V} + \frac{N^2 kTb}{V^2} - \frac{N^2 a}{V^2}. \qquad (47,1)$$

Поскольку в ходе расчетов предыдущего параграфа мы не учитывали «роев», полученные результаты относятся к малым плотностям газа. Простой расчет давления, основанный на функции состояния (46,16), приводит к выражению, в точности совпадающему с (47,1). Действительно, по (32,5) давление p равно

$$p = kT\frac{\partial \ln Z}{\partial V} = kT\frac{\partial \ln Z_{\text{ид}}}{\partial V} + kT\frac{\partial}{\partial V}\ln\left(1+\frac{N^2\beta}{2V}\right) \approx$$

$$\approx p_{\text{ид}} + kT\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{N^2\beta}{2V}\right) = \frac{NkT}{V} - \frac{N^2kT\beta}{2V^2}. \quad (47,2)$$

Здесь, считая плотность малой, мы разложили логарифм в ряд по степеням величины $\frac{N^2\beta}{2V}$, которая весьма мала́ по сравнению с единицей, и ограничились первым членом разложения.

Сравнивая формулу (47,2) с (47,1), убеждаемся в полной тождественности обоих выражений, если только положить

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a}{kT} - b. \quad (47,3)$$

Таким образом, формула (47,2) представляет уравнение Ван-дер-Ваальса, теоретически выведенное для небольших плотностей газа. Предыдущий расчет относился к случаю одноатомных газов. Можно, однако, показать, что и в случае сложных многоатомных газов качественная сторона вывода не изменится, хотя явный вид величины β будет более сложным.

Для выяснения смысла постоянных a и b, фигурирующих в уравнении Ван-дер-Ваальса, рассмотрим подробнее величину β.

По определению

$$\beta = 4\pi\int_0^\infty f(r)\,r^2\,dr. \quad (47,4)$$

Подставляя в (47,4) выражение для $f(r)$, имеем

$$\beta = 4\pi\int_0^\infty \left(e^{-\frac{u(r)}{kT}} - 1\right) r^2\,dr. \quad (47,5)$$

Разобьем интеграл (47,5) на две части — интеграл в промежутке $0 \leqslant r \leqslant d$ и в промежутке $d \leqslant r \leqslant \infty$, т. е.

$$\beta = 4\pi\int_0^d \left(e^{-\frac{u(r)}{kT}} - 1\right) r^2\,dr + 4\pi\int_d^\infty \left(e^{-\frac{u(r)}{kT}} - 1\right) r^2\,dr.$$

В первой области в силу (46,2) $e^{-\frac{u(r)}{kT}} \approx 0$, и в первом интеграле экспоненциальный член можно опустить. Во втором интеграле потенциальная энергия взаимодействия молекул в силу (46,1) мала по сравнению с тепловой энергией kT, так что можно приближенно написать

$$e^{-\frac{u(r)}{kT}} \approx 1 - \frac{u(r)}{kT} = 1 + \frac{|u(r)|}{kT}.$$

Тогда имеем

$$\beta = -4\pi \int_0^d r^2\, dr + \frac{4\pi}{kT} \int_d^\infty |u(r)|\, r^2\, dr = -\frac{4\pi}{3} d^3 + \frac{4\pi}{kT} \int_d^\infty |u(r)|\, r^2\, dr.$$

Подставляя β в (47,3), получим

$$-\frac{2\pi d^3}{3} + \frac{2\pi}{kT} \int_d^\infty |u(r)|\, r^2\, dr = \frac{a}{kT} - b. \qquad (47,6)$$

Сравнивая в (47,6) коэффициенты при $\frac{1}{T}$ и постоянные члены, находим

$$b = \frac{2\pi d^3}{3} = 4v_0, \qquad (47,7)$$

где v_0 — объем, занимаемый молекулой. Таким образом, постоянная b в уравнении Ван-дер-Ваальса оказывается равной учетверенному объему молекулы. Далее,

$$a = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \int_d^\infty |u(r)|\, r^2\, dr.$$

Постоянная a выражается через интеграл от потенциальной энергии взаимодействия двух молекул. Поскольку функция $u(r)$ быстро убывает с расстоянием между молекулами, этот интеграл быстро сходится.

Таким образом,

$$\beta = \frac{2a}{kT} - 8v_0. \qquad (47,8)$$

В зависимости от температуры β может быть как положительной, так и отрицательной. При достаточно низкой температуре $\beta > 0$, при высокой температуре $\beta < 0$.

Если подставить найденные нами выражения для постоянных a и b в уравнение Ван-дер-Ваальса, то получаем

$$p = \frac{NkT}{V} \left(1 + \frac{4v_0 N}{V} - \frac{2\pi N}{VkT} \int_d^\infty |u(r)|\, r^2\, dr \right). \qquad (47,9)$$

В первом приближении, когда плотность газа достаточно мала́, чтобы вероятностью одновременной встречи трех и более молекул в сфере взаимодействия можно было пренебречь, давление в неидеальном газе отличается от давления в идеальном газе двумя слагаемыми. Первое из них представляет отношение учетверенного объема всех молекул ко всему объему газа. Смысл этой (положительной) поправки к давлению состоит в том, что она учитывает объем реальных молекул.

Вторая поправка к давлению отрицательна и по абсолютной величине равна отношению

$$\frac{N^2}{2V}\left(\frac{4\pi}{V}\int_d^\infty |u(r)|\, r^2\, dr\right).$$

Это отношение также имеет простой физический смысл. Величина

$$\frac{1}{V}\cdot 4\pi\int_d^\infty |u(r)|\, r^2\, dr = \bar{u}$$

представляет собой среднее значение от потенциальной энергии взаимодействия пары молекул. Это среднее значение берется по всевозможным расстояниям молекул друг от друга, т. е. по всему объему, доступному для движения молекул. Тогда, очевидно, $\frac{N^2\bar{u}}{2V}$ является средним значением энергии взаимодействия всех пар молекул, существующих в единице объема газа.

Вторая поправка характеризует, таким образом, уменьшение давления молекул газа на стенки сосуда из-за их притяжения друг к другу. Иначе можно выразить этот факт словами: в газе существует внутреннее давление, обусловленное притяжением молекул.

Как известно, уравнение Ван-дер-Ваальса описывает не только свойства газов со сравнительно малой плотностью, но также и весьма плотных газов и даже жидкостей. Однако в этом случае оно уже не может быть выведено теоретически и представляет чисто эмпирическое уравнение, которое должно рассматриваться как более или менее удачная экстраполяция из области малых плотностей. Как именно должна совершаться эта экстраполяция, видно из уравнения (47,1), если его переписать в виде

$$p=\frac{NkT}{V}\left(1+\frac{Nb}{V}\right)-\frac{N^2a}{V^2}. \qquad (47,10)$$

Уравнение справедливо при

$$\frac{Nb}{V} \ll 1,$$

т.е. когда объем $4Nv_0$, занимаемый всеми молекулами, очень мал по сравнению с объемом газа.

Если, однако, плотность газа возрастает, что можно охарактеризовать уменьшение объема V при фиксированном N, то формула (47,10) теряет свою силу. Физически ясно, что при сжатии газа до предела при плотной упаковке молекул с минимальным зазором правильная формула для давления должна была бы указывать на бесконечное возрастание давления. Дальнейшее сжатие, связанное с деформацией атомов, было бы связано с такими огромными давлениями, которые были бы бесконечно велики по сравнению с обычными давлениями в газах или жидкостях. Из геометрических соображений ясно, что плотной упаковке шарообразных молекул соответствует объем системы, равный $4v_0N = Nb$. Следовательно, правильная формула для давления должна приводить к неограниченно возрастающим значениям p при $V \to Nb$. Между тем формула (47,10) не имеет подобного характера. Если, однако, рассматривать множитель $\left(1 + \frac{Nb}{V}\right)$ как результат разложения в ряд величины $\frac{1}{1 - \frac{Nb}{V}}$, то сразу получаем следующую формулу для давления:

$$p = \frac{NkT}{V\left(1 - \frac{Nb}{V}\right)} - \frac{N^2a}{V^2}, \qquad (47,11)$$

удовлетворяющую требуемым условиям:

1) p неограниченно возрастает при $V \to Nb$;

2) при $V \gg Nb$ формула (47,11) переходит в теоретическую формулу (47,1).

Формула (47,11) является полным уравнением Ван-дер-Ваальса, описывающим состояние газов в широком интервале плотностей. Из самогó характера вывода ясно, однако, что оно не может иметь того важного теоретического смысла, который имеет уравнение (47,1). При больших плотностях газа постоянные a и b не имеют уже точного смысла и могут лишь приближенно рассматриваться как характеристики объема молекул и их взаимодействия. Это видно, в частности, из того факта, что для получения количественного совпадения уравнения (47,11) с опытными данными приходится отказаться от постоянства величин a и b и считать их функциями температуры. Неудобство последнего побудило многих исследователей предложить другие эмпирические уравнения состояния. Тем не менее,

большим достоинством уравнения Ван-дер-Ваальса является то, что качественно оно очень правильно передает поведение газов и содержит указания на переход газа в жидкое состояние и критические явления.

§ 48. Метод коррелятивных функций и его применение к теории плотных газов и жидкостей

Мы видели, что прямое вычисление конфигурационного интеграла для системы взаимодействующих частиц оказывается достаточно сложной процедурой.

В последние годы в связи со стремлением создать статистическую теорию жидкостей усиленно развиваются различные методы подхода к рассмотрению статистических свойств систем взаимодействующих частиц. Одним из весьма эффективных оказался метод коррелятивных функций, развитый Н. Н. Боголюбовым и независимо Кирквудом, Борном и Грином.

В методе коррелятивных функций вычисление конфигурационного интеграла заменяется получением некоторой цепочки интегро-дифференциальных уравнений, связывающих между собой систему функций, характеризующих их взаимную корреляцию в пространственном расположении частиц.

Подчеркнем с самого начала, что метод коррелятивных функций является непосредственным следствием гиббсовской статистики. Нас в дальнейшем будет интересовать пространственное распределение системы взаимодействующих частиц.

Интегрируя распределение Гиббса по всем импульсам, находим выражение для вероятности данной конфигурации системы частиц:

$$dw_r = \int\limits_p dw = \frac{1}{I} e^{-\frac{U}{kT}} d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 \ldots d\boldsymbol{r}_N, \tag{48,1}$$

где I — конфигурационный интеграл:

$$I = \int e^{-\frac{U}{kT}} d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 \ldots d\boldsymbol{r}_N. \tag{48,2}$$

Если проинтегрировать dw_r по координатам всех частиц, кроме одной, то получаем

$$dw_r^{(1)} = d\boldsymbol{r}_1 \int e^{-\frac{U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N)}{kT}} d\boldsymbol{r}_2 \ldots d\boldsymbol{r}_N. \tag{48,3}$$

Очевидно, что $dw_r^{(1)}$ представляет вероятность того, что частица № 1 находится в элементе объема $d\boldsymbol{r}_1$ при любых положениях

всех остальных $(N-1)$ частиц. Эту вероятность можно представить в виде

$$dw_r^{(1)} = \frac{\rho(\boldsymbol{r}_1)\, d\boldsymbol{r}_1}{V}, \qquad (48,4)$$

где $\rho(\boldsymbol{r}_1)$ — плотность вероятности нахождения частицы в элементе объема $d\boldsymbol{r}_1$, нормированная на объем системы:

$$\frac{\rho_1(\boldsymbol{r}_1)}{V} = \frac{1}{I}\int e^{-\frac{U}{kT}}\, d\boldsymbol{r}_2 \ldots d\boldsymbol{r}_N. \qquad (48,5)$$

Функцию $\rho_1(\boldsymbol{r}_1)$ мы будем именовать ординарной функцией распределения.

Аналогично, интегрируя распределение Гиббса (47,1) по координатам всех частиц, кроме первой и второй, получаем

$$dw_r^{(1,2)} = \frac{d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2}{V^2}\rho_2(\boldsymbol{r}_2) = \frac{d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2}{I}\int e^{-\frac{U}{kT}}\, d\boldsymbol{r}_3 \ldots d\boldsymbol{r}_N, \qquad (48,6)$$

так что

$$\frac{\rho_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}{V^2} = \frac{1}{I}\int e^{-\frac{U}{kT}}\, d\boldsymbol{r}_3 \ldots d\boldsymbol{r}_N. \qquad (48,7)$$

Функция ρ_{12} представляет плотность вероятности того, что первая частица находится в элементе объема $d\boldsymbol{r}_1$, а вторая частица одновременно — в элементе $d\boldsymbol{r}_2$, нормированную на объеме системы.

Мы будем называть ρ_{12} двойной (бинарной) функцией распределения. Аналогичным образом можно определить функции распределения любого порядка. Например, функция распределения m-го порядка характеризует вероятность того, что первая частица находится в элементе объема $d\boldsymbol{r}_1$, вторая — в объеме $d\boldsymbol{r}_2, \ldots, m$-я — в объеме $d\boldsymbol{r}_m$ при любых положениях остальных $(N-m)$ частиц:

$$\frac{\rho_m(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_m)}{V^m} = \frac{1}{I}\int e^{-\frac{U}{kT}}\, d\boldsymbol{r}_{m+1} \ldots d\boldsymbol{r}_N. \qquad (48,8)$$

Если нас интересуют свойства системы, зависящие от положений не всех, а лишь некоторых частиц, входящих в систему, функции распределения ρ_m начинают играть ту же роль, что функция распределения Гиббса для системы в целом.

С помощью функций распределения можно находить средние значения величин, зависящих от координат соответствующих частиц.

Например,

$$\overline{L(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_m)} = \int L(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_m)\,\rho_m(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m)\frac{d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_m}{V^m}.$$

На первый взгляд может показаться, что отыскание функции распределения m-го порядка, которая характеризует пространственное распределение некоторых частиц системы, должно быть проще, чем нахождение распределения Гиббса — функции распределения N-го порядка, характеризующей конфигурацию всех частиц системы.

Однако ясно, что непосредственное определение функций распределения $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m, \ldots$ связано с вычислением конфигурационного интеграла, и поэтому их применение нисколько не упрощает задачи и не является шагом вперед.

Применение функций распределения не представляло бы никакого интереса, если бы не существовало другого способа их вычисления, не связанного с определением I.

Именно, оказывается возможным составить дифференциальное уравнение, которому должны удовлетворять функции распределения ρ_m. Для нахождения уравнения, которому должна удовлетворять ординарная функция, продифференцируем формулу (48,5) по координатам $\boldsymbol{r}_1$. Имеем, очевидно,

$$\frac{\partial\rho_1(\boldsymbol{r}_1)}{\partial\boldsymbol{r}_1} = -\frac{V}{IkT}\int e^{-\frac{U}{kT}}\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_1}\,d\boldsymbol{r}_2\ldots d\boldsymbol{r}_N. \tag{48,9}$$

Рассмотрим подробнее производную

$$\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_1} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\sum(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}\sum_{j=2}^{N}u(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|). \tag{48,10}$$

При этом мы воспользовались тем, что все члены суммы по i, кроме одного, относящегося к частице № 1, не зависят от r_1 и обращаются в нуль при дифференцировании.

Подставляя (48,10) в (48,9), получаем в правой части интеграл

$$-\frac{V}{IkT}\int e^{-\frac{U}{kT}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}\sum_j u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)\,d\boldsymbol{r}_2\ldots d\boldsymbol{r}_N =$$
$$= -\frac{V}{IkT}\sum_j\int e^{-\frac{U}{kT}}\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial\boldsymbol{r}_1}\,d\boldsymbol{r}_2\ldots d\boldsymbol{r}_N.$$

Но по определению (48,7)

$$\frac{1}{I}\int e^{-\frac{U}{kT}}\,d\boldsymbol{r}_2\ldots d\boldsymbol{r}_{j-1}\,d\boldsymbol{r}_{j+1}\ldots d\boldsymbol{r}_N = \frac{\rho_{1j}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_j)}{V^2}.$$

Поэтому правая часть может быть написана в виде

$$\frac{1}{VkT}\sum_{j=2}^{N}\int\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial\boldsymbol{r}_1}\rho_{1j}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_j)\,d\boldsymbol{r}_j.$$

Сумма по j содержит $(N-1)$ слагаемых, каждое из которых представляет интеграл вида

$$\int \frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}\rho_{1j}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\,d\boldsymbol{r}_j.$$

Поскольку система состоит из одинаковых частиц, так что $u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)$ при данном $|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|$ имеет одно и то же значение, а по всем $|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|$ ведется интегрирование, можно написать

$$\frac{1}{V}\sum_{j=2}^{N}\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}\rho_{1j}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_j)\,d\boldsymbol{r}_j=$$

$$=\frac{(N-1)}{V}\int\frac{\partial u(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}\rho_{1j}\,d\boldsymbol{r}_j\cong\frac{N}{V}\int\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}\rho_{1j}\,d\boldsymbol{r}_j.$$

Подставляя это выражение в формулу (48,9), получаем

$$\frac{\partial \rho_1(\boldsymbol{r}_1)}{\partial \boldsymbol{r}_1}=-\frac{N}{VkT}\int\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}\rho_{1j}\,d\boldsymbol{r}_j, \qquad (48,11)$$

Формула (48,11) связывает ординарную функцию распределения ρ_1 с бинарной ρ_{1j}.

Найдем уравнение, которому удовлетворяет бинарная функция ρ_{1j}. Дифференцируя (48,7), получаем

$$\frac{\partial \rho_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}{\partial \boldsymbol{r}_1}=-\frac{V^2}{IkT}\int e^{-\frac{U}{kT}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\Big(\sum u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)\Big)d\boldsymbol{r}_3\ldots d\boldsymbol{r}_N)=$$

$$=-\frac{V^2}{IkT}\int e^{-\frac{U}{kT}}\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}d\boldsymbol{r}_3\ldots d\boldsymbol{r}_N-$$

$$-\frac{V^2}{IkT}\sum_{j=3}^{N}\int\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}d\boldsymbol{r}_j\int e^{-\frac{U}{kT}}d\boldsymbol{r}_3\ldots d\boldsymbol{r}_{j-1}\,d\boldsymbol{r}_{j+1}\ldots d\boldsymbol{r}_N\cong$$

$$\cong-\frac{V}{VkT}\int\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}\rho_{12j}\,d\boldsymbol{r}_j-\frac{1}{kT}\rho_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}.$$

Следовательно, окончательно

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}=-\frac{1}{kT}\rho_{12}\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}-\frac{N}{VkT}\int\frac{\partial u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}\rho_{12j}\,d\boldsymbol{r}_j. \qquad (48,12)$$

Уравнение (48,12) связывает бинарную функцию распределения с тройной. Таким же образом может быть получено уравнение, связывающее тройную функцию распределения с четверной, . . , m-ю с $(m+1)$-й и т. д. В результате получается незамкнутая цепочка уравнений, каждое из которых выражает производную

от функции распределения данного порядка через самую функцию распределения следующего порядка:

$$\frac{\partial \rho_{12\ldots m}(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m)}{\partial \boldsymbol{r}_1} = -\frac{1}{kT} \rho_{12\ldots m} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} \left[\sum u(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_m|) \right] - \\ - \frac{N}{VkT} \int \sum_{j=m+1}^{N} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}_1} \rho_{12\ldots m,\, m+1}\, d\boldsymbol{r}_{m+1}. \qquad (48,13)$$

Продолжая этот процесс, мы придем к уравнению, связывающему функцию $(N-1)$-го порядка с функцией распределения N-го порядка, т. е. с распределением Гиббса. Следовательно, задача о нахождении функций распределения низшего порядка оказывается вновь связанной с распределением Гиббса для всей системы. Однако — и в этом состоит важнейшая особенность полученных уравнений — функции старшего порядка входят под знак интеграла не сами по себе, а всегда с коэффициентом $\sim \frac{N}{VkF} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}_1}$. В том случае, когда потенциальная энергия взаимодействия между двумя частицами $u(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_j|)$ быстро убывает с расстоянием и становится малой на расстояниях, превышающих молекулярные размеры, величина $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}_1}$ весьма мала при $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_j| \gg d$, где d — диаметр молекулы. Поэтому, например, в уравнении (48,13) выражение для интеграла в правой части можно оценить по порядку величины следующим образом:

$$\frac{N}{V} \int \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}_1} \rho_{12j}\, d\boldsymbol{r}_j \cong \frac{d^3}{V/N} \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}_1} \rho_{12j} \right)_d,$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}_1} \rho_{12j} \right)_d$ берется при расстояниях между частицами порядка d.

Если объем, приходящийся на одну частицу V/N, велик по сравнению с объемом частицы d^3, то коэффициент $\frac{d^3}{V/N}$ мал. Поэтому для значения подынтегрального выражения, в частности, функции распределения третьего порядка, можно пользоваться приближенными выражениями. Этот вывод не относится специально к уравнению для бинарной функции, но имеет общий характер.

§ 49. Уравнение состояния и энергия системы

Важное значение имеет бинарная функция распределения второго порядка $\rho_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$, через которую может быть выражено уравнение состояния.

Давление в системе определено формулой (32,5):

$$p = \frac{kT}{Z}\frac{\partial Z}{\partial V}.$$

Поскольку, как мы видели выше, Z распадается на два множителя, один из которых $Z_{\text{кин}}$ зависит только от кинетической энергии, но не зависит от конфигурации частиц и, следовательно, от объема, а второй I зависит только от конфигурации, имеем

$$p = \frac{kT}{Z_{\text{кин}} I}\frac{\partial Z_{\text{кин}} I}{\partial V} = \frac{kT}{I}\frac{\partial I}{\partial V}. \qquad (49,1)$$

Найдем производную от I по объему системы. Для этого изменим все линейные системы λ раз:

$$\boldsymbol{r}^* \to \lambda \boldsymbol{r}. \qquad (49,2)$$

Вследствие (49,2) получим

$$V^* \to \lambda^3 V. \qquad (49,3)$$

При этом

$$I = \lambda^{3N} \int e^{-\frac{U}{kT}} d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_N. \qquad (49,4)$$

Согласно (49,3)

$$\frac{\partial Z}{\partial V^*} = \frac{\partial I}{\partial V^*} = \frac{\partial I}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial V^*} = \frac{\partial I}{\partial \lambda}\cdot\frac{1}{3\lambda^2 V}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial I}{\partial V^*} = \frac{1}{3V}\left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1}. \qquad (49,5)$$

Дифференцируя (49,4) по λ, получаем

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{3NI}{\lambda} - \frac{\lambda^{3N}}{kT}\int e^{-\frac{U}{kT}} d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_N. \qquad (49,6)$$

Согласно определению (46,7)

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\sum\sum u(\lambda|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) = \sum\sum(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)\, u'.$$

Подставляя $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ в (49,6), находим

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} = 3NI - \frac{1}{kT}\sum\sum\int(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)\, u' e^{-\frac{U}{kT}} d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_N$$

или

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} \cong 3NI - \frac{N^2}{2kT}\int(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\, u' e^{-\frac{U}{kT}} d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_N.$$

При этом мы воспользовались тем, что все $\frac{N(N-1)}{2}$ слагаемых (число взаимодействующих пар) в двойной сумме идентичны между собой. С помощью (49,5) и (49,1) получим

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{N^2}{6VI}\int u'(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\,d\boldsymbol{r}_1\,d\boldsymbol{r}_2\int e^{-\frac{U}{kT}}\,d\boldsymbol{r}_3\ldots d\boldsymbol{r}_N.$$

Воспользовавшись определением (48,7), находим окончательно

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{N^2}{6V^3}\int \rho_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\,u'\,d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2. \qquad (49,7)$$

Формула (49,7) связывает уравнение состояния с бинарной функцией распределения.

Бинарная функция распределения $\rho_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ характеризует вероятность данного взаимного расположения двух произвольно выделенных частиц в системе. В изотропных фазах — газах и жидкостях — уравнение (49,7) допускает еще некоторое упрощение.

Поскольку в изотропных фазах бинарная функция не может зависеть от направлений, но только от расстояния между частицами, ее можно написать в виде

$$\rho_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \mu(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|).$$

Поэтому

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{N^2}{6V^3}\int \mu(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\,u'(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\,d\boldsymbol{r}_1\,d\boldsymbol{r}_2.$$

Вводя новую переменную $\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$ и $\boldsymbol{r}' = \frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}$, можно написать

$$\int \mu(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\,u'(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\,d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 = 4\pi V\int_0^\infty \mu(r)\,u'(r)\,r^3\,dr,$$

так что окончательно

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{2\pi N^2}{3V^2}\int_0^\infty \mu(r)\,u'(r)\,r^3\,dr. \qquad (49,8)$$

Аналогичным образом можно найти выражение для энергии системы

$$E = kT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T} = kT^2\frac{1}{Z_{\text{кин}}}\cdot\frac{\partial Z_{\text{кин}}}{\partial T} + \frac{kT^2}{I}\frac{\partial I}{\partial T} = \frac{3NkT}{2} + \frac{kT^2}{I}\frac{\partial I}{\partial T}, \qquad (49,9)$$

где $\frac{3NkT}{2}$ — энергия системы невзаимодействующих частиц.

Вычислим $\frac{\partial I}{\partial T}$. Подставляя значение I из (49,6), находим

$$\frac{\partial I}{\partial T}=\frac{N^2 I}{2V^2kT^2}\int u(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\,\rho_{12}(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)\,d\boldsymbol{r}_1\,d\boldsymbol{r}_2.$$

Поэтому

$$E=\frac{3NkT}{2}+\frac{2\pi N^2}{V}\int\limits_0^\infty \mu(r)\,u(r)\,r^2\,dr. \qquad (49,10)$$

Таким образом, энергия, как и давление, выражается через бинарную функцию распределения $\mu(r)$.

Бинарная функция распределения $\mu(r)$ может быть вычислена для газов, когда плотность частиц в системе мала.

Именно, в случае газов, имеющих не слишком большую плотность, уравнение для бинарной функции (48,12) может быть решено по методу последовательных приближений.

Действительно, в газах с не слишком большой плотностью среднее расстояние между частицами велико по сравнению с их размером. Оценки, проведенные в конце § 48, показывают, что коэффициент при тройной функции распределения в правой части (48.12) пропорционален $\frac{d^3}{V/N}$ и, следовательно, весьма мал в достаточно разреженном газе. Это позволяет подставить в интеграл в правой части (48,12) вместо точного значения ρ_{12j} его приближенное значение, не делая при этом заметной ошибки.

Для получения приближенного выражения для ρ_{12} разложим все функции распределения в ряд по степеням малой величины N/V (в действительности это разложение проводится по степеням отношения $\left[\frac{d}{V/N}\right]^3$) и ограничимся в этом разложении членами низшего порядка, написав

$$\rho_{12}=\rho_{12}^{(0)}+\frac{N}{V}\rho_{12}^{(1)}+\ldots, \qquad (49,11)$$

$$\rho_{123}=\rho_{123}^{(0)}+\frac{N}{V}\rho_{123}^{(1)}+\ldots. \qquad (49,12)$$

Подставляя эти ряды в уравнение для коррелятивных функций и удерживая младшие степени малых величин, можно последовательно определить коррелятивные функции, в частности ρ_{12}. Тогда давление согласно (49,8) представится в ряд по

степени N/V.

$$pV = NkT - \frac{N^2kT}{2V}\beta - \frac{2}{3}\frac{N^2}{V^2}\beta_2, \qquad (49,13)$$

$$\beta = \int \left(e^{-\frac{u}{kT}} - 1\right) dV, \qquad (49,14)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\int \left(e^{-\frac{u(r-r')}{kT}} - 1\right)\left(e^{-\frac{u(r)}{kT}} - 1\right)\left(e^{-\frac{u(r')}{kT}} - 1\right) dV\,dV'. \qquad (49,15)$$

Второй член в (49,13) совпадает, очевидно, с (47,2), а третий член дает поправку к давлению следующего порядка малости (по степени плотности N/V). В случае разреженных газов метод коррелятивных функций не имеет особых преимуществ перед другими методами расчета поправок на взаимодействие.

Более важным является применение этого метода к построению статистической теории жидкостей.

До настоящего времени статистическая теория жидкостей находится в самой начальной фазе своего развития. Причина этого коренится в самом характере теплового движения в жидкостях.

Тепловое движение в жидкостях отличается от теплового движения в газах и кристаллах тем, что в жидкостях энергия взаимодействия молекулы со своими соседями не может считаться ни малой (как в газах), ни большой (как в кристаллах) по сравнению с энергией теплового движения. В жидкостях эти величины как раз одного порядка малости.

В жидкости соседние молекулы колеблются около некоторых положений равновесия с относительно большой амплитудой. При этом взаимная конфигурация молекул примерно такая же, как в элементарной ячейке соответствующего кристалла.

Однако, в отличие от кристалла, амплитуда этих колебаний столь велика, что соседние частицы сравнительно легко отрываются друг от друга и покидают положения равновесия. Как принято говорить, среднее время оседлой жизни молекулы в положении равновесия τ ограничено (оно составляет около 10^{-8} *сек*).

В течение промежутков времени, малых по сравнению с этим временем τ, колебания молекул в жидкости имеют примерно такой же характер, что и в кристаллах. Однако за времена $t \gg \tau$ молекула жидкости может очутиться в любой точке жидкости. В этом смысле ее движение сходно с движением газовой молекулы.

Характер перескоков и частота колебаний определяются взаимодействием между молекулами в жидкости. Это взаимодействие может изменяться у различных жидкостей в весьма

широких пределах. Поэтому основная задача современной теории жидкостей сводится к получению качественных их характеристик. Такой качественной характеристикой является, в частности, бинарная коррелятивная функция $\mu(r)$. Бинарная коррелятивная функция характеризует взаимодействие ближайших соседей. Она может быть определена экспериментально из рассеяния рентгеновских лучей.

На рис. 61 кружками показана коррелятивная функция $\mu(r)$, определенная таким способом. Мы видим, что при фиксированном положении некоторой молекулы ее ближайшие соседи располагаются с наибольшей вероятностью на расстояниях, отвечающих максимумам кривой $\mu(r)$. Оказывается, что положение

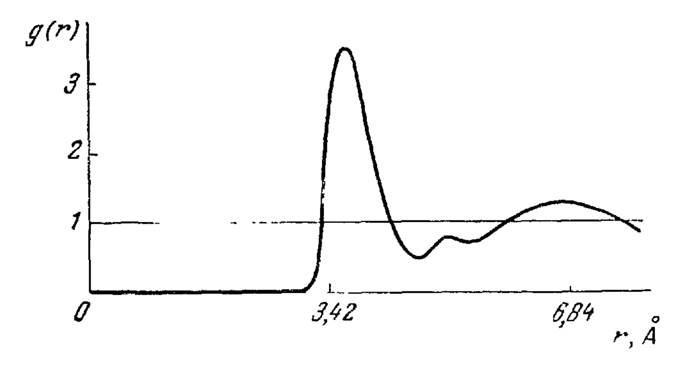


Рис. 61.

этих максимумов близко к соответствующим положениям в кристаллической решетке того же вещества. Говорят, что в расположении атомов в жидкости наблюдается ближний порядок, и в этом смысле говорят о квазикристаллической структуре воды. Необходимо, однако, подчеркнуть принципиальное различие между кристаллом и жидкостью. В жидкостях регулярность в расположении атомов простирается на ближайшие три-четыре соседних атома. У кристаллов правильная повторяемость атомов сохраняется на расстояниях, которые с микроскопической точки зрения являются бесконечными. Иными словами, в кристаллах имеется дальний порядок, простирающийся на как угодно большие расстояния. Это различие, как мы подчеркивали, связано с разным характером теплового движения. Поэтому аналогией между кристаллами и жидкостями можно пользоваться лишь в весьма ограниченных пределах.

С помощью известных упрощающих предположений из теории коррелятивных функций удается получить ход $\mu(r)$, качественно правильно передающий опытные данные. Именно, во-первых, вместо истинной энергии взаимодействия вводится

упрощенное выражение, показанное на рис. 61 пунктиром,

$$u(r)=\begin{cases}\infty & \text{при} \quad d\leqslant 2r,\\ 0 & \text{при} \quad d>2r,\end{cases}$$

где d — диаметр частиц. Эта энергия отвечает замене молекул твердыми (непроницаемыми) сферами диаметра d. Во-вторых, делается так называемое суперпозиционное приближение в функции ρ_{123}, которое заключается в замене

$$\rho_{123}\simeq\rho_{13}\rho_{23}. \tag{49,16}$$

Смысл формулы (49,16) заключается в том, что взаимодействие частицы 3 с частицей 1 происходит так, как будто бы частицы не было вовсе. Иными словами, взаимодействие частицы 3 с частицами 1 и 2 равно сумме парных взаимодействий (31) и (32).

Хотя суперпозиционное приближение не может быть обосновано теоретически, качественно ясно, что оно представляет следующий шаг вперед по сравнению с допущением о независимости взаимных положений частиц в пространстве (т. е. предположением $\rho_{123}=\rho_1\rho_2\rho_3$).

В суперпозиционном приближении уравнение (48,12) замыкается. Оно содержит только бинарную функцию $\rho_{12}=\mu(r)$.

Решение уравнения для $\mu(r)$ в указанном приближении было проведено численно. Оно зависит только от одного параметра, включающего величины N/V, T и d. Полученные решения приведены на рис. 61 сплошной кривой.

Мы видим, что общий ход расчетной и опытной кривых является весьма сходным. Это означает, что, несмотря на всю свою схематичность, модель молекул твердых шариков в суперпозиционном приближении, в общем, правильно передает характер взаимодействия молекул в жидкости.

ГЛАВА VII

КРИСТАЛЛЫ

§ 50. Строение кристаллов и тепловое движение

В основу современной теории кристаллического состояния кладется положение, согласно которому в узлах кристаллической решетки помещаются структурные единицы (атомы или молекулы) кристалла. Многочисленные рентгенографические исследования кристаллов и ряд других данных полностью подтвердили это положение и позволили измерить расстояние между атомами в кристаллической решетке. В дальнейшем мы будем исходить из указанного положения как основы теории кристаллического состояния.

Расстояния между атомами в кристаллах весьма малы. Они в общем того же порядка, что и расстояния между атомами в молекулах, а иногда точно с ними совпадают; например, расстояние между атомами в алмазе ($1{,}54 \cdot 10^{-8}$ *см*) очень близко к расстоянию между атомами углерода в соединениях типа углеводородов с длинной цепью (алифатические соединения, расстояние С — С равно $1{,}51 \cdot 10^{-8}$ *см*).

Расстояние между молекулами в кристаллах, построенных из молекул, всего в два-три раза больше внутримолекулярных расстояний. Благодаря малости расстояний между атомами в кристаллах взаимодействие между ними чрезвычайно велико. По порядку величины оно соответствует взаимодействию между атомами в молекуле. С этой точки зрения атомный или ионный кристалл можно рассматривать как одну гигантскую молекулу, содержащую огромное число связанных атомов. Как и в молекулах, энергия взаимодействия между атомами в кристалле очень вели́ка по сравнению с энергией теплового движения. Частицы в кристалле оказываются настолько прочно связанными между собой, что тепловое движение не может нарушить этой связи.

Таким образом, с точки зрения межатомного взаимодействия кристаллы представляют обратный предельный случай по сравнению с газами. Очевидно, что единственно возможным видом

движения связанных частиц в кристалле является колебательное движение около положений равновесия. Мы будем предполагать, что амплитуда колебаний весьма мала́ по сравнению с расстояниями между атомами. Ниже мы более подробно обсудим справедливость этого допущения.

Вычислим прежде всего среднюю энергию и теплоемкость кристалла, атомы которого совершают малые колебания около положений равновесия (узлов решетки), исходя из законов классической статистики. Для этого мы можем воспользоваться законом равномерного распределения энергии по степеням свободы. На каждую степень свободы колебательного движения[1]) приходится энергия kT. Число колебательных степеней свободы у кристалла, содержащего N атомов, равно $(3N-6)\approx 3N$ (так как N велико). Поэтому из классической статистики следует, что средняя энергия теплового движения в кристалле равна

$$E=3NkT.$$

Соответствующая молярная теплоемкость равна

$$C_V=3Nk=6\,\frac{кал}{моль}. \qquad (50,1)$$

Теплоемкость кристаллов оказывается не зависящей от температуры и от конкретных свойств кристаллов. Формула (50,1) совпадает с известным эмпирическим законом теплоемкости Дюлонга и Пти. Закон Дюлонга и Пти сравнительно точно передает теплоемкость многих атомных кристаллов при высоких температурах. Однако он становится совершенно непригодным при переходе к низким температурам.

При низких температурах теплоемкость всех кристаллов убывает с понижением температуры, как это и следовало ожидать, исходя из третьего начала термодинамики. Более того, теплоемкость некоторых кристаллов зависит от температуры и при температурах, значительно превышающих комнатную. В качестве характерного примера полной неприменимости закона Дюлонга и Пти можно привести кристалл алмаза. Таким образом, в случае кристаллов мы вновь сталкиваемся с ограниченной применимостью закона равномерного распределения, т. е. с ограниченной применимостью классической статистики.

Наиболее простая попытка применения квантовых законов к рассмотрению теплоемкости кристаллов состоит в следующем. Будем рассматривать каждый атом, колеблющийся в узле кристаллической решетки, как квантовый осциллятор, имеющий

---

[1]) Подчеркнем, что это относится только к колебательному движению малой амплитуды, когда потенциальная энергия выражается квадратичной функцией от величины смещения (см. § 50).

три степени свободы. В кристалле, построенном из атомов одного сорта, все атомы совершенно равноправны и колеблются с одинаковой частотой ν. Если предположить, что атомы колеблются независимо друг от друга, то среднюю энергию теплового движения всего кристалла E можно представить в виде

$$E=\sum_{n=1}^{N}\bar{\varepsilon}_n,$$

где $\bar{\varepsilon}_n$ — средняя энергия n-го осциллятора и суммирование ведется по всем осцилляторам кристалла. Поскольку каждый атом является трехмерным осциллятором, $\bar{\varepsilon}_n=3\bar{\varepsilon}$, где $\bar{\varepsilon}$ — средняя энергия линейного квантового осциллятора, даваемая формулой (43,3).

Таким образом, средняя энергия кристалла имеет вид

$$E=\frac{3Nh\nu}{2}\,\mathrm{cth}\,\frac{h\nu}{2kT},$$

а теплоемкость

$$C_V=\frac{3Nk}{4}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{1}{\mathrm{sh}^2\dfrac{h\nu}{2kT}}. \qquad (50,2)$$

Ход теплоемкости, передаваемый формулой (50,2), обсуждался нами в связи с колебательной теплоемкостью молекул (§ 43). При высоких температурах ($kT\gg h\nu$) величина теплоемкости стремится к предельному значению

$$C_V\approx 3Nk.$$

При низкой температуре в соответствии с требованием третьего начала C_V стремится к нулю по экспоненциальному закону:

$$C_V\approx\frac{3Nk}{4}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \qquad (50,3)$$

Простейший квантовый закон качественно правильно передает ход теплоемкости кристалла с температурой. Однако более детальное сравнение формулы (50,3) с опытными данными для теплоемкости показывает, что закон (50,3) не передает всех особенностей хода теплоемкости. Теплоемкость кристаллов уменьшается с температурой не по экспоненциальному закону (50,3), а по степенно́му закону вида $C_V\sim T^3$. Расхождение формулы (50,3) с экспериментом связано с ошибочностью предположения о независимости колебаний атомов в кристалле, которое было положено в основу ее вывода. В действительности атомы в кристалле настолько прочно связаны между собой, что не может быть и речи об индивидуальном движении отдельного атома, не зависящем от движения остальных атомов решетки.

Колебательное движение атомов в кристалле имеет коллективный характер, и в нем принимают участие все атомы кристалла одновременно.

Для получения более ясного представления о характере теплового движения атомов в кристалле мы воспользуемся фиктивной моделью кристалла в виде цепочки атомов, расположенных вдоль линии на равных расстояниях друг от друга. Такую цепочку можно рассматривать как некоторый одномерный кристалл. Хотя в природе не существует одномерных кристаллов, рассмотрение теплового движения в одномерном кристалле позволяет выяснить характер движения в реальном трехмерном кристалле.

Пронумеруем атомы в цепочке так, чтобы номер n пробегал значения от $n=1$ до $n=N$ (всего в цепочке имеется N атомов). Предположим, что некоторый атом (ион или молекула), имеющий, скажем, номер n, выйдет из положения равновесия и сместится на расстояние ξ_n вправо или влево. Тогда он будет испытывать силы со стороны соседних атомов — силу отталкивания со стороны того соседа, к которому он приблизился, и притяжения со стороны другого соседа. Поскольку силы межмолекулярного взаимодействия быстро убывают с расстоянием, мы можем учитывать только взаимодействие данного атома с его двумя ближайшими соседями — атомами с номерами $(n-1)$ и $(n+1)$. Уже следующие атомы с номерами $(n+2)$ и $(n-2)$ будут взаимодействовать с рассматриваемым атомом очень слабо, так что этим взаимодействием можно пренебречь.

Сила, действующая на n-й атом со стороны каждого из двух его соседей, может быть записана в виде

$$F_n = -\frac{\partial u(\xi_n)}{\partial \xi_n},$$

где $u(\xi_n)$ — потенциальная энергия n-го атома в точке ξ_n. При малых смещениях потенциальную энергию $u(\xi_n)$ можно разложить в ряд по степеням малой величины ξ_n и ограничиться первыми членами разложения, как это всегда делается в теории малых колебаний:

$$u(\xi_n) = u(0) + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right)_0 \xi_n + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2}\right)_0 \cdot \frac{\xi_n^2}{2} + \ldots$$

Поскольку в точке $\xi = 0$ потенциальная энергия имеет минимум, в ней $\frac{\partial u}{\partial \xi_n} = 0$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} = \varkappa > 0$. Сила, действующая на частицу,

$$F = -\varkappa \xi_n.$$

При этом предполагалось, что соседние атомы, имеющие номера $(n-1)$ и $(n+1)$, оставались неподвижными в своих узлах

кристаллической решетки. В действительности, конечно, это не так. Смещение n-го атома приведет к смещению $(n-1)$-го и $(n+1)$-го, причем $(n+1)$-й атом под действием силы отталкивания сдвигается вправо на расстояние ξ_{n+1}, а $(n-1)$-й под действием силы притяжения последует за n-м и сместится на расстояние ξ_{n-1}. Поэтому расстояние между n-м атомом и его соседями изменится соответственно на $(\xi_{n+1}-\xi_n)$ и $(\xi_{n-1}-\xi_n)$. При этом на n-й атом будет действовать сила

$$F_n = \varkappa(\xi_{n+1}-\xi_n) + \varkappa(\xi_{n-1}-\xi_n) = \varkappa(\xi_{n+1}+\xi_{n-1}-2\xi_n).$$

Смещение $(n+1)$-го атома приведет к смещению $(n+2)$-го, а $(n-1)$-го — к смещению $(n-2)$-го. Эти атомы в свою очередь будут действовать на следующих соседей, и в результате вся цепочка атомов придет в движение. Чтобы исследовать это движение, достаточно найти движение произвольно выбранного n-го атома. Уравнения его движения имеют вид

$$m\ddot{\xi}_n = \varkappa(\xi_{n+1}+\xi_{n-1}-2\xi_n). \qquad (50,4)$$

Для решения системы уравнений требуется задание граничных условий. Из общих положений статистической физики следует, что движение системы, состоящей из большого числа частиц, не может зависеть от характера граничных условий.

Мы выберем в качестве граничного условия так называемое условие периодичности. Именно, будем считать, что вдоль всей оси x расположены одинаковые цепочки атомов, каждая из которых содержит N атомов. При этом решение для всех цепочек должно быть одинаковым. Это значит, что должно выполняться условие

$$\xi_n = \xi_{n\pm N}. \qquad (50,5)$$

Будем пытаться искать решение системы уравнений (50,4) в виде

$$\xi_n = u_f e^{ifan}.$$

Подставляя это значение ξ_n в (50,4), находим

$$m\ddot{u}_f = -x(2-e^{ifa}-e^{-ifa})\,u_f = -2x(1-\cos f_a)\,u_f. \qquad (50,6)$$

Решение уравнения (50,6) имеет вид

$$u_f = Ae^{i\omega_f t},$$

где A — амплитуда. Подстановка этого значения u_f в (50,6) дает

$$\omega = \sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\sqrt{2(1-\cos fan)} = 2\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\sin\frac{fa}{2}. \qquad (50,7)$$

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (50,5), следует положить

$$e^{\pm i f a N} = 1 \tag{50,8}$$

или

$$f_k = \pm \frac{\ell k \pi}{aN}, \tag{50,9}$$

где k пробегает ряд целых четных значений $k=2, 4, 6, \ldots, N$. Мы видим, что в случае цепочки атомов, связанных квазиупругими силами, в ней возникает система бегущих волн.

Формула (50,7) определяет закон дисперсии волн. Волновые числа f_k *и частоты* ω_f *пробегают дискретный ряд значений*. Однако, поскольку число атомов N весьма велико при не малых значениях k, интервал между f_k и $f_{k\pm 1}$ столь мал, что можно считать f и ω_f практически непрерывно изменяющимися величинами. Соответственно смещения n-го атома можно написать в виде решений (50,4):

$$\xi_{nk} = A_k e^{i\omega_f t} e^{i f_k a n}. \tag{50,10}$$

Значения волнового числа можно считать ограниченными и лежащими в интервале

$$-\frac{\pi}{a} = f_{\min} \leqslant f \leqslant f_{\max} = \frac{\pi}{a}. \tag{50,11}$$

Если взять значения f, лежащие вне этого интервала, то в силу периодического характера закона дисперсии (50,7) они будут приводить к тем же значениям частоты. Поэтому можно в (50,7) взять лишь одну ветвь синуса и представить зависимость нижней кривой на рис. 62.

Всего имеется $2N$ бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях по цепочке, каждая из которых имеет одну и ту же частоту. Длина волн, бегущих по цепочке, дается формулой

$$\lambda_k = \frac{2Na}{k} = \frac{2\pi}{f_k}. \tag{50,12}$$

Самая длинная из стоячих волн (при $k=1$) имеет длину волны $2Na$, т. е. на всей цепочке укладывается одна полуволна. Значениям $k=1, 2, \ldots$ соответствуют все более и более короткие волны, но такие, что на длине цепочки укладывается целое число полуволн. Замечательно то, что все атомы цепочки колеблются с одинаковой частотой (т. е. ω_k зависит только от k, но не от номера атома).

Скорость распространения волн равна

$$v_k = \frac{\omega_k}{f_k} = \frac{\omega_k \lambda_k}{2\pi} = \nu_k \lambda_k = 2\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\,\frac{\sin\frac{f_k a}{2}}{f_k}, \tag{50,13}$$

т. е. оказывается различной для различных волн. При малых волновых числах f_k, т. е. при длинных волнах, $\sin\frac{f_k a}{2}$ можно разложить в ряд и написать

$$\sin\frac{f_k a}{2} \approx \frac{f_k a}{2}.$$

В этом случае

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\varkappa}{m}}\, f_k a, \tag{50,14}$$

$$v = v_0 = a\sqrt{\frac{\varkappa}{m}} = \text{const}. \tag{50,15}$$

В случае очень длинных волн, для которых выполнено неравенство $f_k a \ll 1$ или $\lambda \gg a$, очень большое число атомов колеблется

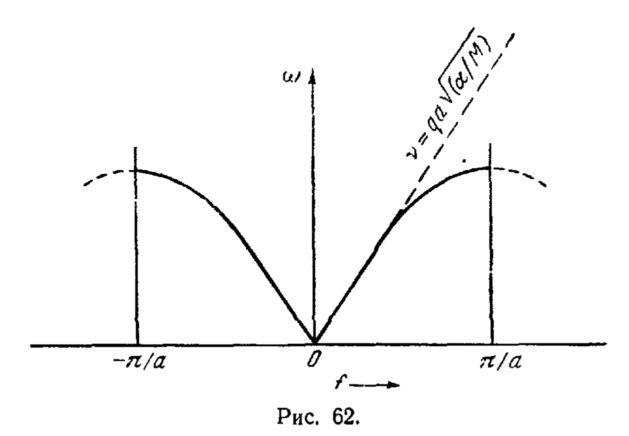


Рис. 62.

почти в одной фазе — изменение фазы происходит на длине полуволны, охватывающей большое число атомов. Поэтому атомная структура решетки перестает сказываться на ее свойствах.

Решетка ведет себя по отношению к длинным волнам, как сплошная упругая среда. Стоячие волны в решетке превращаются в стоячие волны в упругой среде. Скорость распространения волн в решетке, даваемая по (50,15), совпадает со скоростью упругих волн (скоростью звука) в сплошной среде.

Самой короткой из возможных волн $\lambda_N = \frac{2Na}{N} = 2a$ соответствуют наибольшая частота

$$\omega_N = 2\sqrt{\frac{\varkappa}{m}} \tag{50,16}$$

и скорость распространения

$$v = v_{\text{мин}} = \frac{2a}{\pi}\sqrt{\frac{\varkappa}{m}}. \tag{50,17}$$

Сравнение формул (50,15) и (50,17) показывает, что длинные волны распространяются с несколько бо́льшей скоростью, чем короткие, т. е. имеет место явление дисперсии. В промежуточной области частот скорость распространения волн, определяемая формулой (50,13), зависит от волнового числа f_k или частоты ω_k.

Смещение произвольного n-атома в цепочке дается в виде наложения смещений вида (50,10), т. е.

$$\xi_n = \sum_k \xi_{nk} = \sum A_k \sin(\omega_k t + \alpha)\sin(af_k n), \tag{50,18}$$

где суммирование ведется по всем возможным значениям волнового вектора f_k. Вместо произвольной амплитуды A_k введем амплитуду

$$C_k = \sqrt{\frac{N-1}{2}}\,A_k$$

и обозначим

$$C_k \sin(\omega_k t + \alpha) = q_k. \tag{50,19}$$

Тогда имеем

$$\xi_n = \sqrt{\frac{2}{N-1}}\sum_k q_k \sin f_k an. \tag{50,20}$$

Если заданы значения амплитуд q_k, то из формулы (50,20) следует, что смещение произвольного атома в цепочке будет полностью определено. Поэтому амплитуды q_k можно рассматривать как обобщенные координаты системы.

Найдем энергию всей цепочки, выраженную через обобщенные координаты q_k. Кинетическая энергия цепочки, очевидно, равна

$$T = \frac{m}{2}\sum_n \dot{\xi}_n^2,$$

где суммирование ведется по всем атомам цепочки. Имеем

$$\dot{\xi}_n^2 = \frac{2}{N-1}\left(\sum_k \dot{q}_k \sin f_k a n\right)^2 = \frac{2}{N-1}\sum_k \sum_{k'} \dot{q}_k \dot{q}_{k'} \sin(f_k a n)\cdot\sin(f_{k'} a n),$$

поэтому

$$T = \frac{m}{2}\sum_n \sum_k \sum_{k'} \frac{2}{(N-1)} \dot{q}_k \dot{q}_{k'} \sin(f_k a n)\sin(f_{k'} a n).$$

Переставляя порядок суммирования, получаем

$$T = \frac{m}{2}\sum_k \sum_{k'} \frac{2}{N-1} \dot{q}_k \dot{q}_{k'} \sum_n \sin(f_k a n)\sin(f_{k'} a n).$$

В силу свойства ортогональности синусов сумма

$$\sum_n \sin(f_k a n)\sin(f_{k'} a n)$$

равна нулю, если только $f_k \neq f_{k'}$, т. е. $k \neq k'$. Если $f_k = f_{k'}$, то $k = k'$ и

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sin(f_k a n)\sin(f_{k'} a n) = \frac{N-1}{2}.$$

Поэтому

$$T = \frac{m}{2}\sum_k \dot{q}_k^2. \tag{50,21}$$

Кинетическая энергия цепочки выражается квадратичной формой производных от координат q_k.

Найдем теперь потенциальную энергию всей цепочки. Из формулы (50,3) следует (в чем можно убедиться дифференцированием), что потенциальная энергия всего кристалла равна

$$U = \sum u_n = \frac{\varkappa}{2}\sum(\xi_{n+1} - \xi_n)^2, \tag{50,22}$$

где u_n — потенциальная энергия n-го атома.

Действительно, если сила F_n, действующая на n-й атом, равна

$$F_n = -\frac{\partial U}{\partial \xi_n} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_n}[(\xi_2 - \xi_1)^2 + \ldots + (\xi_n - \xi_{n-1})^2 +$$
$$+ (\xi_{n+1} - \xi_n)^2 + \ldots + (\xi_N - \xi_{N-1})^2] = \varkappa(\xi_{n-1} + \xi_{n+1} - 2\xi_n),$$

из формулы (50,20) находим

$$\xi_{n+1}-\xi_n=\sqrt{\frac{2}{N-1}}\sum_k q_k\{\sin[f_k a(n+1)]-\sin(f_k an)\}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{N-1}}\sum q_k 2\cos\left(f_k an+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{f_k a}{2}.$$

Поступая так же, как при вычислении кинетической энергии, имеем

$$U=\frac{\varkappa}{2}\cdot\frac{2}{N-1}\cdot 4\sum_n\sum_k\sum_{k'} q_k q_{k'}\cos\left(f_k an+\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\cos\left(f_{k'}an+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{f_k a}{2}\sin\frac{f_{k'}a}{2}=\frac{\varkappa}{2}\frac{2}{N-1}4\times$$
$$\times\sum_k\sum_{k'} q_k q_{k'}\sin\frac{f_k a}{2}\sin\frac{f_{k'}a}{2}\cdot\sum_n\cos\left(f_k an+\frac{1}{2}\right)\cos\left(f_{k'}an+\frac{1}{2}\right).$$

Но для косинусов имеет место условие ортогональности:

$$\sum\cos\left(f_k an+\frac{1}{2}\right)\cos\left(f_{k'}an+\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{N-1}{2} & \text{при} \quad k=k',\\ 0 & \text{при} \quad k\neq k',\end{cases}$$

поэтому

$$U=\frac{\varkappa}{2}\sum_k q_k^2\left(2\sin\frac{f_k a}{2}\right)^2.$$

Учитывая формулу (50,11), окончательно находим

$$U=\frac{m}{2}\sum_k\omega_k^2 q_k^2. \tag{50,23}$$

Таким образом, полная энергия кристалла равна

$$E=\frac{m}{2}\sum_k(\dot q_k^2+\omega_k^2 q_k^2). \tag{50,24}$$

Формула (50,24) имеет важный физический смысл: полная энергия кристалла выражается квадратичной формой, содержащей только квадраты величин $\dot q_k$ и q_k (но не их произведения вида $\dot q_k q_k$). Поэтому величины q_k являются нормальными координатами колеблющегося кристалла. Каждое слагаемое в (50,24) имеет вид

$$\varepsilon=\frac{m}{2}(\dot q_k^2+\omega_k^2 q_k^2)=\frac{m}{2}(\dot q_k^2+4\pi^2\nu_k^2 q_k^2), \tag{50,25}$$

т. е. представляет энергию линейного гармонического осциллятора с массой, равной массе атома, колеблющегося с частотой ν_k. Энергия E равна сумме энергий таких осцилляторов, имеющих различные частоты ν_k. Энергия кристалла из N атомов, совершающих связанные колебания, оказывается равной энергии N независимых гармонических осцилляторов с набором частот ν_k, определенных формулой (50,11). В этом смысле система из N связанно колеблющихся атомов эквивалентна набору N независимых осцилляторов с частотами ν_k. Вместо того чтобы находить среднюю энергию сложной системы из N связанных атомов, мы можем искать среднюю энергию гораздо более простой эквивалентной системы набора N независимых осцилляторов. Необходимо подчеркнуть, что линейные осцилляторы с энергией, даваемой формулой (50,25), не имеют ничего общего с реальными атомами (за исключением одинаковой массы). Каждый осциллятор представляет одно из нормальных колебаний всего кристалла как целого. В нормальном колебании кристалла участвуют все атомы, которые колеблются с одной и той же частотой ν_k.

Совершенный нами переход от смещений ξ_n к нормальным координатам q_k представляет обычное для волновых процессов преобразование и не связан с особенностями линейной цепочки. Возможность перехода к нормальным координатам, в которых энергия имеет вид квадратичной формы (50,24), представляет общую алгебраическую теорему.

Очень редко встречаются реальные кристаллы, построенные из атомов (или молекул) с одной массой m. Обычно в состав решетки входят частицы с разными массами и различной химической природой. Последнее приводит к изменению закона взаимодействия между соседними атомами, так что величина $\varkappa$ имеет разные значения в разных точках кристалла.

Не учитывая последнего эффекта, рассмотрим лишь влияние на характер движения цепочки различия в массах атомов на примере модели одномерной цепочки.

Пусть на равных расстояниях в цепочке поочередно размещены атомы с массами m_1 и m_2, имеющие одну и ту же физическую природу (т. е. с теми же значениями квазиупругой постоянной). Уравнения движения цепочки запишутся теперь в виде

$$m_1\ddot{\xi}_n=\varkappa(2\xi_n-\eta_n-\eta_{n-1}), \tag{50,26}$$

$$m_2\ddot{\eta}_n=\varkappa(2\eta_n-\xi_n-\xi_{n-1}), \tag{50,27}$$

где ξ_n и η_n — смещения атомов с атомами.

Аналогично (50,9) можем искать решение системы уравнений (50,26) и (50,27), удовлетворяющее граничным условиям

(50,5), в виде

$$\xi_{nk} = A_k e^{if_k an} e^{i\omega t},$$
$$\eta_{nk} = B_k e^{if_k an} e^{i\omega t}.$$

Подстановка этих выражений в (50,26) и (50,27) приводит к системе алгебраических уравнений

$$(-\omega^2 m_1 + 2\varkappa) A = 2\varkappa \cos(fan) B,$$
$$(-\omega^2 m_2 + 2\varkappa) B = 2\varkappa \cos(fan) A.$$

Исключая амплитуды, можно получить уравнение для ω^2:

$$\omega^2 = \varkappa\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^2 - \frac{4\sin^2(f_k an)}{m_1 m_2}}. \quad (50,28)$$

Если изобразить ω как функцию f, то в зависимости от знака перед корнем получаются две ветви, изображенные на рис. 62. При малых f, разлагая в (50,28) квадратный корень, получаем

$$\omega_1 \cong \sqrt{\frac{2\varkappa}{m_1 + m_2}}\,(f_k a), \quad (50,29)$$

$$\omega_2 \cong \sqrt{2\varkappa\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}. \quad (50,30)$$

Ветвь ω_1, именуемая акустической, отвечает $\omega \to 0$ при $f_k \to 0$. Ее ход практически не отличается от хода дисперсионной кривой (50,14) для цепочки из одинаковых атомов.

Вторая ветвь частот, отсутствующая в цепочке из одинаковых атомов, обнаруживает совершенно другое поведение (верхняя кривая рис. 62). При $f_k \to 0$ ω_2 стремится к постоянному пределу (50,30). Эта ветвь частот называется оптической. При данном f_k частота волн оптической ветви гораздо выше акустической.

При малых f_k легко определить отношение амплитуд волн в оптической ветви

$$\frac{A}{B} \approx -\frac{m_2}{m_1}. \quad (50,31)$$

Знак минус в последней формуле показывает, что частицы с массами m_1 и m_2, участвующие в оптических волнах, движутся навстречу друг другу.

В акустических волнах соседние частицы с разными массами движутся в близких фазах и в одном направлении (рис. 63, сверху). На рис. 63 снизу изображены оптические волны. Стрелками изображены направления движения атомов.

Мы видим, что различие в массах атомов существенно изменяет характер теплового движения в кристалле.

Если в узлах кристаллической решетки располагаются не нейтральные атомы, а заряженные ионы, то оптической ветви отвечает их встречное движение. Поэтому оптические волны вызывают колебания поляризации кристалла. Поэтому именно

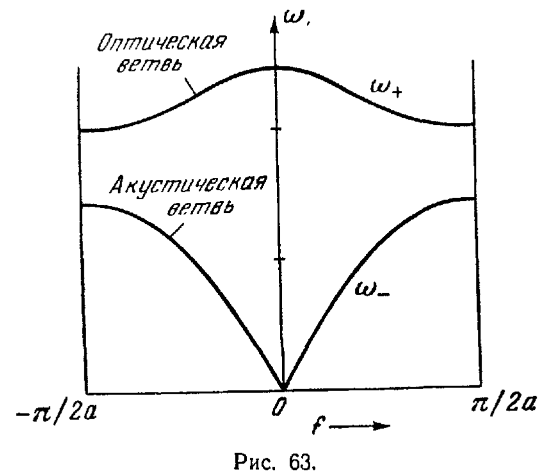


Рис. 63.

оптические волны оказывают существенное влияние на электромагнитные процессы в кристаллах. С этим связано само их название.

§ 51. Длинные волны в трехмерном кристалле

Тепловое движение в трехмерном кристалле имеет в общем такой же характер, что и в одномерной модели. Смещение произвольного атома из положения равновесия в решетке передается его ближайшим соседям в трех измерениях. Смещения их вызовут в свою очередь смещения других атомов, и в кристалле возникнет упругая волна, распространяющаяся в трех измерениях. В результате отражения упругих волн от граней кристалла в последнем установится система стоячих волн. В том же приближении, что и для одномерной модели (пренебрегая третьими степенями смещений), энергию кристалла можно написать в нормальных координатах в виде

$$E=\sum\left(\frac{m\dot{q}_k^2}{2}+\frac{4\pi^2 m\nu_k^2 q_k^2}{2}\right), \qquad (51,1)$$

где суммирование ведется по всем возможным волновым числам. Связанные колебания атомов в трехмерном кристалле

эквивалентны набору $3N$ независимых линейных осцилляторов с собственными частотами ν_k.

Определение собственных частот для трехмерного кристалла представляет очень большие математические трудности. Поэтому для нахождения термодинамических функций кристалла необходимо сделать дальнейшие (кроме пропорциональности сил первой степени смещений) упрощающие предположения. Во-первых, при рассмотрении тепловых волн в кристалле мы ограничимся случаем длинных волн ($\lambda \gg a$). Как мы видели в предыдущем параграфе, в случае длинных волн очень большие группы атомов колеблются в одной фазе и можно пренебречь дискретной атомной структурой кристалла. Точно так же в случае длинных волн в трехмерном кристалле можно отвлечься от дискретной структуры и рассматривать кристалл как сплошную упругую среду. Во-вторых, мы будем пренебрегать анизотропией кристалла и считать его изотропной упругой средой. В изотропной упругой среде тепловые возмущения кристалла образуют систему стоячих волн. В трехмерной упругой среде волновое число f равно

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \qquad (51,2)$$

где f_1, f_2 и f_3 — три величины, характеризующие распространение волны в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Для того чтобы выполнялось условие типа (50,5), т. е. условие отражения упругих волн от граней кристалла, волновые числа должны удовлетворять условиям:

$$f_1 = \frac{\pi k_1}{aN}; \quad f_2 = \frac{\pi k_2}{aN}, \quad f_3 = \frac{\pi k_3}{aN}, \qquad (51,3)$$

где k_1, k_2 и k_3 — целые числа $(1, 2, \ldots, N)$. Частота длинных волн связана с волновым числом соотношением, представляющим непосредственное обобщение формулы (50,14).

В отличие от линейной модели, в трехмерной изотропной упругой среде возможно распространение трех упругих волн: одной продольной (в которой смещения происходят вдоль направления распространения волны) и двух поперечных (в которых смещения перпендикулярны к направлению распространения). Скорости распространения продольной c_l и поперечных волн c_t различны. Поэтому вместо (50,13) в трехмерном случае нужно написать

$$2\pi\nu_l = c_l f, \quad 2\pi\nu_t = c_t f,$$

где ν_l и ν_t — частоты продольной и поперечных упругих волн, а c_l и c_t — скорости продольного и поперечного звука.

Для дальнейшего нам понадобится знать число упругих волн, частота которых лежит в интервале между ν_l и $\nu_l+d\nu_l$ и ν_t и $\nu_t+d\nu_t$ соответственно. Вычисление этой величины ничем не отличается от расчетов § 38 ч. I.

Действительно, в § 38 ч. I было вычислено число бегущих волн в полости объема V. Совершенно аналогичным образом можно найти число стоячих волн в объеме кристалла. Единственное отличие от расчета, проведенного в § 38 ч. I, заключается в том, что в кристалле волновые векторы определены формулой (51,3), отличающейся от (38,11) ч. I отсутствием множителя 2. С другой стороны, целые числа k_1, k_2, k_3 здесь принимают только положительные значения, тогда как в § 38 ч. I — как положительные, так и отрицательные.

В итого для числа волн с частотой между ν_l, $\nu_l+d\nu_l$ получается формула

$$g(\nu_l)\,d\nu_l = \frac{4\pi V}{c^3}\nu_l^2\,d\nu_l, \tag{51,4}$$

идентичная с формулой (38,22) ч. I [1]).

Для числа поперечных волн с частотой между ν_t и $\nu_t+d\nu_t$ аналогично находим

$$g(\nu_t)\,d\nu_t = 2\frac{4\pi V}{c_t^3}\nu_t^2\,d\nu_t,$$

где множитель 2 появляется вследствие того, что в упругой среде имеется две поперечные волны с одной и той же частотой ν_t. Полное число упругих волн, частота которых лежит между ν и $\nu+d\nu$, очевидно, равно

$$g(\nu)\,d\nu = 4\pi V\left(\frac{1}{c_l^3}+\frac{2}{c_t^3}\right)\nu^2\,d\nu. \tag{51,6}$$

Поскольку каждой волне с частотой ν_k мы сопоставляли осциллятор, колеблющийся с той же частотой, вычисленная нами величина $g(\nu)d\nu$ представляет число осцилляторов, частота которых лежит между ν и $\nu+d\nu$. Если бы кристалл имел бесконечные размеры и содержал бесконечно большое число

---

[1]) Заметим для дальнейшего, что смещение, представленное к формуле (50,6) в виде стоячей волны, может быть записано в виде наложения двух бегущих волн. Повторяя выкладки § 38 ч. I, можно написать ξ в виде

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_f\sum_{i=1}^{3} e_{fi}\left(q_{fi}e^{ifr}+q_{fi}^{*}e^{-ifr}\right). \tag{51,5}$$

атомов, число возможных частот или осцилляторов также было бы бесконечным. В действительности, однако, оно равно $3N$. Поэтому мы можем написать

$$3N = \sum g(\nu_k), \tag{51,7}$$

где суммирование ведется по всем возможным частотам.

Вид функции $g(\nu)$ установлен нами в области длинных волн или малых частот, в которой ее можно считать непрерывной функцией аргумента ν, даваемой формулой (51,6). Однако в области высоких частот вид спектральной функции неизвестен и зависит от конкретной структуры данного кристалла.

Дебаем был предложен метод вычисления термодинамических функций кристаллов, который, по существу, основан на некоторой интерполяции.

Именно, спектральная функция $g(\nu)$ считается имеющей вид (51,6) во всей области частот, и во всей области частот суммирование заменяется интегрированием. Однако интегрирование ведется до некоторой предельной частоты $\nu_{\text{макс}}$, которая выражается через число частиц в кристалле с помощью условия (51,7). Таким образом, спектральная функция $g(\nu)$ считается имеющей вид

$$g(\nu) = \begin{cases} 4\pi V\left(\dfrac{1}{c_l^3} + \dfrac{2}{c_t^3}\right)\nu^2, & \nu \leqslant \nu_{\text{макс}}, \\ 0, & \nu > \nu_{\text{макс}}. \end{cases} \tag{51,8}$$

Это даст

$$3N = \int_0^{\nu_{\text{макс}}} 4\pi V\left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right)\nu^2\,d\nu = 4\pi V\left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right)\frac{\nu_{\text{макс}}^3}{3}, \tag{51,9}$$

откуда

$$\nu_{\text{макс}} = \left(\frac{9}{4\pi}\,\frac{N}{V}\,\frac{c_l^3 c_t^3}{2c_l^3 + c_t^3}\right)^{1/3}. \tag{51,10}$$

Наибольшая, или предельная, частота $\nu_{\text{макс}}$ оказывается зависящей только от измеряемых на опыте величин — скоростей звука c_l и c_t и пропорциональна плотности кристалла $\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$.

Введение такой «усеченной» спектральной функции (51,8) приводит к выражениям для термодинамических функций, которые в предельных случаях низких и высоких температур превращаются в точные выражения, а в области промежуточных температур имеют характер интерполяционных формул.

С помощью выражения для предельной частоты $\nu_{макс}$, определенной по формуле (51,10), можно переписать спектральную функцию $g(\nu)$ в более компактном виде:

$$g(\nu)\,d\nu = \frac{9N}{\nu^3_{макс}}\nu^2\,d\nu. \qquad (51,11)$$

§ 52. Функция состояний кристалла

В предыдущих параграфах мы установили, что тепловое движение в кристалле, содержащем N атомов, описывается набором из $3N$ независимых осцилляторов, частоты которых лежат между нулем и $\nu_{макс}$. Чтобы найти функцию состояний всего кристалла, нужно найти функцию состояний системы, состоящей из $3N$ независимых осцилляторов. Поскольку осцилляторы являются независимыми, мы можем, очевидно, написать эту функцию в виде произведения функций состояния всех осцилляторов, т. е.

$$Z = \prod_{k=1}^{3N} z_k, \qquad (52,1)$$

где Z — функция состояний кристалла и z_k — функция состояний отдельного k-го осциллятора. Необходимо подчеркнуть, что осциллятор не является отдельным атомом, а характеризует определенное колебание всего кристалла, как целого. Поэтому в (52,1) не следует производить деление на $3N!$, как это нужно было бы сделать в случае системы из $3N$ одинаковых независимых частиц. Функция состояний квантового осциллятора z_k была вычислена нами в § 43. Логарифмируя (52,1) и подставляя в него (43,2), находим

$$\ln Z = \sum_{k=1}^{3N} \ln z_k = \sum_{k=1}^{3N} \ln \frac{e^{-\frac{h\nu_k}{kT}}}{\left(1 - e^{-\frac{h\nu_k}{kT}}\right)}. \qquad (52,2)$$

Для вычисления суммы (52,2) необходимо знать все возможные частоты ν_k кристалла. Однако, как мы указывали выше, эта задача еще не решена. Поэтому мы ограничимся приближением Дебая и заменим суммирование интегрированием по «усеченному» спектру (51,11). Это даст

$$\ln Z = \int_0^{\nu_{макс}} \ln \frac{e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)} g(\nu)\,d\nu =$$

$$= -\frac{9N}{\nu^3_{макс}} \int_0^{\nu_{макс}} \frac{h\nu^3}{2kT}\,d\nu - \frac{9N}{\nu^3_{макс}} \int_0^{\nu_{макс}} \ln\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)\nu^2\,d\nu. \qquad (52,3)$$

Для вычисления интегралов в формуле (52,3) введем новую переменную

$$x = \frac{h\nu}{kT} \tag{52,4}$$

и характеристическую температуру кристалла θ_c

$$\theta_c = \frac{h\nu_{\text{макс}}}{k},$$

аналогичную характеристической температуре, введенной в § 43. Тогда получим

$$\ln Z = -\frac{9N\theta_c}{8T} - 9N\left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3 \int_0^{\theta_c/T} x^2 \ln(1-e^{-x})\,dx. \tag{52,5}$$

Вычисление последнего интеграла может быть проведено только в случае низких и высоких температур. Под низкими температурами мы будем понимать температуры, значительно более низкие, чем характеристическая температура кристалла θ_c. При $T \ll \theta_c$ предел в интеграле можно заменить на бесконечный, поскольку подынтегральная функция весьма мала при сколько-нибудь больших значениях аргумента x. Это дает

$$\int_0^{\theta_c/T} x^2 \ln(1-e^{-x})\,dx \approx \int_0^{\infty} x^2 \ln(1-e^{-x})\,dx. \tag{52,6}$$

Интеграл (52,6) вычислен в приложении IV. Подставляя его значение в (52,5), имеем

$$\ln Z = -\frac{9N\theta_c}{8T} + \frac{\pi^4 N}{5}\left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3. \tag{52,7}$$

Замена предела в интеграле (52,6) на бесконечность имеет важный физический смысл. Она показывает, что при $T \ll \theta_c$ в кристалле возбуждены только колебания с малыми частотами ν (т. е. существенны малые значения x). При больших частотах (бóльших x) подынтегральная функция обращается в нуль и соответствующие частоты не вносят никакого вклада в значение Z. Это оправдывает сделанное в предыдущем параграфе приближение — замену дискретного кристалла сплошной упругой средой, в которой возбуждены только колебания с малыми значениями ν.

При высоких температурах $T \gg \theta_c$ в пределе интеграла стоит малая величина. Поэтому в подынтегральной функции x заве-

домо мало, и ее можно разложить в ряд по степеням. В этом случае имеем

$$\ln(1-e^{-x}) \approx \ln x,$$

так что

$$\int\limits_0^{\theta_c/T} x^2 \ln(1-e^{-x})\,dx \approx \int\limits_0^{\theta_c/T} x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{\theta_c}{T}\right)^3 \ln\frac{\theta_c}{T} - \frac{1}{9}\left(\frac{\theta_c}{T}\right)^3. \tag{52,8}$$

Подставляя формулу (52,8) в (52,5), находим

$$\ln Z = -3N \ln\frac{\theta_c}{T} + N - \frac{9}{8} N\left(\frac{\theta_c}{T}\right). \tag{52,9}$$

С помощью выражений (52,7) и (52,9) можно найти термодинамические функции кристалла при высоких и низких температурах.

§ 53. Термодинамические функции кристалла

Вычислим прежде всего энергию и теплоемкость кристалла при низких температурах. При низких температурах ($T \ll \theta_c$) энергия равна

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{9}{8} Nk\theta_c + \frac{3\pi^4}{5} \frac{NkT^4}{\theta_c^3}. \tag{53.1}$$

Первый член в формуле (53,1) представляет энергию кристалла при $T \to 0$, т. е. нулевую энергию. Второй член показывает, что с повышением температуры энергия кристалла быстро (как T^4) растет с температурой.

Теплоемкость кристалла при низкой температуре дается формулой

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{12\pi^4 Nk}{5}\left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3. \tag{53,2}$$

Теплоемкость кристалла при низких температурах оказывается пропорциональной кубу абсолютной температуры.

Характерной особенностью выражений (53,1) и (53,2) является то, что в них входит материальная константа кристалла — его характеристическая температура θ_c. Поэтому при низких температурах различные кристаллы обладают разной теплоемкостью (тем меньшей, чем выше θ_c).

При высоких температурах ($T \gg \theta_c$) энергия и теплоемкость равны соответственно

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = 3NkT + \frac{9}{8} Nk\theta_c \approx 3NkT, \tag{53,3}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = 3Nk. \tag{53,4}$$

Как и следовало ожидать, значения E и C_V совпадают с полученными из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы. Они не зависят от материальных констант кристалла и являются универсальными величинами. Независимость энергии и теплоемкости от материальных констант обусловлена тем, что при достаточно высоких температурах энергия кристалла оказывается не зависящей от частот колебаний, имеющихся в кристалле. Последнее обстоятельство позволяет понять, почему формулы (53,3) и (53,4) оказываются правильными, несмотря на то, что они выведены на основе заведомо неправильного допущения. Действительно, при получении их считалось, что основную роль играют малые частоты (длинные волны), при которых дискретный кристалл может рассматриваться как сплошная упругая среда. При $T \gg \theta_c$ в кристалле наряду с низкими частотами должны быть возбуждены и высокие частоты, которые будут вносить заметный вклад в функцию состояний. Поэтому приближенный закон распределения частот (51,8) будет уже неприменим. Однако в классическом приближении, справедливом при достаточно высоких температурах, значение Z, а следовательно и энергии кристалла, вообще не зависит ни от самих частот, ни от характера их распределения.

В промежуточной области температур $T \approx \theta_c$ энергия и теплоемкость выражаются более сложными формулами, которые получаются при численном интегрировании в формуле (52,5). Поскольку ширина переходной области невелика, она не представляет особого интереса.

Напомним, что, хотя мы вычисляли теплоемкость при постоянном объеме, полученное выражение с большой степенью точности совпадает с теплоемкостью при постоянном давлении, так как в твердом теле обе теплоемкости практичекси совпадают.

Найдем теперь энтропию S кристалла. При низких температурах ($T \ll \theta_c$) из (53,1) и (52,7) находим

$$S = \frac{E}{T} + k \ln Z = \frac{4\pi^4}{5} Nk \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3. \tag{53,5}$$

При высоких температурах ($T \gg \theta_c$) из (53,3) и (52,9) получаем

$$S = \frac{E}{T} + k \ln Z = 3Nk \ln \frac{T}{\theta_c} + 4Nk. \tag{53,6}$$

Формула (53,6) совпадает с чисто термодинамическим выражением для энтропии, отличаясь только тем, что в нее не входит неопределенная постоянная энтропия. Формула (53,5) показывает, что энтропия атомного кристалла стремится к нулю при $T \to 0$, как куб температуры, что находится в полном согла-

сии с требованиями третьего начала термодинамики, точно так же как и убывание теплоемкости при $T \to 0$.

Найдем, наконец, свободную энергию и парциальный потенциал кристалла.

Из условий (52,7) и (52,9) получим

$$F = -kT \ln Z \approx -N \frac{\pi^4 kT}{5} \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3 + \frac{9Nk\theta_c}{8} \quad \text{при} \quad T \ll \theta_c, \qquad (53,7)$$

$$F \approx -3NkT \ln \frac{T}{\theta_c} - NkT \quad \text{при} \quad T \gg \theta_c. \qquad (53,8)$$

Исходя из свободной энергии, можно получить уравнение состояния кристалла, которое имеет вид при $T \gg \theta_c$:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -\frac{3NkT}{\theta_c} \frac{\partial \theta_c}{\partial V}.$$

Поскольку p оказывается выраженным через величину $\frac{\partial \theta_c}{\partial V}$, а последняя не может быть вычислена теоретически или найдена из достаточно простых экспериментов, уравнение состояния не имеет большого практического значения.

Интересно найти закон распределения уровней энергии в твердом теле, точнее, расстояние между уравнениями энергии. Если $\Omega(\varepsilon)$ — число уровней в единичном интервале энергий, то расстояние между соседними уровнями энергии равно, очевидно,

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{\Omega(\varepsilon)}.$$

С помощью формул (24.10) и (53,5) можно написать

$$D(\varepsilon) = e^{-\sigma} = e^{-\frac{S}{k}} = \exp\left\{-\frac{4\pi}{3} N \left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3\right\}.$$

С понижением температуры, а также уменьшением числа частиц расстояние между уровнями уменьшается. При T, весьма близких к абсолютному нулю, в соответствии со сказанным в § 35, расстояние оказывается равным kT даже для макроскопического тела.

§ 54. Сравнение теории с экспериментом

Для практического использования полученных выражений и сравнения вычисленных величин с опытными данными необходимо знать характеристическую температуру кристалла θ_c.

Из определения и формулы (51,10) находим

$$\theta_c = \frac{h\nu_{\text{макс}}}{k} = \frac{h}{k} \left(\frac{9N}{4\pi V}\right)^{1/3} \left(\frac{c_l^3 c_t^3}{2c_l^3 + c_t^3}\right)^{1/3}. \qquad (54,1)$$

В формулу (54,1) помимо числовых величин и универсальных постоянных входят две величины, определяющиеся свойствами кристалла: плотность N/V и скорость звука в кристалле. Эти величины измерены для многих кристаллов. Поскольку скорость звука согласно (50,15) обратно пропорциональна корню квадратному из массы атомов, она особенно велика у весьма твердых кристаллов, построенных из легких атомов. У подобных кристаллов характеристическая температура особенно высока.

В табл. 8 приведены характеристические температуры некоторых кристаллов. Из этой таблицы следует, что для кристаллов типа свинец — поваренная соль комнатная температура (300° К) и более высокие температуры (до 1000° К) являются сравнительно (хотя и не очень) высокими. Поэтому для подобных кристаллов отклонения от классических законов и, в частности, от классического значения теплоемкости в этой области не очень велики. Не совершив большой погрешности, можно считать их теплоемкость равной 6 *кал/моль*; однако при температурах ниже 100° К для всех этих кристаллов отклонение от последнего закона становится очень заметным.

Таблица 8

Кристалл	θ_c, °К	Кристалл	θ_c, °К	Кристалл	θ_c, °К
Pb	88	Ag	215	Al	398
J	106	NaCl . . .	281	Fe	453
Бензол . .	150	Cu	315	Алмаз . .	1860
Na	172	Be	1000		

Иначе обстоит дело в случае кристаллов с высокой характеристической температурой, особенно в случае алмаза. Для последнего комнатная температура является низкой и ни о какой применимости классических законов не может быть и речи. Теплоемкость алмаза уже при комнатной температуре следует закону T^3.

Измерения хода теплоемкости с температурой, проведенные для очень большого числа кристаллов, показали, что изложенная теория находится в очень хорошем согласии с экспериментом. При температурах $T \ll \theta_c$ теплоемкости действительно следуют закону T^3 и стремятся к нулю при $T \to 0$. При $T \approx \theta_c$ происходит постепенный переход к классическому (постоянному) значению теплоемкости. Полный ход кривой теплоемкости большого числа кристаллов представлен на рис. 64. Точками на кривой показаны измеренные значения теплоемкости различных кристаллов. Все они изображены в универсальной шкале T/θ_c. Согласие теории с экспериментом оказывается очень хорошим.

Нужно, однако, иметь в виду, что развитая грубая теория относится только к кристаллам, построенным из частиц, внутренней структурой которых можно пренебречь. Это означает, что мы можем не учитывать влияния температуры на состояние частиц. В большинстве случаев этому условию удовлетворяют кристаллы, построенные из атомов. В атомах расстояние между нормальным и первым возбужденным состояниями обычно велико по сравнению с kT и тепловое движение не может влиять на состояние атомов. Поэтому их внутреняя энергия не зависит

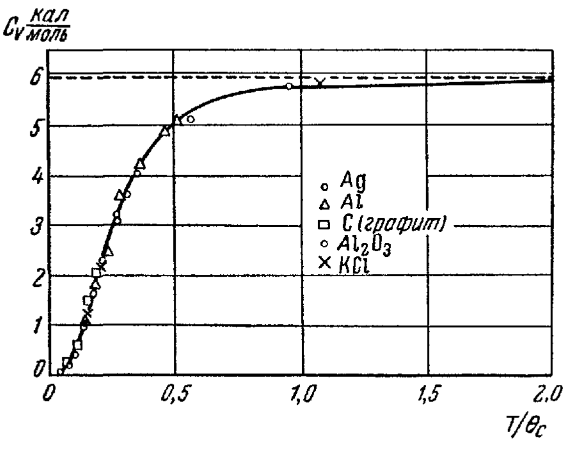


Рис. 64.

от температуры и они не могут давать вклада в теплоемкость. Однако у некоторых атомов нижние электронные уровни лежат очень близко друг к другу. Так, например, у ионов гадолиния, входящих в кристаллический сульфат гадолиния, нижний уровень энергии состоит из восьми подуровней, разделенных между собой на расстояния, отвечающие в температурной шкале характеристической температуре 1,6° К. При весьма низких температурах $T \approx 7°$ К, в соответствии с результатами § 40, появляется добавочная теплоемкость, налагающаяся на теплоемкость кристаллической решетки. Поскольку при столь низких температурах теплоемкость решетки весьма мала, рост теплоемкости имеет весьма резкий характер. При $T = 1{,}6°$ К теплоемкость почти в 500 раз превышает теплоемкость кристаллической решетки. При дальнейшем понижении температуры теплоемкость системы падает до нуля.

В случае кристаллов, построенных из сложных молекул, пренебречь внутренней структурой частиц, как правило, нельзя. В первом приближении можно пренебрегать влиянием

колебаний молекулы в кристаллической решетке на ее внутреннее тепловое движение. Молекула как целое колеблется в кристаллической решетке, тогда как внутри нее происходят колебания отдельных атомных групп. В некоторых случаях внутреннее движение молекулы представляет свободное вращение. Так, например, молекулы H_2 нужно считать свободно вращающимися в кристалле водорода. Одновременно с вращением молекулы H_2 участвуют в тепловых колебаниях решетки. Пренебрегая взаимодействием внутреннего движения в молекулах с движением молекулы как целого, можно написать полную энергию кристалла E в виде

$$E = E_{\text{реш}} + E_{\text{внутр}},$$

где $E_{\text{реш}}$ — средняя энергия колебаний решетки кристалла, а $E_{\text{внутр}}$ — средняя внутренняя энергия молекулы, вычисленная нами в гл. V. Соответственно теплоемкость кристалла можно представить в виде

$$C_V = C_{V_{\text{реш}}} + C_{V_{\text{внутр}}}.$$

Вклад внутреннего движения в теплоемкость в некоторых случаях может быть очень значительным. Так, например, теплоемкость внутримолекулярных колебаний в бензоле составляет около 20% от теплоемкости решетки при $T \approx 150°$ К и достигает 80% последней при $T \approx 270°$ К. Поэтому при вычислении теплоемкости сложных кристаллов необходимо учитывать вклад внутреннего движения, особенно при высоких температурах. Хорошее согласие изложенной теории с экспериментом оправдывает сделанные упрощения.

Однако в ряде случаев наблюдаются хотя и незначительные, но вполне реальные расхождения между теорией и экспериментом. При высоких температурах амплитуды колебаний становятся немалыми и пренебрежение квадратами смещений в выражении для квазиупругих сил уже не оправдано[1]). Колебательное движение теряет простой гармонический характер. Погрешность, возникающая в результате предположения об изотропии упругой среды, является сравнительно незначительной. Более существенной оказывается погрешность, возникающая от пренебрежения дискретным характером кристалла. Влияние распределения высоких частот, которым мы пренебрегали, определяя число нормальных колебаний кристалла, сказывается в том, что для твердых кристаллов характеристическая температура Θ_c оказывается не постоянной, а функцией темпе-

---

[1]) Заметим в связи с этим, что, как показывает расчет, кристалл, у которого силы были бы точно пропорциональны смещениям, имел бы коэффициент теплового расширения, равный нулю.

ратуры кристалла. Например, в случае лития ее значение изменяется от 330° К при температуре кристалла, равной 20° К, до 410° К при температуре 120° К. Сходное явление имеет место у алмаза. Все указанные погрешности столь незначительны, что они были отмечены только лишь в сравнительно недавнее время в связи с возросшей точностью измерений.

Нужно еще заметить, что существование аномалий при низких температурах, подобных тем, которые имеются у гадолиния, может привести к кажущимся противоречиям с третьим началом термодинамики. Обычно значение теплоемкости при $T \to 0$ находится экстраполяцией от значений, измеренных при более высоких температурах. Если эта экстраполяция производится от некоторой температуры, лежащей выше температуры, при которой происходит возрастание теплоемкости, то возникает существенная погрешность. Значение $\int\limits_0^T \frac{C_V\,dT}{T}$, полученное из экстраполяции, может заметно отличаться от экспериментального значения энтропии при высокой температуре, найденного из других данных. Поэтому для нахождения правильных значений термодинамических функций желательно доведение измерений теплоемкости до возможно более низких температур.

ГЛАВА VIII

ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ

§ 55. Малые флуктуации в макроскопических системах

В предыдущем изложении мы неоднократно указывали на различие между статистическими и чисто термодинамическими представлениями о ходе тепловых процессов. Из законов статистической физики с неизбежностью вытекает существование флуктуаций. Система, испытывающая флуктуацию, может самопроизвольно перейти из более вероятного в одно из менее вероятных состояний. При этом ход процесса является обратным тому, при котором происходит возрастание энтропии.

Вероятность флуктуаций в замкнутой системе может быть вычислена с помощью формулы Больцмана. Простые оценки, произведенные с помощью этой формулы, а также общие соображения, изложенные в § 36, показывают, что вероятность сколько-нибудь заметных флуктуаций в системе, содержащей большое число частиц, чрезвычайно мала. Явление флуктуаций практически может наблюдаться в двух случаях: 1) когда размеры системы достаточно малы; в этом случае флуктуации будут происходить часто и масштаб их будет относительно велик; 2) когда размеры системы не малы, но фиксируются достаточно малые флуктуации. Такие малые флуктуации также будут происходить часто, но отклонение системы от состояния равновесия будет сравнительно мало. В этой главе мы рассмотрим оба случая флуктуаций.

Для того чтобы правильно оценить роль, которую сыграли исследования флуктуаций в развитии молекулярно-статистических представлений, необходимо иметь в виду, что существование флуктуаций было предсказано теоретически в то время, когда второе начало термодинамики многим казалось одной из догм в физике. Представители так называемой школы энергетиков вообще отрицали существование материальных атомов и молекул. Статистическая физика, в которой законы классической механики объединялись со статистическими законами, казалась внутренне противоречивой и была принята многими

физиками с большим недоверием. Поэтому открытие многочисленных примеров флуктуационных процессов явилось блестящим подтверждением законов статистической физики и послужило одним из важнейших моментов в окончательном утверждении молекулярной теории. В работах Эйнштейна и Смолуховского было показано, что целый ряд давно известных физических процессов обусловлен явлениями флуктуаций, и была развита количественная теория этих процессов, оказавшаяся в прекрасном согласии с экспериментальными фактами. Лучше всего значение этих открытий можно охарактеризовать словами самого Смолуховского[1]):

«В настоящее время мы не относимся с таким почтением, как ранее, к догмам в физике. Произошли огромные изменения в процессе о значении кинетической атомистики и термодинамики. Они связаны с тем, что лишь в последнее время на основе кинетической теории удалось дать объяснение давно известным фактам, например, броуновскому движению, открытому еще в 1827 году, явлению критической опалесценции, открытому более 20 лет назад, общеизвестному факту синей окраски неба и т. д. То новое, с чем мы встречаемся в этих объяснениях и что находится в противоречии с повседневными установившимися представлениями, заключается в том, что в них вполне серьезно учитывается максвелловский закон распределения скоростей. В результате в них впервые теплота рассматривается как процесс движения, тогда как раньше это представление о природе тепла считалось обычно своего рода поэтическим сравнением».

Мы начнем рассмотрение процессов флуктуаций со второго случая, т. е. со случая систем, размеры которых достаточно велики.

Ниже мы изложим общую теорию малых флуктуаций, происходящих в произвольной макроскопической системе. Возьмем некоторую замкнутую систему, находящуюся в состоянии статистического равновесия и имеющую энтропию S_0. Предположим теперь, что состояние системы изменяется так, что она переходит в неравновесное состояние, в котором ее энтропия равна S. Мы будем считать, что изменение состояния системы можно характеризовать изменением некоторого внутреннего параметра ξ, значение которого зависит от состояния всей системы. В состоянии равновесия параметр ξ имеет значение $\xi = \xi_0$, в неравновесном состоянии его значение отлично от ξ_0.

В качестве примера параметра ξ можно привести плотность ρ газа, находящегося в замкнутом, теплоизолированном сосуде. В состоянии равновесия плотность постоянна по всему объему сосуда, т. е. $\xi_0 = \rho_0 = \mathrm{const}$. В результате флуктуации

---

[1]) M. Smoluchowski, Phys. Zs. 13, 1059, 1912.

система может самопроизвольно перейти в неравновесное состояние с переменной плотностью $\xi=\rho(x)$. Другие примеры будут разобраны в дальнейшем.

Энтропия системы будет некоторой функцией параметра ξ, так что можно написать $S = S(\xi)$. При этом в состоянии равновесия $S_0 = S(\xi_0)$. Вероятность того, что рассматриваемая замкнутая система попадет в состояние, характеризуемое значением параметра ξ, лежащим в интервале между ξ и $\xi + d\xi$, можно найти с помощью формулы Больцмана:

$$dw = \text{const} \cdot e^{\frac{S(\xi)-S(\xi_0)}{k}} d\xi = \text{const} \cdot e^{\frac{\Delta S}{k}} d\xi, \qquad (55,1)$$

где постоянная определяется условием нормирования[1]). Величина изменения энтропии является, очевидно, отрицательной.

Приложения формулы (55,1) к конкретным случаям флуктуаций будут рассмотрены в следующем параграфе. Формула (55,1) применима к флуктуациям в системе с постоянной энергией.

Очень часто, однако, приходится рассматривать флуктуации, происходящие не в замкнутой, а в квазизамкнутой системе, составляющей малую часть замкнутой системы. Такую квазизамкнутую систему можно считать некоторой подсистемой, погруженной в термостат с постоянной температурой T_0. Мы будем считать, что флуктуации происходят только в подсистеме. Термостат при этом может совершать квазистатический процесс, не нарушающий его равновесия. Состояние подсистемы будет характеризоваться значением некоторого внешнего параметра λ. При переходе из равновесного состояния в неравновесное параметр λ изменяется от λ_0 до λ. При изменении λ изменяются также значения термодинамических величин, характеризующих подсистему. Мы будем предполагать, что изменения макроскопического параметра λ происходят достаточно медленно, так что в каждый данный момент в подсистеме будет существовать равновесное статистическое распределение. При этом можно считать, что термодинамические величины в подсистеме связаны между собой обычными равновесными соотношениями. Процесс перехода из равновесного в неравновесное состояние у подсистемы, погруженной в термостат, можно рассматривать как переход, совершающийся под действием некоторого внешнего источника работы. При изменении параметра λ на величину $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ источник совершает над подсистемой работу $\Delta W(\lambda)$.

---

[1]) Строго говоря, постоянная в (55,1) также зависит от параметра ξ. Можно, однако, показать, что в системе, содержащей достаточно большое число частиц, зависимость от ξ множителя, стоящего перед экспонентой, не играет роли по сравнению с зависимостью экспоненты.

Напишем теперь выражение для вероятности того, что подсистема перейдет в состояние со значением λ между λ и $\lambda+\Delta\lambda$, в то время как термостат останется в равновесном состоянии. Поскольку термостат и подсистема вместе составляют замкнутую систему, к ним применима формула (55,1). В ней, однако, изменение энтропии нужно написать в виде

$$\Delta S = \Delta S_0 + \Delta S',$$

где $\Delta S'$ — изменение энтропии подсистемы. Тогда вероятность того, что подсистема перейдет в состояние с λ в интервале λ, $\lambda + d\lambda$ под влиянием внешнего источника работы, дается формулой

$$dw = \text{const} \cdot e^{\frac{\Delta S_0 + \Delta S'}{k}} \, d\lambda. \tag{55,2}$$

Но в силу нашего предположения о медленности изменения макроскопических параметров для $\Delta S'$ можно написать обычное равновесное выражение:

$$\Delta S' = \frac{\Delta E' + p_0 \Delta V' - \Delta W}{T_0}, \tag{55,3}$$

где T_0 и p_0 — равновесные температура и давление системы (равные соответствующим величинам термостата), E' и V' — энергия и объем подсистемы. (В последней формуле ясно видно, что ΔW представляет работу, совершенную внешним источником, но не термостатом. Работа, совершаемая термостатом, равна $-p_0\Delta V'$.) Далее,

$$\Delta S_0 = \frac{\Delta E_0 + p_0 \Delta V_0}{T_0}.$$

Но в силу замкнутости системы (термостат+подсистема) полный объем системы остается постоянным, так что

$$\Delta V_0 = -\Delta V'.$$

Закон сохранения энергии дает

$$\Delta E' + \Delta E_0 = 0,$$

поэтому

$$\Delta S_0 = -\Delta S' - \frac{\Delta W(\lambda)}{T_0}. \tag{55,4}$$

Подставляя (55,4) в (55,2), находим

$$dw = \text{const} \cdot e^{-\frac{\Delta W(\lambda)}{kT_0}} \, d\lambda. \tag{55,5}$$

Таким образом, в самом общем случае можно сказать, что мерой вероятности малых флуктуаций в макроскопической системе является та работа, которую нужно над нею совершить

для изменения параметра λ, характеризующего состояние системы, на величину $\Delta\lambda$. Это не означает, однако, что система может испытывать флуктуацию только тогда, когда над ней производится реальная работа извне. Это особенно ясно видно на примере замкнутой системы, над которой вообще не совершается никакой работы. Работа ΔW является лишь количественной характеристикой флуктуации. Работу ΔW можно представить как изменение потенциальной энергии при перемещении системы в некотором воображаемом (а иногда и реальном) поле сил. Обозначая потенциал этого поля сил через $u(\lambda)$, имеем

$$\Delta W = u(\lambda) - u(\lambda_0) = u(\lambda),$$

если $u(\lambda_0)$ выбрать за уровень отсчета потенциальной энергии. При этом формулу (55,5) можно написать в виде

$$dw = \text{const} \cdot e^{-\frac{u(\lambda)}{kT_0}}\, d\lambda = w(\lambda)\, d\lambda. \tag{55,6}$$

Мы приходим, таким образом, к формуле, являющейся аналогом формулы Больцмана. В дальнейшем мы увидим, что эта аналогия имеет вполне ясный смысл.

Для вычисления вероятности флуктуации по формулам (55,5) или (55,6) нужно в каждом отдельном случае найти работу или изменение потенциальной энергии в процессе флуктуации. При этом в силу малости флуктуаций выражение для $u(\lambda)$ можно разложить в ряд по степеням малого параметра $(\lambda - \lambda_0)$ и ограничиться первыми членами разложения:

$$u(\lambda) = u'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + u''(\lambda_0)\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2} + \ldots,$$

где штрихами обозначены производные по λ. В состоянии равновесия потенциальная энергия поля должна иметь минимум, так что

$$u'(\lambda_0) = 0 \quad \text{и} \quad u''(\lambda_0) > 0.$$

Поэтому распределение вероятностей (55,6) можно представить в виде

$$dw = \text{const} \cdot e^{-\frac{u''(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^2}{2kT_0}}\, d\lambda. \tag{55,7}$$

Распределение вероятностей (55,7) носит название распределения Гаусса. Значение постоянной $u''(\lambda_0)$ зависит от природы того реального или фиктивного поля сил, в котором происходит «перемещение» системы из положения λ_0 в положение λ. С помощью распределения вероятностей малых флуктуаций (55,7)

можно найти среднее значение флуктуации параметра λ:

$$\Delta^2 = \overline{(\lambda - \lambda_0)^2} = \text{const} \int (\lambda - \lambda_0)^2 e^{-\frac{u''(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2}{2kT_0}} d\lambda.$$

Постоянная в (55,7) определяется условием нормирования

$$\text{const} = \frac{1}{\int e^{-\frac{u''(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2}{2kT_0}} d\lambda}.$$

Таким образом,

$$\Delta^2 = \frac{\int (\lambda - \lambda_0)^2 e^{-\frac{u''(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2}{2kT_0}} d\lambda}{\int e^{-\frac{u''(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^2}{2kT_0}} d\lambda}. \tag{55,8}$$

Флуктуации параметра λ происходят в обе стороны от значения его в равновесном состоянии. Поскольку подынтегральная функция в интегралах в числителе и знаменателе выражения (55,8) быстро убывает с увеличением абсолютной величины разности $(\lambda - \lambda_0)$, интегрирование можно вести в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, аналогично тому, как это делалось нами при нормировании распределения Максвелла.

Итак, окончательно,

$$\Delta^2 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 e^{-\frac{u''(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2}{2kT_0}} d\lambda}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u''(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2}{2kT_0}} d\lambda} = \frac{kT_0}{u''(\lambda_0)}. \tag{55,9}$$

С помощью формулы (55,9) распределение вероятностей (55,7) можно написать в виде

$$dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2\Delta^2}} d\lambda.$$

Вероятность данной флуктуации резко уменьшается с ростом ее величины, а также с уменьшением Δ^2. Последняя величина пропорциональна абсолютной температуре. Поэтому можно утверждать, что интенсивность флуктуаций уменьшается с падением температуры[1]).

В следующих параграфах найденные общие соотношения будут применены к конкретным случаям малых флуктуаций в макроскопических системах.

---

[1]) Об исключении из этого правила см. В. Г. Левич, Введение в статистическую физику, Гостехиздат, 1954, § 63.

§ 56. Броуновское движение

В качестве первого случая, когда явления флуктуации оказываются легко доступными наблюдению, рассмотрим так называемое броуновское движение. Броуновским движением называют наблюдающееся под микроскопом непрерывное хаотическое движение малых частиц, взвешенных в жидкости или в газе.

Полная количественная теория броуновского движения, не только объяснившая его природу, но и позволившая предсказать ряд его характерных особенностей, была развита в работах Эйнштейна и Смолуховского (1905—1906 гг.). Исследования броуновского движения сыграли важнейшую роль в торжестве молекулярно-кинетической теории, поскольку именно броуновское движение было первым физическим процессом, в котором существование молекул обнаруживалось самым непосредственным и наглядным образом. Значение и важность теории броуновского движения отнюдь не ограничиваются историческим интересом. Наоборот, именно в сравнительно недавнее время ряд случаев броуновского движения приобрел особую актуальность в связи с созданием новых, весьма точных измерительных приборов (см. § 58).

Переходя к разбору теории броуновского движения, рассмотрим макроскопическую частицу, взвешенную в объеме жидкости или газа, и попытаемся найти силы, действующие на нее со стороны молекул среды. Молекулы среды находятся в непрерывном тепловом движении. Поэтому о поверхность частицы будут непрерывно ударять молекулы жидкости или газа, в который погружена частица, и передавать ей при каждом ударе соответствующий импульс. Иными словами, молекулы среды будут оказывать давление на поверхность частицы. Удары молекул о поверхность частицы происходят совершенно беспорядочно, со всех сторон. Если размеры поверхности частицы достаточно велики, так что за очень короткий промежуток времени о нее ударяет большое число молекул, то можно считать, что импульсы, передаваемые частице со всех сторон, в среднем уравновешиваются. Иначе дело обстоит в случае очень малых частиц (размером порядка 10^{-4} *см*). Такие частицы содержат еще огромное число молекул и являются макроскопическими телами. Тем не менее поверхность таких частиц столь мала, что за короткое время она получает сравнительно малое количество молекулярных толчков. Равнодействующая сил, действующих со стороны молекул среды на поверхность частицы, оказывается отличной от нуля. В результате частица придет в беспорядочное движение, направление и скорость которого будут изменяться с очень большой частотой (порядка 10^{12} раз в секунду).

Характер этих смещений передает рис. 65, на котором представлено положение частицы, фиксированное каждые 30 *сек*. Сторона клетки отвечает расстоянию $3 \cdot 10^{-4}$ *см*. При этом число молекул, ударяющих о частицу, и передаваемый ими импульс будут испытывать большие флуктуации. Таким образом, броуновское движение обусловлено флуктуациями давления, оказываемого молекулами среды на взвешенную в ней частицу. Хотя ее движение непосредственно не является молекулярным движением, оно служит своего рода индикатором молекулярного движения. Как мы неоднократно подчеркивали, явления флуктуаций противоречат положениям чистой термодинамики. Это можно проиллюстрировать особенно наглядно на примере броуновского движения.

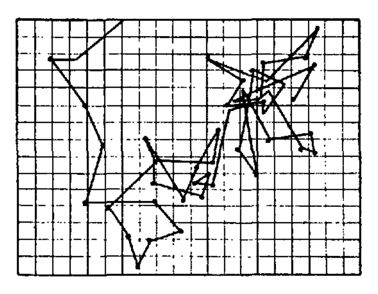


Рис. 65.

Самый факт непрерывности и неуничтожаемости броуновского движения указывает на непрерывное нарушение требований второго начала термодинамики. Действительно, если бы частица, находящаяся в среде, получила единичный импульс от какого-либо внешнего источника, то ее движение было бы быстро заторможено в результате потери энергии на вязкое трение. Поэтому неуничтожаемость броуновского движения свидетельствует о существовании процессов, обратных процессам вязкого трения и идущих с убылью энтропии. Для поддержания движения частица непрерывно черпает энергию из окружающей ее среды, что прямо противоречит второму началу термодинамики.

Для построения количественной теории броуновского движения мы можем воспользоваться общими соотношениями, выведенными в предыдущем параграфе.

Пусть в некоторой среде, жидкости или газе, взвешена очень маленькая, но макроскопическая частица с массой μ. Предположим, что положение этой частицы характеризуется некоторым параметром (обобщенной координатой) λ. Таким параметром может являться, например, расстояние частицы до некоторой плоскости сосуда, которая выбрана за начало отсчета расстояний (другие примеры будут даны ниже). На частицу будет действовать со стороны среды быстро и беспорядочно изменяющаяся во времени сила, обусловленная флуктуациями теплового движения молекул среды. Под действием этой флуктуационной силы, которую мы для краткости будем называть броуновской, частица будет испытывать весьма малые смещения, так что

значение ее параметра λ будет постоянно изменяться на весьма малые величины $\Delta\lambda$.

Вместо того чтобы следить за движением одной частицы во времени, можно, следуя Эйнштейну, рассмотреть множество одинаковых частиц, испытывающих броуновские смещения, и найти количество частиц, проходящих через некоторую воображаемую поверхность в среде.

Обозначим через $c(\lambda)$ число частиц в единице объема, находящихся на расстоянии λ, $\lambda+d\lambda$ от поверхности $\lambda=0$.

Пусть $\Delta=\sqrt{\overline{(\Delta\lambda)^2}}$ означает среднее квадратичное смещение частиц за некоторое малое время τ. Тогда через 1 $см^2$ воображаемой поверхности, проведенной в растворе, за время τ пройдет в среднем $\left\{\frac{c\left(\lambda-\frac{\Delta}{2}\right)}{2}\right\}\Delta$ частиц, движущихся слева направо. Аналогично, двигаясь в обратную сторону, через эту поверхность пройдет за то же время $\left\{\frac{c\left(\lambda+\frac{\Delta}{2}\right)}{2}\right\}\Delta$ частиц. В результате через 1 $см^2$ воображаемой поверхности пройдет число частиц

$$N=j\tau=\left\{\frac{c\left(\lambda-\frac{\Delta}{2}\right)}{2}-\frac{c\left(\lambda+\frac{\Delta}{2}\right)}{2}\right\}\Delta, \qquad (56,1)$$

где j — поток частиц.

Считая Δ малым, а $c(\lambda)$ — медленно изменяющейся функцией координаты λ, можем написать

$$N\approx-\frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial c}{\partial\lambda}$$

или

$$j=-\frac{\Delta^2}{2\tau}\frac{\partial c}{\partial\lambda}. \qquad (56,2)$$

Поток вещества пропорционален градиенту его концентрации и направлен в сторону ее уменьшения. Коэффициент пропорциональности $\Delta^2/2\tau$ называется коэффициентом диффузии D:

$$D=\frac{\Delta^2}{2\tau}. \qquad (56,3)$$

Таким образом, среднее квадратичное смещение частицы оказывается равным

$$\Delta^2=\overline{(\Delta\lambda)^2}=2D\tau. \qquad (56,4)$$

Средний путь, проходимый частицей, оказывается пропорциональным корню из времени наблюдения за ней τ.

Коэффициент диффузии D может быть выражен через температуру и физико-химические постоянные среды. Именно, предположим, что, помимо градиента концентрации, поток частиц создается также вследствие внешней силы f, действующей на каждую из частиц.

Под действием силы f малая частица, находящаяся в вязкой среде, движется со скоростью u, которая при стационарном движении равна

$$u = bf = \frac{f}{C\eta a}, \tag{56,5}$$

где $b = (C\eta a)^{-1}$ — величина, именуемая подвижностью частицы, a — ее радиус, η — вязкость среды и C — числовой коэффициент, равный для сферических частиц 6π. Формула (56,5) носит название формулы Стокса. Простой расчет показывает, что время установления стационарного движения для мелких частиц весьма мало́.

Полный поток вещества может быть написан в виде

$$j = -D\frac{\partial c}{\partial \lambda} + uc \tag{56,6}$$

или

$$j = -D\frac{\partial c}{\partial \lambda} + bfc = -D\frac{\partial c}{\partial \lambda} - bc\frac{\partial U}{\partial \lambda}, \tag{56,7}$$

где U — потенциальная энергия, отвечающая силе f.

Предположим теперь, что поток частиц, вызываемый внешним полем, равен по величине и противоположен по направлению потоку частиц, создаваемому градиентом концентрации. Тогда полный поток частиц j обращается в нуль. При этом распределение концентрации частиц определяется условием

$$-D\frac{\partial c}{\partial \lambda} - bc\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0$$

или

$$c = c_0 e^{-\frac{bU}{D}}. \tag{56,8}$$

С другой стороны, нам известно, что во внешнем поле частицы, не взаимодействующие между собой, распределены по Больцману и

$$c = c_0 e^{-\frac{U}{kT}}. \tag{56,9}$$

Сравнивая последние выражения, мы находим

$$D = bkT. \tag{56,10}$$

Таким образом, коэффициент диффузии частиц связан с их подвижностью универсальной формулой (56,10), которая для сферических частиц приобретает вид

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \qquad (56,11)$$

Подставляя значение D из (56,11) в (56,4), находим

$$\Delta = \sqrt{\overline{(\Delta\lambda)^2}} = \sqrt{\frac{kT}{3\pi\eta a}}\sqrt{\tau}. \qquad (56,12)$$

Таким образом, средний путь, проходимый частицами, растет с температурой среды.

Все величины, входящие в формулу (56,12), известны или могут быть измерены. Следует отметить, что из формулы (56,12) в свое время было определено значение постоянной Больцмана k. О точности совпадения этих формул с экспериментом можно судить по тому факту, что в 1910—1915 гг. значение числа Авогадро $N = \frac{R}{k}$, найденное из измерений броуновского движения ($N = 6{,}44 \cdot 10^{23}$), считалось одним из наиболее точных значений этой величины.

Опыты с броуновским движением позволили непосредственно и наглядно продемонстрировать еще один важный вывод статистической механики. Речь идет об утверждении относительно принципиальной обратимости молекулярных процессов. Опыты состояли в наблюдении за числом броуновских частиц, находящихся в резко ограниченном (например, путем соответствующего освещения) поле наблюдения под микроскопом. Благодаря броуновскому движению частицы будут входить в поле наблюдения и выходить из него в неосвещенную часть раствора. Предположим, что в какой-то момент времени концентрация броуновских частиц в поле наблюдения оказалась выше, чем в остальном растворе. Согласно второму началу термодинамики при этом должно происходить выравнивание концентраций путем диффузии частиц из освещенного в неосвещенный объем. После окончательного выравнивания концентраций в системе должно установиться полное равновесие, которое не должно нарушаться в дальнейшем. С точки зрения статистической физики явление должно было бы протекать совершенно иначе. Число частиц в достаточно малом объеме должно было бы увеличиваться и уменьшаться одинаково часто, так что понятие диффузии и выравнивания концентрации потеряло бы всякий смысл. По прошествии времени возврата τ^* число частиц, первоначально равное, скажем, n, должно было бы вернуться к этому же значению. Длительность времени возврата была вычислена Смолуховским. Как мы уже говорили, она резко воз-

растает с размерами системы, в данном случае с величиной числа n. Результаты наблюдений сведены в табл. 9 и 10.

Таблица 9

Наблюдаемая частота изменения числа частиц $n \to m$ в поле зрения

n	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
0	210	126	35	7	0	1	—
1	134	281	117	29	1	1	—
2	27	138	108	63	16	3	—
3	10	20	76	38	24	6	0
4	2	2	14	22	13	11	3
5	—	0	2	10	10	1	3

В первой из них приведена частота изменения числа частиц в области наблюдения. Через n обозначено число частиц в этом объеме при первом наблюдении, через m — число частиц при последующем наблюдении. Частота перехода $n \to m$ означает число случаев, при которых имела место замена n на m. Например, цифра 27 в третьей строке второй колонки означает, что в 27 случаях число частиц, бывшее при первом наблюдении равным двум, при втором наблюдении уменьшилось до нуля. Среднее число частиц, которое должно было бы находиться в поле зрения, составляло $\bar{n} = 1{,}43$. Измерения производились через промежуток времени $\Delta t = 1{,}39$ *сек.*

Таблица 10

Среднее время возврата

Время наблюдения	$\tau^*_{(\text{наблюд})}$	$\tau^*_{(\text{вычисл})}$
0	6,1	5,5
1	3,1	3,2
2	4,1	4,0
3	7,8	8,1
4	18,6	20,9

Анализ цифр табл. 9 сразу указывает на правильность статистической точки зрения и может служить непосредственной иллюстрацией рассуждений § 25. Действительно, согласно положениям термодинамики мы должны были бы ожидать постоянного уменьшения числа частиц ($m < n$) в случае, когда первоначальное значение $n > \bar{n}$, и увеличения числа частиц в обратном случае. Ничего похожего в табл. 9 не обнаруживается. Наоборот, при $n > \bar{n}$ в последующих наблюдениях очень часто

обнаруживается еще большее число частиц. Так, при $n = 3$ в 106 случаях при втором наблюдении обнаруживается меньшее ($m = 0, 1, 2$) число частиц, а при 68 наблюдениях — большее или равное число частиц ($m = 3, 4, 5$).

Из табл. 9 видно, что при малом числе частиц числа, стоящие по обе стороны от главной диагонали, практически равны между собой. Например, частота перехода от $n = 3$ к $m = 0$ составляет 10. Частота перехода от $n = 0$ к $m = 3$ равна 7. Частота перехода от $n = 2$ к $m = 4$ равна 16, от $n = 4$ к $m = 2$ равна 14 и т. д. Это означает, что процесс броуновского движения имеет строго обратимый характер. Флуктуации происходят так часто, что не обнаруживается никакого систематического хода их со временем. Если, однако, число частиц n оказывается значительным, так что масштаб флуктуации велик, то в соответствии с рассуждениями § 25 можно ожидать рассасывания флуктуации. В этом случае наиболее вероятный ход процесса совпадает с предсказываемым термодинамикой: чаще всего частицы будут удаляться (диффундировать) из зоны наблюдения, и число частиц в ней должно в большинстве случаев уменьшаться.

Из табл. 9 видно, что при $n = 5$ (такое n уже довольно существенно превышает $\bar{n}$) в 22 случаях происходит уменьшение числа частиц и лишь в четырех случаях оно увеличивается или остается постоянным. Если бы число частиц n было очень велико и намного превышало среднее значение $\bar{n}$, то уменьшение его происходило бы уже в подавляющем большинстве случаев. Возникла бы необратимость процесса.

Не менее убедительно выглядят данные табл. 10. В ней указаны вычисленные и наблюденные времена возврата числа частиц в поле наблюдения (в единицах $\Delta t = 1{,}39$ *сек*) для взвеси со средним числом частиц $\bar{n} = 1{,}55$. Из таблицы видно, что по прошествии промежутков времени τ^*, хорошо согласующихся с теоретически вычисленными, число частиц, первоначально обнаруженных в поле наблюдения, вновь восстанавливается. Время возврата резко возрастает с величиной отклонения n от $\bar{n}$, так что большие флуктуации повторяются весьма редко (см. также табл. 9). Все эти факты убедительно свидетельствуют о правильности молекулярно-статистической точки зрения.

§ 57. Флуктуации термодинамических величин в однородной системе

Рассмотрим теперь флуктуации термодинамических величин, относящихся к системе, погруженной в термостат.

Количественной мерой вероятности флуктуации является работа, которую нужно произвести над подсистемой для того,

чтобы перевести ее из начального, равновесного, в конечное, флуктуационное состояние.

Ввиду малости флуктуаций переход можно считать обратимым.

Работа обратимого перехода для системы, погруженной в среду, выражается общей термодинамической формулой (28,7):

$$\Delta W = \Delta E - T_0 \Delta S + p_0 \Delta V, \qquad (57,1)$$

где ΔE, ΔS и ΔV — изменения соответствующих величин при переходе из начального в конечное состояние. Конкретное выражение работы ΔW можно получить для различных частных случаев процесса.

Мы ограничимся вычислением работы для флуктуаций объема при постоянной температуре и флуктуаций температуры при постоянном объеме.

Рассмотрим прежде всего флуктуации объема при постоянной температуре ($T = T_0 = \text{const}$).

Работа изотермического изменения объема при постоянной температуре равна

$$\Delta W = \Delta E - \Delta (TS) + p_0 \Delta V = \Delta F + p_0 \Delta V. \qquad (57,2)$$

Подчеркнем, что формула (57,2) показывает, что работа ΔW представляет работу, совершаемую над подсистемой внешним источником работы (но не средой).

При малом изотермическом изменении объема ΔV свободную энергию в формуле (57,2) можно разложить в ряд по степеням ΔV, переписав ее в виде

$$\Delta W = p_0 \Delta V + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2} + \ldots \approx$$

$$\approx p_0 \Delta V - p \Delta V - \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2}. \qquad (57,3)$$

Поскольку процесс можно считать квазистатистическим, в процессе флуктуации равновесное давление в подсистеме можно считать равным давлению в среде. Поэтому находим окончательно

$$\Delta W = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2}. \qquad (57,4)$$

Подставляя (57,4) в формулу (55,5), находим вероятность того, что объем V системы лежит между V и $V + dV$:

$$dw = \text{const} \cdot e^{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \frac{\Delta V^2}{2kT}} dV. \qquad (57,5)$$

Постоянная находится из условия нормирования:

$$\text{const}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\cdot\frac{(\Delta V)^2}{2kT}}\,dV = 1. \tag{57,6}$$

Из формул (57,5) и (57,6) вытекает, что производная $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ должна быть отрицательна. Если бы это условие оказалось невыполненным, вероятность флуктуации не убывала бы, а возрастала с ее масштабом. В таком веществе происходили бы флуктуации объема, в результате которых объем системы неограниченно возрастал или уменьшался до нуля. Вещество находилось бы в неустойчивом состоянии. Таким образом, условие устойчивости состояний однородного вещества дается формулой

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0. \tag{57,7}$$

Если условие (57,7) выполнено, интеграл (57,6) без труда может быть вычислен. Тогда

$$\text{const} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2\pi kT}{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|}}}.$$

Нормированное распределение вероятностей изотермических флуктуаций объема имеет вид

$$dw = \sqrt{\frac{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|}{2\pi kT}}\exp\left\{-\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|\frac{(V-V_0)^2}{2kT}\right\}dV. \tag{57,8}$$

Найдем с помощью распределения вероятностей (57,8) среднюю квадратичную флуктуацию объема $\overline{(\Delta V)^2} = \overline{(V-V_0)^2}$. Очевидно, имеем

$$\overline{(\Delta V)^2} = \overline{(V-V_0)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|}{2\pi kT}}\int_{-\infty}^{\infty}(V-V_0)^2 e^{-\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|\frac{(V-V_0)^2}{2kT}}\,dV = \frac{kT}{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|}. \tag{57,9}$$

Вводя значение $\overline{(\Delta V)^2}$ в распределение (57,8), можно переписать его в более компактном виде:

$$dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{(\Delta V)^2}}}\,e^{-\frac{(V-V_0)^2}{2\overline{(\Delta V)^2}}}\,dV. \tag{57,10}$$

Из формул (57,9) и (57,10) следует, что масштаб и вероятность флуктуаций растут с повышением температуры вещества, а также с увеличением изотермической сжимаемости.

Применим формулу (57,9) к случаю идеального газа:

$$\overline{(\Delta V)^2} = \frac{kT}{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|} = \frac{V^2 kT}{NkT} = \frac{V^2}{N}. \tag{57,11}$$

В дальнейшем нас будет интересовать значение средней квадратичной флуктуации плотности $\rho = \frac{1}{v_0} = \frac{m}{V}$ (где m — масса, заключенная в объеме V, в котором происходит флуктуация). Имеем

$$\overline{(\Delta\rho)^2} = m^2 \overline{\left(\Delta \frac{1}{V}\right)^2} = \frac{m^2}{V^4}\overline{(\Delta V)^2} = \frac{m^2}{V^2}\frac{kT}{V^2\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|} = \frac{\rho^2}{V} kT\gamma_T,$$

где γ_T — изотермическая сжимаемость. Относительная флуктуация плотности в объеме V равна

$$\overline{\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^2} = \frac{kT\gamma_T}{V}. \tag{57,12}$$

Найдем также флуктуацию числа частиц, находящихся в заданном объеме. Величина $(\Delta V)^2$ представляет среднюю квадратичную флуктуацию объема V системы, в котором содержится N частиц. Флуктуация объема, приходящегося на одну частицу V/N, равна

$$\overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} = \frac{kT}{N^2\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|}.$$

Считая объем V фиксированным, находим флуктуацию числа частиц в этом объеме:

$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{N^2 kT}{V^2}\frac{1}{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|}. \tag{57,13}$$

В частности, для идеального газа

$$\overline{(\Delta N)^2} = N. \tag{57,14}$$

Независимость флуктуации числа частиц в данном объеме от температуры в идеальном газе связана с тем, что в идеальном газе движение каждой частицы происходит независимо от движения остальных частиц. С ростом температуры в идеальном газе растет лишь средняя квадратичная скорость, но самый характер движения не изменяется.

Формулы (57,8) и (57,9) теряют смысл в том случае, когда изотермическая сжимаемость обращается в бесконечность $\left(\text{а производная } \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \text{ — в нуль}\right)$. Формальное применение формулы (57,9) приводит к абсурдному результату — бесконечно большой флуктуации объема. В действительности, однако, при обращении в нуль производной $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ изменяется выражение (57,4) для работы ΔW, на котором основан вывод формулы (57,9). Разложение (57,3) должно быть продолжено, так что вместо (57,3) нужно написать

$$\Delta W \approx p_0 \Delta V + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial V^3}\right)_T \frac{(\Delta V)^3}{6} + \ldots \approx$$
$$\approx p_0 \Delta V - p\Delta V - \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2} - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T \frac{(\Delta V)^3}{6}. \quad (57,15)$$

Предположим, что вторая производная $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T$ отлична от нуля. Тогда, опуская в (57,15) бесконечно малые старшего порядка, можно написать

$$\Delta W = -\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T \cdot \frac{(\Delta V)^3}{6}. \quad (57,16)$$

Подставляя (57,16) в условие нормирования (57,6), мы видим, что оно не может быть удовлетворено ни при каком значении постоянной $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T$. Это означает, что сделанное предположение о том, что при $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$ может быть выполнено условие $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T \neq 0$, приводит к противоречию.

Отсюда видно, что если $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$, то одновременно должно быть выполнено и условие

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0. \quad (57,17)$$

Совокупность этих двух условий определяет положение критической точки (см. § 64).

В критической точке вероятность флуктуации плотности оказывается значительно большей, чем в обычном состоянии веществ, так как здесь работа изотермического изменения объема весьма мала.

Необходимо, однако, подчеркнуть, что для нахождения количественного выражения для распределения вероятностей флуктуации в критической точке пользоваться формулой (55,5) с подстановкой в нее разложения (57,15) оказывается незаконным.

В критическом состоянии вещества его сжимаемость настолько велика, что малые силы вызывают большие действия. Благодаря этому флуктуации здесь не только велики, но, что самое главное, теряют свой местный характер. Это означает, что теряет смысл утверждение о флуктуации объема, происходящей в данной точке вещества[1].

Рассмотрим теперь флуктуации температуры подсистемы при постоянном объеме. Работа, которую нужно было бы произвести над подсистемой для того, чтобы перевести ее из равновесного состояния с температурой T_0 в неравновесное состояние с температурой T, равна

$$W = \Delta E - T_0 \Delta S.$$

Разложим изменение энергии ΔE в ряд по степеням ΔS и ограничимся первыми членами разложения. При этом, поскольку энергия является потенциалом относительно энтропии и объема, имеем

$$\Delta E \approx \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V (\Delta S) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V \frac{(\Delta S)^2}{2} = T_0 \Delta S + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \frac{(\Delta S)^2}{2}.$$

Но

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T.$$

Поэтому окончательно

$$\Delta W = T_0 \Delta S + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \frac{(\Delta S)^2}{2} - T_0 \Delta S =$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V^2 \frac{(\Delta T)^2}{2} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \frac{(\Delta T)^2}{2} = \frac{C_V}{2T_0} (\Delta T)^2.$$

Вероятность того, что температура подсистемы испытает флуктуацию и ее температура будет лежать между T и $T + dT$, равна

$$dw = \mathrm{const} \cdot e^{-\frac{C_V (T-T_0)^2}{2kT_0}} \, dT. \qquad (57,18)$$

Нормируя распределение (57,18), находим

$$dw = \sqrt{\frac{C_V}{2\pi k T_0^2}} \cdot e^{-\frac{C_V (T-T_0)^2}{2kT_0^2}} \, dT. \qquad (57,19)$$

---

[1]) Теория флуктуаций вещества, находящегося в критической точке, не может быть изложена в рамках этой книги. С ней можно ознакомиться в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.

Из распределения (57,19) следует, что теплоемкость однородного вещества при постоянном объеме должна быть существенно положительной величиной. В противном случае вещество находилось бы в неустойчивом состоянии. Таким образом, наряду с (57,7) мы получаем второе условие устойчивости состояний однородного вещества:

$$C_V > 0. \tag{57,20}$$

Если бы теплоемкость тела была отрицательна, то тело можно было бы нагревать, забирая при этом от него тепло. Иными словами, можно было бы построить вечный двигатель второго рода.

Можно показать, что флуктуации объема и температуры являются независимыми. Не останавливаясь на строгом доказательстве этого утверждения, заметим лишь, что оно вытекает также из общих физических рассуждений. Состояние однородного тела полностью определяется тремя термодинамическими параметрами, которые связаны между собой одним соотношением — уравнением состояния. Поэтому изменения двух термодинамических параметров в однородном теле могут всегда происходить независимо друг от друга. В однородном веществе условия (57,7) и (57,20) являются достаточными для устойчивости состояний системы. Напомним, что необходимыми условиями устойчивости являются постоянство температуры и давления в однородной системе.

В заключение отметим, что полученные нами условия устойчивости не обязаны выполняться в неоднородной системе, например в системе, находящейся в поле сил или состоящей из нескольких фаз. В этом случае состояние системы, помимо параметров p, T, S и V, зависит и от других величин, например напряженности внешнего поля. Поэтому изменятся выражения для работы флуктуации и условия устойчивости.

§ 58. Влияние флуктуаций на чувствительность измерительных приборов

Флуктуации играют важную роль в действии современных высокочувствительных приборов — весов, гальванометров и т. п. Чувствительность этих приборов столь высока, что они позволяют регистрировать явления того же масштаба, что и флуктуации, вызываемые тепловым движением молекул в самом приборе. Это влечет за собой важное следствие: при непосредственном (однократном) измерении физической величины, значение которой меньше, чем флуктуации самого прибора, он регистрирует собственное тепловое движение (фон), а не изме-

ряемую величину. В этом смысле говорят, что тепловое движение кладет предел чувствительности данной конструкции прибора (при однократном измерении).

Дальнейшее повышение чувствительности и измерения величин, лежащих ниже фона теплового движения, сопряжено с выполнением многократных измерений (или изменением конструкции прибора).

Действительно, если прибор регистрирует только собственное движение, то среднее отклонение прибора будет равно нулю. Если же на фон накладывается некоторое внешнее воздействие, то прибор будет флуктуировать около некоторого нового положения и его среднее отклонение будет отлично от нуля. Чем больше число произведенных измерений, т. е. чем больше время наблюдения, тем меньшие значения физической величины (лежащие ниже фона) могут быть зарегистрированы.

Найдем чувствительность некоторых приборов при однократном измерении.

Подвешенное зеркальце. Одним из простейших и наиболее чувствительных приборов является легкое зеркальце, подвешенное на тонкой, обычно кварцевой, нити. Чувствительность прибора определяется возможностью регистрации весьма малых углов поворота зеркальца на нити. Предел чувствительности, т. е. наименьшие углы поворота, которые могут быть зарегистрированы, при однократных измерениях определяются тем, что они должны быть больше, чем колебания зеркальца, вызванные тепловым движением молекул зеркальца и нити. Это тепловое движение приводит к случайным поворотам подвешенного зеркальца на углы, величина которых определяется значением среднего квадратичного угла поворота. Вычислим эту величину.

Для того чтобы зеркальце «случайно», т. е. под действием молекулярного теплового движения, отклонилось от равновесного положения $\varphi = 0$ на некоторый угол φ, необходимо, чтобы была произведена работа против упругих сил нити. Эта работа производится за счет энергии теплового движения. Роль параметра, определяющего отклонение системы от положения равновесия, играет угол φ. Вероятность отклонения системы от равновесного положения $\varphi = 0$ на угол φ определяется формулой (55,6), в которой в качестве потенциальной энергии будет потенциальная энергия кручения нити. При малых углах

$$u(\varphi) = \frac{a\varphi^2}{2},$$

где $a = \frac{\pi^2 r^2 G}{2l}$ (здесь r — радиус нити, l — ее длина и G — модуль сдвига нити).

Таким образом,

$$dw = \text{const} \cdot e^{-\frac{a\varphi^2}{2kT}} d\varphi = \frac{e^{-\frac{a\varphi^2}{2kT}} d\varphi}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a\varphi^2}{2kT}} d\varphi}. \tag{58,1}$$

Здесь постоянная определена из условия нормирования.

Средний квадратичный угол отклонения равен

$$\overline{\varphi^2} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 e^{-\frac{a\varphi^2}{2kT}} d\varphi}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a\varphi^2}{2kT}} d\varphi} = \frac{kT}{a}.$$

Этот результат имеет простой смысл: средняя потенциальная энергия нашей системы с одной степенью свободы равна

$$\bar{u} = \frac{\overline{a\varphi^2}}{2} = \frac{kT}{2} \tag{58,2}$$

в соответствии с законом о равномерном распределении. При $T = 300°$ K и $a = 10^{-6}$ *эрг* (таким значением a обладают очень тонкие кварцевые нити) имеем $\sqrt{\overline{\varphi^2}} = 2 \cdot 10^{-4}$. Эта величина определяет угол, на который в среднем поворачивается зеркальце «само по себе». Если измеряемая по отклонению зеркальца величина вызывает поворот на меньший угол, то при однократном измерении регистрируется собственное отклонение.

Ясно, однако, что при отсутствии систематической отклоняющей силы среднее отклонение зеркальца будет равно нулю, а при наличии такой силы зеркальце будет испытывать колебания около смещенного положения равновесия. Производя многократные измерения колебаний зеркальца, можно найти, около какого среднего положения происходят эти колебания. Тем самым можно определить величину, значения которой лежат ниже теплового фона или чувствительности при однократном измерении.

Пружинные весы. Совершенно аналогичные результаты могут быть получены для пружинных весов. Флуктуации давления окружающего воздуха и тепловое движение механизма весов будут приводить к тому, что нагрузка весов будет хаотически изменяться. Это изменение нагрузки будет компенсиро-

ваться квазиупругой силой $\varkappa\Delta x$. Изменение потенциальной энергии системы при смещении на Δx равно

$$u=\frac{\varkappa(\Delta x)^2}{2}.$$

Средняя потенциальная энергия по закону равномерного распределения равна $kT/2$. Поэтому среднее изменение длины пружины равно

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}=\sqrt{\frac{kT}{\varkappa}}. \qquad (58,3)$$

Измерение массы m на весах возможно, если вызываемое ею растяжение пружины больше, чем флуктуация длины нити $\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}$. Растяжение пружины грузом m равно $\Delta x=\frac{mg}{\varkappa}$. Поэтому предельно малая масса, которая может быть найдена при однократном измерении, равна

$$m\approx\frac{\varkappa}{g}\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}=\frac{\sqrt{kT\varkappa}}{g}.$$

Газовый термометр. Предположим что мы измеряем температуру с помощью газового термометра, наполненного идеальным газом. Температура, измеряемая термометром, не будет оставаться постоянной, а будет непрерывно испытывать флуктуации так же, как и другие термодинамические величины.

В идеальном газе флуктуация температуры может быть легко выражена через флуктуацию обьема. Из уравнения Клапейрона следует

$$\Delta T=\frac{p\,\Delta V}{Nk}=\frac{T}{V}\Delta V,$$

где через ΔT и ΔV обозначены малые изменения температуры и объема. Если понимать под малыми изменениями объема изменения его вследствие флуктуаций, то можно написать

$$\Delta V=\sqrt{\overline{(\Delta V)^2}}=\sqrt{\frac{kT}{\left(-\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}}=\frac{V}{\sqrt{N}},$$

так что

$$\Delta T=\sqrt{\overline{(\Delta T)^2}}=\frac{T}{V}\Delta V=\frac{T}{\sqrt{N}}.$$

С помощью газового термометра нельзя измерять изменения температуры, меньшие, чем ΔT. Если термометр содержит всего

10^{-4} моля газа (т. е. объем его 0,02 *л*), то $N=6\cdot10^{23}\cdot10^{-4}=6\cdot10^{19}$, так что минимальное измеримое изменение температуры

$$\Delta T\approx10^{-10}\,T.$$

Оно является столь малым, что все реально измеряемые изменения температуры чрезвычайно велики по сравнению с пределом чувствительности.

Таким образом, чувствительность газового термометра практически не ограничивается изменениями температуры. Приведенные примеры показывают, что влияние флуктуаций на чувствительность приборов широко изменяется в зависимости от характера прибора.

Мы не можем в рамках этой книги изложить теорию измерения величин, лежащих ниже уровня шумов, и отсылаем читателя к специальной литературе (см., например, Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, т. II, «Сов. радио», 1968).

ГЛАВА IX

СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ

§ 59. Большое каноническое распределение Гиббса

Рассматривая в § 13 взаимодействие подсистемы с окружающими ее телами (термостатом), мы предполагали, что это взаимодействие состоит только в обмене энергией. В действительности, однако, очень часто взаимодействие подсистемы с окружением не сводится к одному обмену энергией, но включает также и обмен частицами. В процессе взаимодействия подсистема обменивается частицами с окружающей средой. Уходящие и приходящие частицы несут с собой энергию, так что обмен энергией и частицами идет одновременно. В этом случае переменной является не только энергия, но число частиц, имеющихся в системе. Для того чтобы характеризовать состояние системы, недостаточно указать полную энергию системы, но необходимо также указать, сколько частиц в ней содержится. Благодаря взаимодействию с окружением, выделенная подсистема может побывать в различных квантовых состояниях, отличающихся при этом числом частиц, содержащихся в системе. Прежде чем перейти к выводу статистического распределения для этого случая, приведем некоторые примеры подсистем с переменным числом частиц.

Допустим, что наша подсистема представляет макроскопическую каплю или кристалл, находящийся в равновесии с паром или расплавом соответственно. Последние играют роль окружения (термостата). Молекулы с поверхности жидкости переходят в пар, а молекулы из пара конденсируются на поверхности жидкости. То же происходит с молекулами на поверхности кристалла. Если систематического перехода частиц из пара в жидкость или обратно не происходит, то в системе установится состояние равновесия, при котором число частиц, переходящих в обоих направлениях, уравнивается.

Другим примером системы с переменным числом частиц может послужить система, в которой происходит равновесная химическая реакция. В ходе химической реакции в выделенной

подсистеме (например, молекулах соединения AB) число частиц изменяется: уменьшается за счет реакции распада $AB \to A+B$ и увеличивается за счет синтеза $A+B \to AB$.

В состоянии равновесия между подсистемой и термостатом идет непрерывный обмен энергией и частицами. Условиями равновесия при обмене энергией служило равенство температур и давлений. Дополнительное условие равновесия при обмене частицами будет найдено в дальнейшем.

Перейдем к выводу статистического распределения системы с переменным числом частиц, т. е. распределения вероятностей W_{in} того, что подсистема находится в i-м состоянии и содержит при этом n частиц. Нахождение статистического распределения в этом случае отличается от рассмотренного в § 16 только тем, что число состояний подсистемы с данной энергией $\Omega(\varepsilon_i)$ нужно заменить на число состояний с данной энергией и данным числом частиц $\Omega(\varepsilon_i, n)$. Соответственно число состояний термостата будет $\Omega_0(E_0, N_0)$, причем сумма числа частиц в подсистеме и термостате остается постоянной,

$$N = n + N_0 = \text{const}.$$

Тогда вместо формулы (16,5) получаем

$$w_{in} \approx \Omega_0(E - \varepsilon_i,\ N - n)\,\Omega(\varepsilon_i,\ n),$$

или вместо (16,7)

$$\Omega_0(E - \varepsilon_i,\ N - n) = e^{\sigma(E-\varepsilon_i,\ N-n)}. \qquad (59,1)$$

Поскольку размеры подсистемы малы, ее энергия и число содержащихся в ней частиц малы по сравнению с энергией и числом частиц во всей замкнутой системе, $\varepsilon_i \ll E$ и $n \ll N$ Поэтому, как и в § 16, мы можем разложить функцию

$$\sigma(E - \varepsilon_i,\ N - n)$$

в ряд по степеням ε_i и n и ограничиться первыми членами разложения. Это дает

$$w_{in} \approx e^{\sigma(E,\ N) - \left(\frac{\partial\sigma}{\partial F_i}\right)_{\varepsilon_i=0}\varepsilon_i - \left(\frac{\partial\sigma}{\partial n}\right)_{n=0} n}\ \Omega(\varepsilon_i,\ n), \qquad (59,2)$$

или

$$w_{in} \approx \text{const}\cdot e^{\frac{\varepsilon_i - \mu n}{\theta}}\,\Omega(\varepsilon_i,\ n), \qquad (59,3)$$

где символом const обозначена постоянная величина $e^{\sigma(E,\ N)}$, не зависящая от ε_i и n; через θ по-прежнему обозначена статистическая температура $\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\sigma}\right)_{\varepsilon_i=0}$ и

$$\frac{\mu}{\theta} = -\left(\frac{\partial\sigma}{\partial n}\right)_{n=0}. \qquad (59,4)$$

Производная в формуле (59,4) берется при постоянном значении энергии и внешних параметров. Молекулярный смысл величины μ будет выяснен в следующем параграфе.

Подчеркнем, что в отличие от θ, μ может иметь любой знак. Действительно, в формуле (59,5) суммирование ведется по конечному числу частиц, в отличие от суммирования по бесконечному числу уровней в формуле (16,12).

Значение постоянной может быть найдено из условия нормирования:

$$\sum_i \sum_n w_{in} = 1,$$

где суммирование ведется по всем энергетическим уровням и всем возможным числам частиц в системе. Очевидно, имеем

$$\text{const} \cdot \sum_i \sum_n e^{\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i, n) = 1,$$

поэтому

$$\text{const} = \frac{1}{\sum_i \sum_n e^{\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i, n)}. \qquad (59,5)$$

Искомое распределение вероятностей состояний системы с переменным числом частиц можно окончательно записать в виде

$$w_{in} = \frac{e^{\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i, n)}{\sum_i \sum_n e^{\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i, n)}. \qquad (59,6)$$

Формула (59,6) отличается от формулы (16,13) только тем, что вместо одной переменной, характеризующей состояние системы — энергии, в ней содержится две переменные — энергия ε_i и число частиц в системе n. Мы будем называть распределение вероятностей (59,6) большим каноническим распределением.

Введем обозначение

$$\tilde{Z} = e^{-\frac{\mu n}{\theta}} \sum_i \sum_n e^{\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}} \Omega(\varepsilon_i, n).$$

При постоянном числе частиц в системе $n = \bar{n}$ величина $\tilde{Z}$ совпадает с обычной функцией состояний.

С помощью $\tilde{Z}$ распределение вероятностей (59,6) можно записать в стандартном виде:

$$w_{in} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i, n)}{\tilde{Z}}.$$

Число состояний системы $\Omega(\varepsilon_i, n)$ можно (в квазиклассическом приближении) выразить через объем фазового пространства $\Delta\Gamma$ по формуле (1,26):

$$\Omega(\varepsilon_i, n) = \frac{\Delta\Gamma_n}{h^{3n}}, \qquad (59,7)$$

где $\Delta\Gamma_n$ — объем фазового пространства системы, содержащей n частиц. Очевидно, что с изменением числа частиц изменяются число степеней свободы $3n$ и величина фазового объема:

$$\Delta\Gamma_n = \Delta q_1\,\Delta q_2\,\ldots\,\Delta q_{3n}\,\Delta p_1\,\Delta p_2\,\ldots\,\Delta p_{3n}. \qquad (59,8)$$

Тогда для вероятности того, что система находится в энергетическом состоянии, отвечающем элементу фазового объема $d\Gamma_n$, и содержит n частиц, получаем

$$dw_{in} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\,d\Gamma_n}{\tilde{Z}h^{3n}}. \qquad (59,9)$$

Зная распределение вероятностей (59,6) или (59,9), можно находить средние значения всех величин, характеризующих состояние системы с переменным числом частиц.

По общей формуле образования средних находим среднее значение любой величины L, зависящей от состояния подсистемы и числа частиц:

$$\bar{L} = \frac{\sum\limits_i\sum\limits_n L e^{\frac{\mu n-\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i, n)}{\sum\limits_i\sum\limits_n e^{\frac{\mu n-\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i, n)}. \qquad (59,10)$$

В частности, среднее значение числа частиц при произвольном значении энергии системы равно

$$\bar{n} = \frac{\sum\limits_i\sum\limits_n n e^{\frac{\mu n-\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i, n)}{\sum\limits_i\sum\limits_n e^{\frac{\mu n-\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i, n)} = \theta\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sum_i\sum_n e^{\frac{\mu n-\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i, n). \qquad (59,11)$$

В системе с переменным числом частиц $\tilde{Z}$ естественно назвать функцией состояния или большой суммой (или интегралом) по состояниям.

Удобно ввести величину z, именуемую активностью, равную по определению

$$z = e^{\frac{\mu}{kT}}.$$

С помощью активности $\tilde{Z}$ можно представить в виде

$$\tilde{Z} = \sum_{n=1}^{N} z^n Z_n, \tag{59,12}$$

где Z_n — статистическая сумма для n частиц.

В классическом приближении можно написать

$$\tilde{Z} = \sum e^{\frac{\mu n}{\theta}} Z_n \simeq \sum e^{\frac{\mu}{\theta}} e^{-\frac{F_n}{\theta}} \simeq e^{\frac{\mu\bar{n}-F}{\theta}} \simeq e^{\frac{\mu N-F}{\theta}}.$$

В следующем параграфе будет показано (см. формулу (60,4)), что $\mu N = \Phi$, где Φ — термодинамический потенциал Гиббса.

Поэтому для $\tilde{Z}$ находим

$$\tilde{Z} = e^{\frac{pV}{\theta}} \tag{59,13}$$

или

$$p = \frac{\theta}{V} \ln \tilde{Z}. \tag{59,14}$$

Аналогично (59,11) можно записать в виде

$$\bar{n} = N = \theta \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \mu} = \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \ln z}. \tag{59,15}$$

Мы должны теперь перейти к установлению физического смысла параметра μ.

В § 17 был выяснен физический смысл формально введенной величины θ и было показано, что она представляет статистическую температуру. Условием статистического равновесия между квазинезависимыми подсистемами, могущими слабо взаимодействовать между собой и обмениваться энергией, служило равенство их температур. Замечательно то, что и формально введенная величина μ оказывается имеющей важный физический смысл, который можно выявить с помощью рассуждений, совершенно аналогичных рассуждениям § 17.

Рассмотрим некоторую систему, находящуюся в состоянии статистического равновесия. Выделим из нее две подсистемы, также находящиеся в состоянии статистического равновесия и слабо взаимодействующие между собой. Это взаимодействие

состоит во взаимном обмене энергией и частицами между обеими подсистемами. Для каждой из них можно написать распределение вероятностей состояний в виде

$$w_1 = A_1 e^{\frac{\mu_1 n_1 - \varepsilon_{i1}}{\theta}} \Omega_1$$

и

$$w_2 = A_2 e^{\frac{\mu_2 n_2 - \varepsilon_{k2}}{\theta_2}} \Omega_2,$$

где индексом 1 отмечены величины, относящиеся к первой, а индексом 2 — ко второй подсистеме.

Поскольку подсистемы являются квазинезависимыми, к ним можно применять теорему умножения вероятностей, а для вероятности одновременного нахождения первой системы в i-м, а второй — в k-м состояниях можно написать

$$w_{12} = w_1 w_2 = A_1 e^{\frac{\mu_1 n_1 - \varepsilon_{i1}}{\theta_1}} A_2 e^{\frac{\mu_2 n_2 - \varepsilon_{k2}}{\theta_2}} \Omega_1 \Omega_2. \tag{59,16}$$

С другой стороны, обе подсистемы вместе можно считать одной подсистемой с энергией, равной сумме $(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{k2})$ и числом частиц, равным $(n_1 + n_2)$. Поскольку эта подсистема находится в состоянии равновесия, для нее также можно написать большое статистическое распределение в виде

$$w_{12} = A e^{\frac{\mu (n_1 + n_2) - (\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{k2})}{\theta}} \Omega. \tag{59,17}$$

Если подсистемы находятся в равновесии друг с другом, то при установлении взаимодействия между ними их состояния не должны изменяться. Это означает, что должно остаться неизменным распределение вероятностей состояний в системе, образованной из двух подсистем. Для этого необходимо, чтобы выражения (59,16) и (59,17) были идентичны. Последнее условие требует, однако, выполнения равенств

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 \tag{59,18}$$

$$\mu = \mu_1 = \mu_2. \tag{59,19}$$

Первое из них представляет хорошо знакомое условие равенства температур во всех квазинезависимых подсистемах, входящих в состав равновесной системы. Это условие было получено в § 17 для подсистем, взаимодействие между которыми сводилось к обмену энергией. Второе равенство является существенно новым. Оно показывает, что величина μ, относящаяся, как и θ, к термостату (см. § 17), в состоянии статистического равновесия должна иметь одинаковое значение во всех частях системы

Наряду с условиями постоянства температуры и давления постоянство μ является необходимым условием статистического равновесия в системе. Появление дополнительного условия равновесия связано с тем, что мы рассматриваем теперь подсистемы, могущие обмениваться между собой не только энергией, но и частицами.

Мы будем называть величину μ статистическим парциальным потенциалом термостата. В том случае, когда выделенная нами подсистема сама является макроскопической системой, условия равновесия позволяют относить μ к самой системе, а не к термостату. Действительно, в состоянии равновесия парциальные потенциалы термостата и макроскопической подсистемы должны быть равны. Не имеет, однако, смысла говорить о парциальном потенциале макроскопической подсистемы, например, молекулы. Напомним, что то же самое относилось и к статистической температуре θ. Она также представляет температуру термостата, но для макроскопической системы может быть отождествлена с температурой последней. Нельзя, однако, говорить о температуре отдельной молекулы.

С точки зрения молекулярных представлений условие (59,18) выражает требование, чтобы количества энергии, отдаваемой и получаемой подсистемой, были равны друг другу. Условие устанавливает, что при обмене частицами не только должны быть равны друг другу числа приходящих и уходящих из подсистемы частиц, но также равны и средние энергии, переносимые частицами. Если бы это было не так, например, если бы уходили только быстрые, а приходили только медленные частицы, то состояние равновесия было бы нарушено.

Очень важным и часто встречающимся случаем равновесия является равновесие в системе, находящейся во внешнем поле сил. Если силы допускают потенциал, то энергию, отнесенную к одной молекуле, можно написать в виде

$$\varepsilon=\varepsilon_0+u(x, y, z).$$

Соответственно химический потенциал системы приобретает вид

$$\mu=\mu_0+u(x, y, z),$$

где величины с индексом «нуль» относятся к системе вне поля. Условие равновесия (59,19) приобретает при этом вид

$$\mu_0+u(x, y, z)=\text{const}. \qquad (59{,}20)$$

Таким образом, во внешнем поле сил значение μ_0 оказывается переменным от точки к точке.

§ 60. Основное термодинамическое равенство и вычисление парциальных потенциалов

Для выяснения термодинамических свойств системы с переменным числом частиц необходимо прежде всего найти основное термодинамическое равенство для таких систем. Последнее можно получить наиболее просто следующим образом.

Поскольку величины, входящие в основное термодинамическое равенство (24,5) — энергия, энтропия и объем, — обладают аддитивными свойствами, это равенство может быть написано не только для величин E, σ и V, но также и для удельных значений этих величин, отнесенных к единице массы или к одной частице.

Пусть в системе содержится N частиц. Тогда энергию, энтропию и объем, приходящиеся на одну частицу, можно записать в виде E/N, σ/N и V/N. Записав основное термодинамическое равенство для удельных величин, отнесенных к одной частице, имеем

$$d\left(\frac{E}{N}\right) = \theta d\left(\frac{\sigma}{N}\right) - pd\left(\frac{V}{N}\right).$$

Совершенно очевидно, что последнее равенство будет иметь место независимо от того, по какой причине изменяется удельное значение энергии и других величин — из-за изменения самих величин или из-за изменения числа частиц в системе. Поэтому в равенстве можно считать N переменной величиной и написать

$$\frac{dE}{N} - \frac{E\,dN}{N^2} = \theta\frac{d\sigma}{N} - \theta\sigma\frac{dN}{N^2} + pV\frac{dN}{N^2} - \frac{p\,dV}{N},$$

откуда

$$dE = \theta\,d\sigma - p\,dV + \left(\frac{E - \theta\sigma + pV}{N}\right)dN.$$

Обозначив

$$\mu = \frac{E - \theta\sigma + pV}{N}, \qquad (60,1)$$

получаем

$$dE = \theta\,d\sigma - p\,dV + \mu\,dN. \qquad (60,2)$$

Отсюда следует, что имеют место равенства

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{\sigma, V}; \quad \frac{\mu}{\theta} = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial N}\right)_{E, V}. \qquad (60,3)$$

Сравнение формул (60,3) и (59,4) убеждает нас в тождественности величины μ, определенной формулой (60,1), и парциального потенциала. Первое из равенств (60,3) показывает, что парциальный потенциал равен производной от энергии по числу частиц. С точки зрения практического вычисления парциальных

потенциалов особенно важно равенство (60,1), которое показывает, что парциальный потенциал μ представляет термодинамический потенциал Гиббса, отнесенный к одной частице:

$$\mu = \frac{E - \theta\sigma + pV}{\theta} = \frac{\Phi(p, T)}{N}. \qquad (60,4)$$

Последнее оправдывает название парциального потенциала. Парциальный потенциал μ удобнее всего выражать как функцию давления и температуры по формуле (60,4).

Формула (60,2) представляет основное термодинамическое равенство, написанное для системы с переменным числом частиц.

Заметим еще, что, переходя в (60,2) от энергии к свободной энергии обычным способом, т. е. вычитая из обеих частей (60,2) дифференциал $d(TS)$, можем написать

$$dF = -S\,dT - p\,dV + \mu\,dN, \qquad (60,2')$$

откуда

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}. \qquad (60,3')$$

Полученные соотношения без труда могут быть обобщены на случай систем, содержащих частицы различных сортов. В дальнейшем мы будем рассматривать статистические свойства систем с переменным числом частиц и нам понадобятся конкретные выражения парциальных потенциалов. Они могут быть получены для газов и кристаллов.

С помощью (37,11) находим для парциального потенциала идеального одноатомного газа

$$\mu = -\frac{5}{2} kT \ln kT + kT \ln p - kTj, \qquad (60,5)$$

где величина j, часто именуемая химической постоянной, равна

$$j = \ln\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}.$$

Аналогично для двухатомного газа можно получить

$$\mu = -\frac{7}{2} kT \ln kT + kT \ln p - kTj + kT \ln\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) + \varepsilon_0, \qquad (60,6)$$

где химическая постоянная j и нулевая энергия ε_0 равны

$$j = \ln\left[\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} \frac{8\pi^2 I}{h^2}\right]; \quad \varepsilon_0 = \frac{h\nu}{2}.$$

В случае кристаллов, по определению парциального потенциала, имеем

$$\mu = \frac{F + pV}{N} = \frac{F}{N} + pv,$$

где F дается формулами (53,7) и (53,8), а v обозначает объем, приходящийся на одну частицу в кристалле. При низкой температуре $T \ll \theta_c$,

$$\mu = -\frac{\pi^4 kT}{5}\left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3 + pv. \qquad (60,7)$$

Аналогично при высокой температуре, $T \gg \theta_c$,

$$\mu = -3kT \ln \frac{T}{\theta_c} - kT + pv. \qquad (60,8)$$

В последние формулы входит произведение pv, содержащееся в уравнении состояния кристалла, которое выражается через трудноизмеримые величины. Однако ввиду малости объема v, приходящегося на одну частицу, в большинстве случаев можно опустить малое слагаемое pv.

В заключение воспользуемся найденным значением парциального потенциала для того, чтобы записать распределение Максвелла в форме распределения Гиббса с переменным числом частиц. Для этого выразим μ не через давление, а через объем системы. Получим

$$\mu = kT \ln\left[\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}}\right], \qquad (60,9)$$

откуда

$$\frac{N}{V}\left(\frac{1}{2\pi m kT}\right)^{3/2} = \frac{1}{h^3} e^{\frac{\mu}{kT}}.$$

Подставляя это в распределение Максвелла (9,3), получаем

$$dn = e^{\frac{\mu - \varepsilon}{kT}} \frac{d\Gamma}{h^3}. \qquad (60,10)$$

Заметим, что парциальный потенциал идеального газа — весьма большая отрицательная величина.

Если газ находится во внешнем поле сил, то

$$\mu = kT \ln\left[\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)^{3/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}}\right] + u(x, y, z)$$

и вместо (60,10) можно написать распределение Максвелла — Больцмана

$$dn = e^{\frac{\mu + u - \varepsilon}{kT}} \frac{d\Gamma}{h^3}. \qquad (60,11)$$

§ 61. Условия равновесия фаз

Одним из наиболее важных случаев статистического равновесия в системе с переменным числом частиц является случай фазового равновесия. Представим себе некоторую макроскопическую однородную квазизамкнутую систему, отделенную от остальных тел поверхностью раздела и находящуюся в состоянии равновесия. Такую систему мы будем называть фазой вещества.

Понятие фазы является обобщением и уточнением понятия агрегатного состояния вещества. В качестве примера фазы можно указать пар, находящийся в равновесии со своим конденсатом; в этом случае через границу раздела пар — жидкость или пар — твердое тело происходит обмен энергией и частицами между паром и его окружением — термостатом. Другими примерами могут служить: кристалл, находящийся в равновесии со своим расплавом; одна кристаллическая модификация, находящаяся в равновесии с другой; электронный газ в вакууме, находящийся в равновесии с электронным газом в металле. В дальнейшем мы приведем примеры других, более сложных фазовых равновесий.

Во всех случаях фазового равновесия характерным является существование поверхности раздела между разными фазами. В состоянии статистического равновесия число частиц, переходящих из одной фазы в другую, и переносимая ими энергия в точности равны соответствующим величинам, переходящим в обратном направлении. Если бы не существовало границы раздела, резко разделяющей фазы, не имело бы смысла говорить об особой квазизамкнутой подсистеме как о фазе. Поясним это на примере. Представим себе, что две фазы, представляющие однородные изотропные состояния вещества, находятся в равновесии, соприкасаясь по некоторой поверхности раздела. Тогда менее плотную фазу мы назовем паровой, или газовой, более плотную — жидкой. Если же перед нами имеется одна однородная система, то, как это подробно будет пояснено в § 64, понятие жидкости или газа к ней неприменимо: изменяя физические условия, в которых находится система, можно непрерывным образом переводить ее из состояния с большой плотностью в состояние с малой плотностью. Состояние с большой плотностью нельзя называть жидкостью, а состояние с меньшей плотностью — газом. Оба они представляют случаи однородного состояния вещества. Таким образом, наличие границы раздела между фазами является необходимым условием для того, чтобы можно было говорить о существовании фаз и фазовых равновесиях.

Напишем условие статистического равновесия между фазами, ограничившись вначале случаем двух фаз одного вещества.

Каждую из фаз можно рассматривать как квазизамкнутую подсистему, а их совокупность — как замкнутую систему, находящуюся в состоянии статистического равновесия. Поэтому условия равновесия между двумя фазами можно написать в виде (59,14) и (59,15):

$$T_1 = T_2, \qquad (61,1)$$

$$\mu_1(p_1, T) = \mu_2(p_2, T). \qquad (61,2)$$

Кроме этих условий, необходимо потребовать, чтобы силы, действующие на границу раздела со стороны обеих равновесных фаз, были равны между собой. В противном случае граница раздела между фазами пришла бы в движение и равновесие в системе было бы нарушено.

Условие механического равновесия удобно отнести к единице поверхности раздела, заменив силы давлениями. Таким образом, к условиям равенства температур и парциальных потенциалов следует добавить условие равенства давлений в обеих фазах.

Это простое рассуждение можно строго обосновать, рассмотрев условие механического равновесия, которым служит требование минимума свободной энергии замкнутой системы при $T = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$. Условие механического равновесия в системе, состоящей из двух фаз, при $T = \text{const}$ можно написать в виде

$$dF = dF_1 + dF_2 = -p_1 dV_1 - p_2 dV_2 = 0.$$

Поскольку объем всей системы остается неизменным,

$$dV_1 = -dV_2$$

и

$$p_1 = p_2. \qquad (61,3)$$

Таким образом, давления в обеих фазах должны быть равны между собой. С учетом условий (61,1) и (61,3) формулу (61,2) можно записать в виде

$$\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T). \qquad (61,4)$$

Поскольку в состоянии равновесия T и p имеют равные значения в обеих фазах, из уравнения (61,4) можно выразить одну из этих величин через другую. Пусть в результате этого у нас получится уравнение

$$p = p(T) \qquad (61,5)$$

для зависимости равновесного давления от равновесной температуры. Уравнение (61,5) представляет на плоскости (p, T) некоторую кривую, называемую кривой фазового равновесия. Все точки этой кривой отвечают соприкосновению равновесных фаз. При давлениях бо́льших и меньших, чем равновесное при

данной температуре, устойчивой является одна из фаз: именно та, у которой меньше термодинамический потенциал. Если, например, одной из фаз является жидкость, а второй — ее пар, область на (p, T)-плоскости, лежащая выше кривой, отвечает жидкой фазе, область ниже кривой соответствует газовой фазе. Вдоль линии происходит равновесный фазовый переход жидкость — пар.

Соответственно при равновесии кристалл — расплав кристаллической фазе отвечает область выше кривой фазового равновесия ab, на кривой лежат точки плавления, ниже кривой устойчивой фазой является жидкость. При фазовом переходе происходит выделение или поглощение скрытого тепла. Скрытая теплота при переходе одной молекулы из одной фазы в другую равна (поскольку процесс является равновесным и обратимым)

$$l = \int T\,ds,$$

где s — энтропия, отнесенная к одной молекуле. Так как при фазовом переходе температура постоянна, ее можно вынести за знак интеграла и написать

$$l = T\,\Delta s = T(s_2 - s_1).$$

Таким образом, скрытая теплота фазового перехода равна разности энтропий, умноженной на температуру перехода. Скрытое тепло считается положительным, если при фазовом переходе тепло поглощается. Выделяющееся скрытое тепло считается отрицательным.

§ 62. Уравнение кривой фазового равновесия

Зависимость парциального потенциала от температуры и давления известна лишь для немногих простых систем. В большинстве случаев конкретный вид функции $\mu(p, T)$ неизвестен. Поэтому уравнение кривой равновесия (61,5) невозможно написать в явном виде. Оказывается, однако, что дифференциальное уравнение кривой равновесия имеет более простой вид и содержит лишь легко измеримые величины.

Для получения дифференциального уравнения кривой равновесия продифференцируем условие (61,4). Имеем

$$d\mu_1 = d\mu_2 \qquad (62,1)$$

или

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial p}\,dp + \frac{\partial\mu_1}{\partial T}\,dT = \frac{\partial\mu_2}{\partial p}\,dp + \frac{\partial\mu_2}{\partial T}\,dT. \qquad (62,2)$$

Из формулы (62,2) находим тангенс угла наклона кривой равновесия

$$\frac{dp}{dT}=\frac{\dfrac{\partial\mu_2}{\partial T}-\dfrac{\partial\mu_1}{\partial T}}{\dfrac{\partial\mu_1}{\partial p}-\dfrac{\partial\mu_2}{\partial p}}. \qquad (62,3)$$

Уравнение (62,3) и является искомым дифференциальным уравнением кривой равновесия. Для приведения его к окончательному виду необходимо выразить стоящие в нем величины через непосредственно измеряемые. Согласно (29,10) и (29,11) имеем

$$S=-\frac{\partial\Phi}{\partial T}, \quad V=\frac{\partial\Phi}{\partial p},$$

поэтому

$$\frac{\partial\mu}{\partial T}=-\frac{S}{N}=-s, \quad \frac{\partial\mu}{\partial p}=\frac{V}{N}, \qquad (62,4)$$

где N — число частиц. Подставляя это в (62,3), находим

$$\frac{dp}{dT}=\frac{S_1-S_2}{V_1-V_2}. \qquad (62,5)$$

Заменяя разность энтропий теплом перехода l, получим

$$\frac{dp}{dT}=\frac{lN}{(V_2-V_1)\,T}. \qquad (62,6)$$

Формулу (62,6) обычно относят к одному молю газообразной фазы.

Обозначая скрытую теплоту фазового перехода одного моля вещества lN через L и изменение молярного объема через ΔV, окончательно находим

$$\frac{dp}{dT}=\frac{L}{T\,\Delta V}. \qquad (62,7)$$

Формула (62,6) носит название уравнения Клапейрона — Клаузиуса. Формула Клапейрона — Клаузиуса связывает изменение равновесного давления p при бесконечно малом изменении равновесной температуры T с непосредственно измеряемыми величинами. Ее обсуждение для конкретных случаев фазового равновесия будет проведено в последующих параграфах.

Нетрудно видеть, что если фазовый переход происходит при повышении температуры, то скрытое тепло всегда поглощается, т. е. $L>0$. Действительно,

$$L=T(S_2-S_1)=NT\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial T}-\frac{\partial\mu_2}{\partial T}\right). \qquad (62,8)$$

Характер температурного хода парциальных потенциалов при фазовом переходе, происходящем с повышением температуры, представлен на рис. 66. До точки 1 устойчивой фазой является первая фаза, парциальный потенциал μ_1 которой меньше потенциала второй фазы μ_2. После точки 1 имеет место обратное положение. В самой точке 1 имеет место равновесие фаз, в ней парциальные потенциалы обеих фаз равны между собой; ее ордината представляет температуру фазового перехода (при данном давлении). Из рис. 66 видно, что в точке 1 тангенс угла наклона кривой μ_1 должен быть больше, чем тангенс угла наклона кривой μ_2. В противном случае выше этой точки μ_1 не станет больше, чем μ_2. Поэтому в точке 1 имеем

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial T} > \frac{\partial\mu_2}{\partial T}.$$

Рис. 66.

Тогда из формулы (62,8) следует, что если фазовый переход происходит при повышении температуры, его скрытая теплота всегда положительна. Численное значение последней не может быть найдено теоретически, поскольку она выражается через энтропии фаз, а явный вид этих функций в большинстве случаев неизвестен.

Доказанная теорема позволяет установить знак температурного коэффициента равновесного давления dp/dT для различных фазовых переходов. Если фазовый переход происходит с повышением температуры (плавление, кипение, сублимация), так что L положительно, то согласно формуле Клапейрона — Клаузиуса знак dp/dT определяется знаком величины ΔV — изменения объема при фазовом переходе. При испарении и сублимации объем фазы резко возрастает, так что всегда $\Delta V > 0$. Поэтому для этих фазовых переходов dp/dT также положительно, т. е. равновесное давление растет с повышением температуры или, наоборот, равновесная температура растет с повышением давления. При понижении давления температура точки кипения и сублимации понижается. Такая связь между равновесным давлением и равновесной температурой находится в согласии с хорошо известными экспериментальными фактами (повышение температуры кипения в котлах высокого давления, понижение температуры кипения с высотой и т. п.).

При плавлении встречаются два случая: когда ΔV положительно, так что плотность жидкой фазы меньше плотности твердой фазы, и когда ΔV отрицательно, и более плотной является жидкая фаза. Для тел первого типа $\frac{dp}{dT} > 0$, так что температура плавления повышается с ростом давления.

Число тел более плотных в жидкой фазе сравнительно невелико. К ним относятся прежде всего вода, чугун, висмут, а также ряд сплавов. У этих тел $\frac{dp}{dT} < 0$, т. е. температура плавления падает с повышением давления. Эта особенность плавления льда и других веществ также широко известна.

Интересно отметить, что вблизи абсолютного нуля температурный коэффициент dp/dT стремится к нулю, так что равновесное давление в точке плавления перестает зависеть от температуры. Действительно, из третьего начала термодинамики следует, что при $T \to 0$ изменение энтропии при плавлении $\Delta S \to 0$. Следовательно, обращается в нуль скрытая теплота плавления, а с ней в силу (62,6) и dp/dT. Такой ход зависимости dp/dT от температуры действительно имеет место для жидкого гелия II, являющегося устойчивой фазой при $T \to 0$ при давлениях ниже 30 *атм*. При давлениях выше ~ 30 *атм* устойчивой фазой является твердый гелий. Кривая фазового равновесия (твердый гелий $\rightleftarrows$ жидкий гелий II) идет почти горизонтально; ее угловой коэффициент $\frac{dp}{dT} \to 0$ при $T \to 0$ (рис. 67).

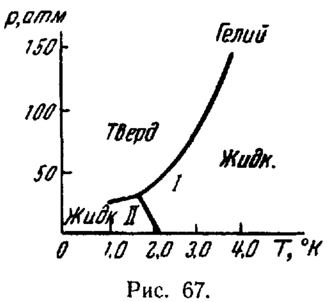


Рис. 67.

Как мы уже указывали, найти явный вид кривой равновесия в общем случае нельзя. Если из опытных данных известна зависимость скрытой теплоты перехода и изменения молярного объема от температуры и давления, то уравнение Клапейрона — Клаузиуса может быть проинтегрировано. При этом находится зависимость равновесного давления фазового перехода от температуры, т. е. форма кривой равновесия. Зависимость указанных величин от температуры и давления является обычно сложной, и интегрирование производится численно. Положение существенно упрощается, если одной из равновесных фаз является пар, т. е. в случае кипения или возгонки (сублимации).

В случае равновесия между конденсированной фазой и паром можно считать, что молярный объем пара значительно больше, чем молярные объемы конденсированной фазы — жидкости или кристалла. Поэтому изменение объема при фазовом переходе можно приравнять объему газовой фазы (отнесенному к соответствующему числу частиц):

$$\Delta V = V_{\text{пар}} - V_{\text{конд. фаза}} \approx V_{\text{пар}}.$$

При этом уравнение Клапейрона — Клаузиуса принимает вид

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\,V_{\text{па}}}. \qquad (62,9)$$

Если пар, находящийся в равновесии с конденсированной фазой, является достаточно разреженным, так что его можно считать идеальным газом, то

$$V_{\text{пар}} = \frac{NkT}{p}. \tag{62,10}$$

Заметим, что это предположение выполняется с достаточной степенью точности только при сравнительно низких температурах. Подставляя (62,10) в (62,9), имеем

$$\frac{dp}{p} = \frac{L}{NkT^2}\,dT. \tag{62,11}$$

Зависимость L от температуры может быть найдена с помощью приема, совершенно аналогичного тому, который применялся при выводе уравнения Клапейрона — Клаузиуса.

Дифференцируя L по T, имеем

$$\frac{dL}{dT} = T\left(\frac{\partial\,\Delta S}{\partial T}\right)_p + T\left(\frac{\partial\,\Delta S}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT} + \Delta S$$

или

$$\frac{dL}{dT} = \Delta C_p - T\,\frac{\partial\,(\Delta V)}{\partial T}\,\frac{dp}{dT} + \Delta S,$$

или, с учетом (62,9) и (62,10),

$$\frac{dL}{dT} = \Delta C_p - \frac{T\,\Delta S}{V_{\text{пар}}}\,\frac{\partial V_{\text{пар}}}{\partial T} + \Delta S = \Delta C_p.$$

Таким образом, скрытая теплота перехода при некоторой температуре T равна

$$L = L_0 + \int_0^T (\Delta C_p)\,dT, \tag{62,12}$$

где L_0 — скрытая теплота при $T = 0$. Последняя величина представляет ту работу, которую нужно произвести при абсолютном нуле для того, чтобы разорвать связи, существующие между молекулами в конденсированной фазе, и превратить их в невзаимодействующие молекулы. При этом скрытая теплота перехода из конденсированной фазы в газ приобретает особенно ясный смысл: она равна работе, затрачиваемой на преодоление связей, плюс та энергия, которую нужно сообщить системе для того, чтобы компенсировать различие в энергиях теплового движения в конденсированной фазе и газе.

Подставляя формулу (62,12) в (62,11), имеем

$$\frac{dp}{p} = \frac{L_0\,dT}{NkT^2} + \frac{dT}{NkT^2}\int_0^T (\Delta C_p)\,dT.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln p = -\frac{L_0}{NkT} + \int_0^T \frac{dT'}{NkT'^2} \int_0^{T'} (\Delta C_p)\, dT'' + i$$

или

$$p = \exp\left\{-\frac{L_0}{NkT} + \int_0^T \frac{dT'}{NkT'^2} \int_0^{T'} (\Delta C_p)\, dT'' + i\right\}, \qquad (62,13)$$

где i — некоторая постоянная, именуемая обычно постоянной упругости пара.

Формула (62,13) показывает, что давление равновесного насыщенного пара быстро уменьшается с понижением температуры.

В случае испарения основная часть скрытой теплоты перехода обычно отвечает первому члену в (62,12). Поэтому формулу (62,13) часто приближенно записывают в виде

$$p \sim e^{-\frac{L_0}{NkT}+i}. \qquad (62,14)$$

В формулу (62,13) входит неизвестная постоянная упругости пара i, скрытая теплота перехода при абсолютном нуле L_0 и разность теплоемкостей обеих равновесных фаз.

С помощью статистических методов можно получить значение всех этих величин, кроме L_0, расчетным путем, если только конденсированной фазой является кристалл. Малость давления насыщенного пара позволяет считать пар идеальным газом и пользоваться парциальным потенциалом, определенным формулой (60,5).

Приравнивая парциальные потенциалы газа (для простоты формул — одноатомного) и кристалла, мы получим уравнение кривой возгонки. При этом мы выберем начало отсчета энергий так, чтобы энергия неподвижной молекулы, находящейся в газе, была равна нулю. Энергия молекулы в кристалле, отсчитываемая от этого уровня, отрицательна (поскольку молекула является связанной в кристаллической решетке) и будет обозначена через $\varepsilon_0 = -\frac{L}{N}$.

Очевидно, ε_0 равна работе, которую нужно затратить при абсолютном нуле для того, чтобы оторвать молекулу от ее соседей в кристаллической решетке и перевести ее в газовую фазу, в которой она также будет покоиться. Таким образом, $(-\varepsilon_0)$ представляет теплоту возгонки при абсолютном нуле, отнесенную к одной молекуле и взятую с обратным знаком. Приравнивая $\mu_{\text{газ}}$ и $\mu_{\text{крист}}$, находим условия равновесия в системе

(кристалл ⇄ газ) при низкой температуре:

$$\ln p = \frac{5}{2}\ln kT + j - \frac{\varepsilon_0}{kT} - \frac{\pi^4}{5}\left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3, \tag{62,15}$$

или

$$p = (kT)^{5/2} e^{-\frac{L_0}{NkT} - \frac{\pi^4}{5}\left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3} e^j. \tag{62,16}$$

Основным членом в (62,16) является член, содержащий скрытую теплоту перехода при абсолютном нуле.

Сопоставим формулу (62,16) с общей формулой (62,13). Для этого мы должны вычислить двойной интеграл в (62,13). Используя для $C_{p\,\text{крист}}$ его значение по формуле (53,2) имеем

$$\Delta C_p = -C_{p\,\text{крист}} + C_{p\,\text{газ}} = \frac{5}{2}\,Nk - \frac{12\pi^4 Nk}{5}\left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3$$

и

$$\int_0^T \frac{dT'}{NkT'^2}\int_0^{T'} \Delta C_p\, dT'' = \int_0^T \frac{dT'}{NkT'^2}\int_0^{T'}\left[\frac{5}{2}Nk - \frac{12\pi^4}{5}Nk\left(\frac{T''}{\theta_c}\right)^3\right]dT'' =$$

$$= \int_0^T \frac{dT}{T'^2}\left(\frac{5}{2}\,T' - \frac{3\pi^4}{5}\frac{T'^4}{\theta_c^3}\right) = \frac{5}{2}\ln T - \frac{\pi^4}{5}\left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3. \tag{62,17}$$

Подставляя (62,17) в общее выражение для давления (62,13), получаем выражение, совпадающее с (62,16), если только положить постоянную i, входящую в (62,13), равной химической постоянной j. Таким образом, с помощью статистических соображений можно вычислить постоянную давления насыщенного пара.

Формула (62,16) находится в хорошем количественном согласии с экспериментом.

Совершенно таким же образом можно получить кривую равновесия при высоких температурах.

Приравнивая парциальные потенциалы (60,5) и (60,8), находим

$$\ln p = \frac{5}{2}\ln kT + j + \frac{\varepsilon_0}{kT} - 3kT\ln\frac{T}{\theta_c} - 1. \tag{62,18}$$

Тот же результат может быть получен и из общей формулы (62,14).

Следует заметить, что, как видно из (62,16), давление насыщенного пара очень быстро повышается с ростом температуры. Если характеристическая температура θ_c кристалла сравнительно велика, так что условие $T \gg \theta_c$ выполнено при высокой температуре, то соответствующая плотность насыщенного пара будет слишком большой для того, чтобы пар можно было считать идеальным газом.

В этом случае в формуле (62,16) нужно пользоваться парциальным потенциалом для ван-дер-ваальсова газа. На практике чаще пользуются эмпирическими формулами для кривой упругости пара.

На приведенном примере полезно провести сравнение практических возможностей термодинамического и статистического методов.

Термодинамическим методом нами была получена формула (62,14), обладающая большой общностью и устанавливающая равновесное давление пара над любой конденсированной фазой. Однако в эту общую формулу вошли величины, числовое значение которых могло быть определено только из опыта.

Статистическим методом выражение для давления пара было получено при сильных ограничивающих допущениях, но в этих рамках были получены количественные значения и выяснен молекулярный смысл всех величин.

§ 63. Теория фазовых переходов *)

До сих пор мы ограничивались термодинамическими рассуждениями, принимая как опытный факт существование фаз и возможность фазовых переходов.

Теперь мы должны обсудить явления фазовых переходов со статистической точки зрения. Фазовый переход всегда связан с разрывом непрерывности некоторых термодинамических величин. В рассмотренном выше примере фазового перехода, носящего наименование фазового перехода 1-го рода, термодинамические потенциалы фаз остаются непрерывными, а их энтропия $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ и удельный объем $v = \frac{V}{N} = -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_T$ испытывают конечный скачок.

Наряду с фазовыми переходами 1-го рода существуют так называемые переходы 2-го рода, при которых терпят разрыв вторые производные термодинамических потенциалов — теплоемкость $c_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$ и коэффициент теплового расширения $\alpha = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$, скачкообразно изменяясь на величины Δc_p и $\Delta\alpha$.

С многочисленными примерами фазовых переходов второго рода мы будем сталкиваться в дальнейшем (см. § 20 гл. IV и § 21 ч. IV). Необходимо подчеркнуть, что самый факт существования фазовых переходов, с точки зрения статистической физики, представляется довольно неожиданным. Казалось бы,

*) В изложении этого параграфа мы следуем книге К. Хуанга «Статистическая механика», ИЛ, 1962. За деталями теории отсылаем читателя к этой книге и оригинальным работам Янга и Ли, Phys. Rev. 87, 410 (1952).

что статистическая сумма (или интеграл) определяет термодинамические потенциалы как непрерывные функции параметров, характеризующих состояние систем (температуры и объема).

Действительно, напишем уравнение состояния фазы системы с заданным числом частиц N, занимающей объем V. Из (59,14) и (59,15) с учетом (59,12) следует, что

$$p = \frac{kT}{V} \ln \tilde{Z} = \frac{kT}{V} \ln \sum_n z^n Z_n(V, T, n), \tag{63,1}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{N}{V} = \frac{kT}{V} \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \mu} = \frac{1}{V} \frac{\partial \ln\left(\sum z^n Z_n(V, T, n)\right)}{\partial \ln z} = \frac{\partial p}{\partial \ln z}. \tag{63,2}$$

Исключая z из (63,1) и (63,2), можно найти зависимость $f\left(p, \frac{V}{N}, T\right)$, т. е. уравнение состояния. Если принять закон взаимодействия между молекулами в виде (46,2) и считать объем фазы имеющим конечное фиксированное значение V, то в Z_n можно выполнить интегрирование по импульсам и написать (в классическом приближении)

$$Z_n = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} \frac{1}{n!} \int e^{-\frac{\Sigma u(r_{ij})}{kT}} dV_1 \ldots dV_n. \tag{63,3}$$

Очевидно, что все статистические интегралы Z_n являются существенно положительными величинами, зависящими от объема V_n и температуры T как от параметров. Распишем подробнее выражение для $\tilde{Z}$:

$$\tilde{Z} = \sum_{n=1}^{N} z^n Z_n = Z_1 z + Z_2 z^2 + \ldots + Z_N z^N. \tag{63,4}$$

Большая статистическая сумма $\tilde{Z}$ является полиномом N-й степени относительно z с существенно положительными коэффициентами. Поэтому $\tilde{Z}$ является монотонно растущей функцией активности z. В силу непрерывности функции $Z_n(V, T, n)$ она также является непрерывной функцией температуры и объема (или плотности $\rho = N/V$).

Из вида функции $\tilde{Z}$ и формулы (63,1) видно, что $p(z)$ является монотонно растущей функцией активности z, как это изображено на рис. 68, *а*. Обратный удельный объем $1/v$, в силу (63,2), также является монотонно растущей функцией z (рис. 68, *б*). Согласно формуле (57,7) необходимым условием устойчивого существования всякой фазы является требование $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T < 0$, т. е. требование монотонного убывания давления с ростом объема (приходящегося на одну частицу). Поэтому кривая $p(v)$ имеет вид, представленный на рис. 68, *в*.

Мы видим, что давление является монотонной функцией объема (при данной температуре) и никакой тенденции к появлению разрывов на кривой, выражающей уравнение состояния произвольной фазы, не обнаруживается. Если, однако, функция $\tilde{Z}$ обратится в нуль, то согласно (63,1) и (63,2) давление p

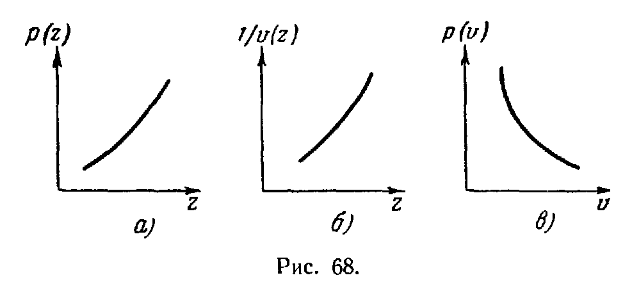


Рис. 68.

и объем v станут неопределенными и наши рассуждения потеряют свою силу. Поэтому необходимо более детально обсудить поведение $\tilde{Z}$ как функции активности z и объема v.

Само существование фазовых переходов (разрывов в термодинамических величинах) связано с поведением системы при $\tilde{Z} \to 0$, где функции p и v имеют особенности.

Для того чтобы найти значения, при которых большая статистическая сумма $\tilde{Z}$ обращается в нуль, необходимо знать ее явное выражение как функцию z и V. Для реальных систем нахождение большой статистической суммы является до настоящего времени неосуществимой задачей.

Оказывается, однако, что в предельном случае, когда число частиц в системе N и ее объем V неограниченно возрастают $N \to \infty$, $V \to \infty$, но так, что удельный объем v остается ограниченным $v \leqslant 0$, можно определить поведение $\tilde{Z}(z, V)$, не определив ее явного вида. При этом можно показать, что из поведения $\tilde{Z}(z)$ вытекает возможность существования фазовых переходов. Запишем выражение (63,4) в виде

$$\tilde{Z}(z, V, T) = \prod_{i=1}^{N} (z - z_i), \qquad (63,5)$$

где z_i — корни полинома (63,4). Поскольку все коэффициенты полинома (63,4) положительны, корни z_i не могут быть положительными: они либо отрицательны, либо попарно комплексно-сопряженные величины, либо равны нулю.

Хотя реальный смысл имеют только положительные и в крайнем случае нулевые значения z, с математической точки зрения удобно ввести в рассмотрение комплексные величины z и рассматривать функцию комплексного переменного $\tilde{Z}(z)$. Перейдем

при этом в формулах (63,1), (63,2) и (63,5) к пределу, написав

$$p = kT \lim_{V\to\infty}\left[\frac{1}{V}\ln\tilde{Z}(z, V, T)\right], \tag{63,6}$$

$$\frac{1}{v} = kT \lim_{V\to\infty}\left[\frac{1}{V}\frac{\partial \ln\tilde{Z}(z, V, T)}{\partial \ln z}\right], \tag{63,7}$$

$$\tilde{Z}(z, V, T) = \lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N}(z - z_i). \tag{63,8}$$

Число корней z_i при этом неограниченно возрастает, и они располагаются на комплексной плоскости. Математическое исследование, проведенное Янгом и Ли, показало, что пределы в формулах (63,6) и (63,7) существуют, и при $V\to\infty$ функция $\frac{1}{V}\ln\tilde{Z}$ и является аналитической функцией z в некоторых областях R комплексного переменного, включая и действительную ось, не содержащих нулей z_i.

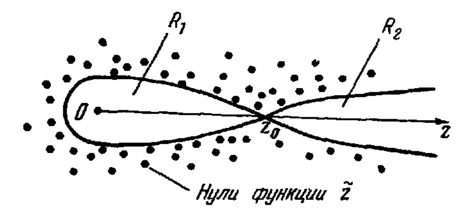


Рис. 69.

Это означает, что при всех значениях z в этих областях в системе с $V\to\infty$ давление не имеет особенностей (т. е. фазовых переходов нет). На рис. 69 эти области обозначены через R_1 и R_2. Нули z_i обозначены точками.

Однако, в отличие от системы с конечным значением N (конечным числом нулей), в системе с $N\to\infty$ и $V\to\infty$ число нулей z неограниченно велико. Поэтому они, заполняя плоскость комплексного переменного, могут в некоторых точках

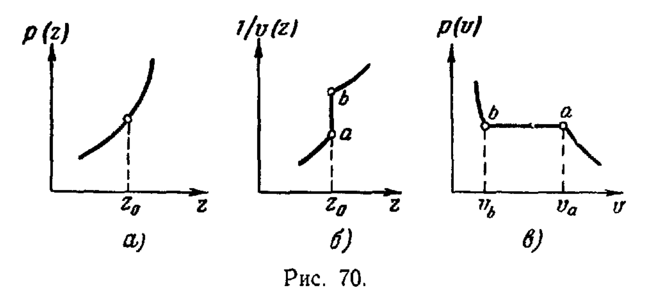


Рис. 70.

приближаться как угодно близко к действительной оси. Пусть z_0 — такая точка на действительной оси (рис. 69). В как угодно малой окрестности точки z_0 находится нуль функции $\tilde{Z}$. Поскольку давление $p(v)$ является аналитической функцией в точке $z = z_0$, оно должно оставаться непрерывным (рис. 70, a).

Однако обратный удельный объем $1/v$, который согласно (63,2) является производной от давления, в точке z_0 может испытывать разрыв

$$\Delta\frac{1}{v}=\Delta\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln z}.$$

Если такой разрыв имеет место, как это показано на рис. 70, *б*, то уравнение состояния (зависимость $p(v)$) приобретает вид, показанный на рис. 70, *в*. Это — типичная кривая фазового перехода первого рода. При изменении удельного объема от v_b до v_a давление остается неизменным. Разрыв в производной, согласно сказанному, является возможным, но не обязательным. Если, однако, давление и его первая производная непрерывны при $z=z_0$, то может испытывать разрыв вторая производная давления $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$. В этом случае на кривой $1/v(z)$ возникает

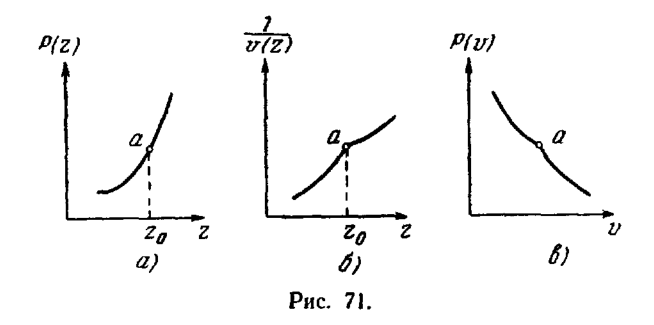


Рис. 71.

излом, как это показано на рис. 71, *б*. Соответственно уравнение состояния будет иметь вид, представленный на рис. 71, *в*. Такая кривая характерна для фазовых переходов 2-го рода.

Необходимо подчеркнуть, что изложенная теория указывает на возможность фазовых переходов, но не позволяет установить ни положение точек фазового перехода, ни характер самого перехода.

Существование изолированных точек z_0 также не доказано. Поэтому существенно то обстоятельство, что для простейшей двумерной решетки, состоящей из частиц, могущих находиться в двух состояниях (так называемая модель Изинга), удалось вычислить статистическую сумму в явном виде. Это вычисление слишком громоздко и не может быть здесь приведено. Оказалось, что в такой решетке обнаруживается фазовый переход, причем именно такого типа (с изолированной точкой z_0), как это предполагалось выше.

§ 64. Кривые фазового равновесия

Кривая фазового равновесия, т. е. кривая зависимости равновесного давления p от равновесной температуры T на плоскости (p, T), имеет различный вид для разных фазовых равновесий. Как мы уже указывали, общий вид кривой нельзя определить теоретически. Можно лишь высказать одно общее соображение по поводу этой кривой.

Рассматривая вопрос о взаимоотношении между жидкостью и газом (§ 48), мы имели уже возможность указать на отсутствие принципиальной разницы между этими состояниями вещества. Имеющиеся качественные отличия между жидкостью и газом связаны с различной ролью взаимодействия между атомами. При понижении температуры или увеличении плотности газа среднее расстояние между атомами уменьшается. Это соответствует уменьшению средней длины свободного пробега и относительному увеличению средней энергии взаимодействия (по сравнению с kT). При известных условиях термодинамический потенциал системы со свободно движущимися, разделенными значительными расстояниями частицами (газ) оказывается выше потенциала системы, в которой молекулы находятся на малых расстояниях (жидкость). В этот момент происходит фазовый переход (конденсация). Хаотическое свободное движение молекул, характерное для газа, превращается в беспорядочное метание отдельных молекул в «клетке», образованной их ближайшими соседями. Хотя движение атомов в газе очень заметно отличается от движения в жидкости, это различие имеет скорее количественный характер и, во всяком случае, не отличается по своей природе: в обоих случаях движение имеет совершенно хаотический характер. Из этого следует, что при известных условиях переход от хаотического движения при малых плотностях к хаотическому движению при больших плотностях может происходить постепенно, без скачка в точке конденсации. Иными словами, при некотором способе изменения параметров (p, V и T) можно добиться непрерывного перехода из жидкого в газообразное состояние и обратно, при котором отсутствует скачкообразный фазовый переход, связанный с поглощением или выделением скрытого тепла.

Возможность непрерывного перехода между жидким и газообразным состояниями налагает существенное ограничение на характер кривой равновесия фаз жидкость — газ. Именно, непрерывный переход между жидкой и газообразной фазами возможен только в том случае, если кривая фазового равновесия $p(T)$ оканчивается в некоторой точке K (рис. 72), именуемой критической (точкой абсолютного кипения, по Менделееву).

Пусть $p_к$ и $T_к$ — давление и температура в критической точке, называемые критическим давлением и критической температурой. При всех значениях p и T, лежащих ниже $p_к$ и $T_к$, переход из жидкости в газ и обратно происходит с пересечением кривой равновесия фаз. На самой кривой обе фазы находятся в равновесии друг с другом, соприкасаясь по некоторой поверхности раздела. Выше точки K имеется однородное состояние вещества, в котором не существует каких-либо поверхностей раздела. Оно часто именуется закритическим. Однородное состояние вещества может иметь и большую и малую плотности, в зависимости от температуры и давления. Не имеет, однако, смысла называть вещество выше критической точки жидкостью или газом.

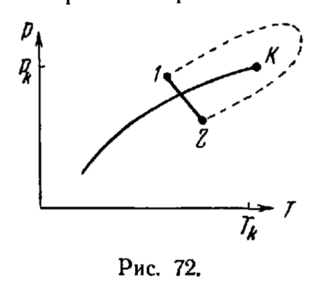


Рис. 72.

Переход из точки 1 (жидкость) в точку 2 (газ) может совершаться как по пути, изображенному сплошной линией, так и по пути, изображенному пунктиром (рис. 72). На первом пути происходит пересечение кривой фазового равновесия, так что переход сопровождается выделением или поглощением скрытого тепла.

На втором пути переход происходит через закритическое состояние и происходит непрерывно, без скачкообразного изменения характера движения и без выделения или поглощения скрытого тепла. Возможность непрерывного перехода из жидкого в газообразное состояние показывает всю условность терминов «жидкость» и «газ».

Строго говоря, пользоваться терминами «жидкость» и «газ» можно только тогда, когда они существуют одновременно и соприкасаются друг с другом по некоторой поверхности раздела, т. е. являются фазами.

Найдем условия, определяющие положение критической точки на (p, T)-плоскости. Поскольку она лежит на кривой фазового равновесия, в ней выполняются условия равновесия, в частности условия

$$\Delta p = 0,$$
$$\Delta T = 0,$$

где Δp и ΔT — разность давлений и температур в фазах.

Вблизи критической точки разница между обеими фазами становится малой, а в самой критической точке вовсе исчезает. В частности, вблизи критической точки плотности обеих фаз близки друг к другу. В отличие от точек, лежащих вдали от

критической, здесь изменение плотности при фазовом переходе очень мало.

Если обозначить разность плотностей фаз через $\Delta\rho$, то всегда можно написать формальное разложение:

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \Delta\rho + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_T + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial \rho^3}\right)_T (\Delta\rho)^3 + \ldots \qquad (64,1)$$

В силу условия фазового равновесия сумма этого ряда равна нулю. Вблизи критической точки разложение упрощается. Достаточно близко к критической точке можно считать величину $\Delta\rho$ бесконечно малой. В разложении (64,1) можно опустить старшие члены разложения и написать

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \Delta\rho = 0. \qquad (64,2)$$

Поскольку $\Delta\rho$ — произвольная бесконечно малая величина, из (64,2) вытекает, что

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = 0. \qquad (64,3)$$

Производная в (64,3) берется в критической точке. Таким образом, в критической точке

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \sim \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0. \qquad (64,4)$$

Если величина $\frac{\partial p}{\partial V_T}$ обращается в нуль, то для устойчивости вещества необходимо, чтобы одновременно выполнялось условие

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0. \qquad (64,5)$$

В противном случае флуктуации объема, как мы выяснили в § 57, были бы бесконечно велики. Условия (64,3) и (64,4) определяют положение критической точки. Они совпадают с широкоизвестными условиями для точки перегиба на кривой Ван-дер-Ваальса.

Вблизи критической точки вещество обладает рядом замечательных свойств. Разница в свойствах жидкой и газообразной фазы постепенно уменьшается и исчезает в самой критической точке. Можно показать[1]), что вблизи критической точки плотности обеих фаз зависят от температуры по закону:

$$\rho = \rho_к \pm \sqrt{\text{const}}\,(T - T_к),$$

---

[1]) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.

где знак плюс относится к жидкости, а знак минус — к газу. В критической точке скрытое тепло перехода обращается в нуль, а теплоемкость C_p — в бесконечность. Поверхностное натяжение на границе раздела жидкость — газ также обращается в нуль в критической точке. Обращение в бесконечность сжимаемости в критической точке приводит к существенному уменьшению работы сжатия или расширения некоторого элемента объема в системе вблизи критической точки.

Иной характер имеют переходы из кристаллического состояния в изотропное. Под изотропным состоянием мы понимаем совокупность аморфного, жидкого или газообразного состояний. В этом случае происходит переход из состояния упорядоченного движения в состояние хаотического движения. Упорядоченному движению атомов (или ионов) в кристалле отвечает нахождение атомов вблизи узлов кристаллической решетки и связанная с этим правильным расположением определенная симметрия кристалла. При повышении температуры происходит некоторое увеличение амплитуды колебаний атомов в узлах решетки и возрастает число нарушений правильности решетки, но общий упорядоченный характер движения, симметрия решетки, сохраняются вплоть до самой точки плавления (или возгонки). В точке плавления происходит катастрофическое разрушение решетки, симметрия исчезает и упорядоченное движение заменяется хаотическим. Процесс плавления оказывается растянутым по шкале температур всего на доли градуса из-за влияния всякого рода примесей.

В отличие от переходов между различными изотропными фазами непрерывный переход между кристаллом и одной из изотропных фаз невозможен. Невозможность непрерывных переходов связана с принципиальной разницей в характере движения в этих фазах. Это видно также из соображений симметрии. Невозможно непрерывным образом перевести бесконечно симметричное (изотропное) тело в тело с вполне определенной конечной симметрией. То же самое относится к фазовым переходам между различными кристаллическими модификациями. Каждая из модификаций обладает вполне определенным упорядоченным движением атомов и отвечающей этому движению симметрией. При фазовом переходе изменение характера движения и симметрии кристалла происходит обязательно скачком. Благодаря этому кривая равновесия фаз кристалл ⇄ изотропная фаза или кристалл ⇄ кристалл не может иметь точки окончания и должна уходить на бесконечность. Переход из одной фазы в другую всегда связан с пересечением кривой равновесия и имеет скачкообразный характер[1]).

---

[1]) Подробнее о фазовых переходах см. В. Г. Левич, Введение в статистическую физику, Гостехиздат, 1954, § 76, и, особенно полно, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.

§ 65. Поверхностное натяжение и поверхностное давление

До сих пор мы рассматривали равновесие соприкасающихся фаз, не учитывая особых свойств поверхности раздела и их влияния на равновесие. Если, однако, фазы, находящиеся в равновесии, обладают развитой поверхностью, то полное пренебрежение поверхностными эффектами может внести существенную погрешность в произведенные расчеты. В этом параграфе мы учтем влияние поверхности на равновесие фаз.

Молекулы, расположенные в тонком слое, непосредственно прилегающем к поверхности раздела, находятся в условиях, отличных от условий у молекул, находящихся в объеме. Они взаимодействуют не только с молекулами своей фазы, но также и с близлежащим слоем молекул чужой фазы. Благодаря этому строение и физические свойства тонкого слоя вещества, толщиной порядка радиуса молекулярного взаимодействия, оказываются отличными от объемных.

Детальное рассмотрение свойств поверхностного слоя потребовало бы знания механизма молекулярного взаимодействия. Подобная теория была бы весьма сложна. Поэтому мы должны упростить задачу, заменив поверхностный слой конечной толщины идеализированной, бесконечно тонкой поверхностью раздела, разграничивающей обе фазы. Такой идеализированный, бесконечно тонкий поверхностный слой мы будем кратко называть поверхностью. Площадь поверхности является новым примером параметра, характеризующего состояние системы. При данном значении объема система может иметь различную поверхность Σ, причем каждому значению Σ отвечает определенное состояние системы.

Изменение поверхности системы сопровождается получением или затратой работы. Для образования новой поверхности частица из объема должна перейти на поверхность, что требует затраты работы. Обозначим обобщенную силу, отвечающую параметру Σ, через γ.

Если изменение поверхности производится при постоянной температуре, то работа изменения поверхности ($dW = -\gamma\, d\Sigma$) равна убыли свободной энергии ($-dF_{\text{поверх}}$), так что

$$dF_{\text{поверх}} = \gamma\, d\Sigma. \qquad (65,1)$$

Величина γ, представляющая свободную энергию единицы поверхности, называется поверхностным натяжением. Поверхностное натяжение γ зависит от природы поверхности (иначе говоря, от природы образующих ее фаз), а также от температуры. Значение γ не зависит, однако, от площади поверхности. Поэтому можно написать

$$F_{\text{поверх}} = \gamma\Sigma. \qquad (65,2)$$

Состоянию развновесия незамкнутой системы при постоянной температуре и объеме отвечает минимум свободной энергии. Поверхность раздела фаз представляет пример такой системы. Поэтому в состоянии равновесия поверхность раздела фаз имеет минимальное возможное значение. При одновременном изменении величины поверхности и температуры в системе изменение свободной энергии поверхности имеет вид

$$dF_{\text{поверх}} = -S_{\text{поверх}}\,dT + \gamma\,d\Sigma. \tag{65,3}$$

Из формулы (65,3) следует, что энтропия поверхности определена соотношением

$$S_{\text{поверх}} = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\Sigma = -\Sigma\frac{d\gamma}{dT}, \tag{65,4}$$

позволяющим выразить $S_{\text{поверх}}$ через поверхностное натяжение.

Наряду со свободной энергией поверхности можно написать выражение для энергии поверхности $E_{\text{поверх}}$:

$$E_{\text{поверх}} = F_{\text{поверх}} + TS_{\text{поверх}} = \gamma\Sigma - T\frac{d\gamma}{dT}\Sigma = \left(\gamma - T\frac{d\gamma}{dT}\right)\Sigma. \tag{65,5}$$

Последняя формула показывает, что было бы ошибочным определить поверхностное натяжение как энергию единицы поверхности.

Для дифференциала энергии поверхности можно написать

$$dE_{\text{поверх}} = T\,dS_{\text{поверх}} + \gamma\,d\Sigma. \tag{65,6}$$

Из последнего равенства следует соотношение

$$\left(\frac{\partial S_{\text{поверх}}}{\partial\Sigma}\right)_{E_{\text{поверх}}} = -\frac{\gamma}{T}. \tag{65,7}$$

Заметим, что в (65,7) нельзя подставить непосредственно (65,4). Это привело бы к неверной формуле $\frac{d\gamma}{dT} = -\frac{\gamma}{T}$. Производная в (65,7) берется при постоянной энергии поверхности, но из (65,5) следует, что $\frac{d\gamma}{dT}\Sigma = \frac{\gamma\Sigma - E_{\text{поверх}}}{T}$, а из (65,4) — что $S_{\text{поверх}} = -\frac{\gamma\Sigma - E_{\text{поверх}}}{T}$. Дифференцируя при $E_{\text{поверх}} = \text{const}$ последнее выражение, вновь приходим к формуле (65,7).

Изменение энергии поверхности можно разбить на работу и количество тепла:

$$dE_{\text{поверх}} = T\,dS_{\text{поверх}} + \gamma\,d\Sigma = dQ + dW.$$

С учетом (65,4) отсюда следует, что количество тепла, поглощающегося при обратимом увеличении площади поверхности на 1 *см*², равно

$$Q = (T\,\Delta S)_{\Delta\Sigma=1} = -\frac{d\gamma}{dT}. \tag{65,8}$$

Теплоемкость единицы поверхности (при постоянном значении площади поверхности $\Sigma = 1$) можно определить как

$$c_\Sigma = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{\Sigma=1} = -T\frac{d^2\gamma}{dT^2}. \tag{65,9}$$

Все величины, характеризующие термодинамические свойства поверхности, определяются через поверхностное натяжение и ее производные по температуре.

Температурная зависимость поверхностного натяжения в настоящее время может быть установлена теоретически только для квантовых жидкостей (жидкого гелия II). Отделить движение молекул поверхностного слоя от движения частиц в объеме жидкости при высоких температурах не представляется возможным. Поэтому имеющиеся попытки расчета поверхностного натяжения без учета этой связи не выдерживают критики.

Поверхностное натяжение изменяет условие равновесия фаз.

Условие равновесия в системе, состоящей из двух фаз и поверхности раздела, при $T = \mathrm{const}$ можно записать в виде $dF = dF_1 + dF_2 + dF_{\text{поверх}} = -p_1 dV_1 - p_2 dV_2 + \gamma\, d\Sigma = 0$. Поскольку объем всей системы остается постоянным, $dV_2 = -dV_1$, так что

$$-(p_1 - p_2)\,dV_1 + \gamma\, d\Sigma = 0$$

или

$$p_1 = p_2 + \gamma\frac{d\Sigma}{dV_1}. \tag{65,10}$$

Величина $d\Sigma/dV_1$ представляет кривизну поверхности раздела

$$\frac{d\Sigma}{dV_1} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

где r_1 и r_2 — главные радиусы кривизны. В случае сферической поверхности

$$\frac{d\Sigma}{dV_1} = \frac{d(4\pi r^2)}{d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)} = \frac{2}{r}.$$

При этом радиус-вектор считается положительным, если он направлен в глубь первой фазы. Таким образом, окончательно имеем

$$p_1 = p_2 + \gamma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \tag{65,11}$$

Величина $\gamma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ носит название давления Лапласа, а формула (65,11) — формулы Лапласа. Формула Лапласа показывает, что давление в первой фазе уравновешивается суммой давления во второй фазе и давления Лапласа. В частном случае

плоской поверхности раздела давления Лапласа обращается в нуль, поскольку для плоской поверхности $r_1 \to \infty$, $r_2 \to \infty$.

Наличие поверхностного натяжения изменяет не только условие механического равновесия, но и условие фазового равновесия для обмена частицами.

Именно, хотя в поверхности раздела при фазовом равновесии не может происходить какой-либо задержки частиц и переход их из одной фазы в другую происходит беспрепятственно, условие (61,4) будет теперь выполняться при несколько измененном значении давления (по сравнению с давлением в точке фазового перехода при той же температуре при плоской поверхности раздела).

Рассмотрим случай фазового равновесия между каплями жидкости и ее паром. Будем считать капли сферическими с радиусом r.

Условие равновесия для обмена частицами будет иметь вид

$$\mu_1(p'', T) = \mu_2(p', T), \qquad (65,12)$$

где p'' — давление насыщенного пара, p' — соответствующее давление в жидкой капле, а T — температура перехода. Последнюю примем равной температуре перехода при плоской поверхности. То же условие на плоской поверхности имеет вид

$$\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T). \qquad (65,13)$$

Вычитая (65,13) из (65,12), находим

$$\mu_1(p'', T) - \mu_1(p, T) = \mu_2(p', T) - \mu_2(p, T). \qquad (65,14)$$

Поскольку сжимаемость жидкости весьма мала, различие в давлениях p' и p также мало́. Ввиду этого можно написать

$$\mu_2(p', T) - \mu_2(p, T) = \mu_2(p + \Delta p, T) - \mu_2(p, T) = \frac{\partial \mu_2}{\partial p} \Delta p = v_2 \cdot \Delta p, \qquad (65,15)$$

где v_2 — объем, приходящийся на одну частицу в жидкой фазе, и Δp — разность давлений в жидкости при сферической и плоской поверхности. Последняя равна, очевидно,

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{r}.$$

Изменение давления насыщенного пара над сферической каплей по сравнению с плоской поверхностью в общем случае не мало и разлагать левую часть (65,14) в ряд нельзя. Мы перепишем ее, воспользовавшись общей формулой для парциального потенциала (60,5) идеального газа. Считая пар идеальным газом, находим

$$kT \ln \frac{p''}{p} = v_2 \frac{2\gamma}{r}. \qquad (65,16)$$

Формула (65,16) связывает давление насыщенного пара над каплей с ее радиусом. Записав ее в виде

$$p'' = pe^{\frac{2v_2\gamma}{rkT}}, \qquad (65,17)$$

мы видим, что p'' быстро растет с уменьшением радиуса капли и для мелких капель может стать весьма заметным.

Например, для водяных капель при $\gamma \approx 80$ *эрг/см*^{2} и при $r = 10^{-6}$ *см* и $T \approx 300°$ K давление $p'' \approx 1{,}1\,p$, т. е. давление пара над каплей превышает давление над плоской поверхностью на 10%.

Формула (65,17) показывает, что система, состоящая из набора капель различных размеров, находится в состоянии неустойчивого равновесия. Мелкие капли, обладающие избыточной энергией, связанной с поверхностным давлением, будут испаряться; на крупных каплях будет происходить конденсация паров. Этот процесс, именуемый перегонкой капель, будет продолжаться до тех пор, пока вся жидкость не перейдет в капли самого большого размера.

Другое важное явление, связанное с изменением давления пара над искривленной поверхностью, наблюдается в капиллярах, смачиваемых жидкостью. В таких капиллярах поверхность мениска будет вогнутой, так что в формуле (65,17) нужно написать знак минус. Давление насыщенного пара над вогнутой поверхностью оказывается при этом меньшим, чем над плоской поверхностью. Благодаря этому в тонких капиллярах происходит конденсация паров еще до того, как она происходит при той же температуре над плоской поверхностью. Это явление именуется капиллярной конденсацией.

Формула (65,17), выведенная для равновесия в системе жидкость — пар, качественно справедлива и в других случаях фазового равновесия, например, в системе кристалл — пар.

§ 66. Адсорбция газов

Одним из важнейших эффектов, связанных с особыми свойствами поверхности раздела фаз, является адсорбция. Под адсорбцией понимают накопление некоторого вещества на поверхности твердой или жидкой фазы. Обычно адсорбирующееся вещество распределяется на поверхности раздела фаз, практически совершенно не проникая в глубь конденсированной фазы. Явление адсорбции наблюдается при самых различных комбинациях фаз. Чаще всего на практике приходится иметь дело с адсорбцией газов на поверхности твердого тела. Рассмотрением этого случая адсорбции мы ограничимся в данном параграфе.

До настоящего времени нельзя считать окончательно установленным характер сил, связывающих молекулы, адсорбирующиеся на поверхности, с молекулами твердой или жидкой подложки (именуемой адсорбентом). В ряде случаев они имеют характер ван-дер-ваальсовых сил, в других случаях между адсорбированными молекулами и молекулами адсорбента устанавливается более прочная связь, отвечающая образованию своеобразного химического соединения. Возможны и промежуточные случаи. Как правило, адсорбирующиеся молекулы располагаются на поверхности адсорбента в виде мономолекулярного слоя. При этом чаще всего адсорбированные молекулы не обладают подвижностью, а в процессе адсорбции прикрепляются к вполне определенным точкам на поверхности кристалла. Такие точки на поверхности кристалла, на которых происходит адсорбция молекул, мы будем именовать местами локализации. Местами локализации могут служить ребра граней кристалла или какие-либо иные выделенные точки на поверхности.

Обозначим через N_L число мест локализации, приходящихся на 1 *см*^{2} поверхности кристалла. Будем считать, что все места локализации на поверхности являются равноправными, так что в каждом из них адсорбированная молекула связана с поверхностью в одной и той же степени.

Напишем функцию состояний для системы адсорбированных частиц, считая, что их плотность N_A (число частиц на 1 *см*^{2} поверхности) мала и можно пренебречь взаимодействием между адсорбированными молекулами. Каждая из адсорбированных частиц обладает потенциальной энергией $(-u)$, которая является мерой работы удаления частицы с поверхности.

Если считать, что адсорбированные молекулы колеблются около положения равновесия с частотой ν, то функция состояний для каждой молекулы может быть написана в виде

$$z_A = e^{\frac{u}{kT}} z_{\text{колеб}},$$

где $z_{\text{колеб}}$ — функция состояний осциллятора.

Функция состояний всей совокупности адсорбированных частиц может быть написана в виде

$$Z_A = \frac{N_L!}{N_A!\,(N_L - N_A)!}\,(z_A)^{N_A}, \qquad (66,1)$$

где множитель $\frac{N_L!}{N_A!\,(N_L - N_A)!}$ представляет статистический вес состояния.

Действительно, данной энергии системы отвечает целый ряд состояний, различающихся распределением частиц по местам

локализации. Число способов, которыми можно распределить N_A частиц по N_L местам локализации, равно $\frac{N_L!}{N_A!\,(N_L-N_A)!}$. Оно и дает статистический вес состояния всей системы из частиц, имеющей данную энергию.

С помощью (66,1) можно найти свободную энергию и парциальный потенциал системы.

Имеем для свободной энергии

$$F_A = -kT\ln Z_A = -kT\ln\left\{\frac{N_L!}{N_A!\,(N_L-N_A)!}(z_A)^{N_A}\right\} \approx$$
$$\approx -N_L kT\ln\frac{N_L}{e} + kTN_A\ln\frac{N_A}{e} +$$
$$+(N_L-N_A)\,kT\ln\frac{N_L-N_A}{e} - N_A kT\ln z_A. \qquad (66,2)$$

Соответственно парциальный потенциал адсорбированных частиц равен (ср. (60,3′))

$$\mu_A = \frac{\partial F_A}{\partial N_A} = kT\ln\frac{N_A}{e} - kT\ln\frac{N_L-N_A}{e} - kT\ln z_A =$$
$$= kT\ln\frac{N_A}{N_L-N_A} - kT\ln z_A. \qquad (66,3)$$

С помощью формулы (66,3) можно рассмотреть равновесие между адсорбированным веществом и газом. Приравнивая μ_A и парциальный потенциал газа, даваемый формулой (60,5), получаем

$$kT\ln\frac{N_A}{N_L-N_A} + f(T) = kT\ln p + \varphi(T),$$

откуда находим

$$\frac{N_A}{N_L-N_A} = \frac{p}{p_0(T)}, \qquad (66,4)$$

где p_0 зависит только от температуры. Решая (66,4) относительно N_A, находим

$$N_A = N_L\frac{p}{p+p_0(T)}. \qquad (66,5)$$

Формула (66,5) представляет изотерму адсорбции: она определяет количество адсорбированных молекул в зависимости от давления газа над поверхностью твердого тела при постоянной температуре. Очевидно, что при низком давлении, когда $p \ll p_0$,

это количество пропорционально давлению газа и числу мест локализации:

$$N_A \approx N_L \frac{p}{p_0(T)}.$$

При этом степень заполнения мест локализации мала. При большом давлении $p \gg p_0$ наступает явление насыщения, число адсорбированных молекул перестает зависеть от давления и становится постоянным числом, равным числу мест локализации:

$$N_A \approx N_L.$$

Изотермы адсорбции формулы (66,5) изображены на рис. 73. При высоких температурах возникает подвижность адсорбированных молекул вдоль поверхности. В пределе адсорбированные молекулы могут перемещаться вдоль поверхности твердого тела подобно молекулам «двумерного» газа. При этом изменяется вид функции состояний z_A адсорбированной молекулы, но вид изотермы адсорбции остается прежним.

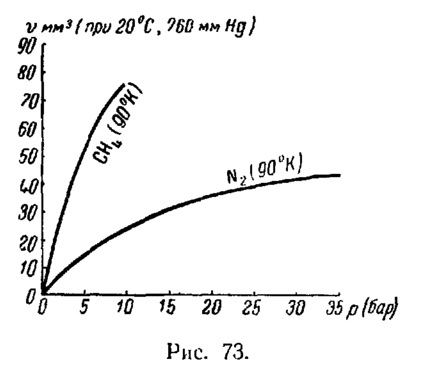


Рис. 73.

Необходимо указать, что рассмотренный здесь простейший механизм адсорбции, при котором все места локализации на поверхности характеризуются одной и той же постоянной энергией связи ($-u$), и который приводит к изотерме (66,5), встречается редко. Обычно на поверхности твердого тела имеются различные места локализации с разными значениями энергии связи, т. е. поверхность адсорбента является неоднородной. Кроме того, при больших заполнениях взаимодействие между молекулами в адсорбированном слое становится существенным и влияет на ход изотермы. В результате наложения этих факторов вид изотермы может изменяться и сильно отличаться от изображенного на рис. 70. Определив из опытных данных вид изотермы и рассматривая его как результат наложения изотерм (66,5) с различными $p_0(T)$, можно найти характер неоднородности поверхности.

Что же касается адсорбции газов на поверхности жидкости, то механизм адсорбции здесь не отличается от адсорбции на поверхности твердого тела при высоких температурах: все точки на поверхности жидкости равноправны и адсорбированные частицы сохраняют подвижность вдоль поверхности при срав-

нительно низких заполнениях поверхности. Изотерма адсорбции имеет вид (66,5). При очень высоких заполнениях существенную роль начинает играть взаимодействие между адсорбированными молекулами, искажающее вид изотерм.

§ 67. Химические равновесия в газовой фазе

В качестве второго примера системы с переменным числом частиц рассмотрим равновесие в системе, в которой протекает химическая реакция.

Предположим для конкретности, что в ходе химической реакции происходит соединение молекул A и B с образованием молекулы AB. Молекула AB в свою очередь распадается на отдельные молекулы A и B. Оба процесса, соединения и распада, происходят с некоторой скоростью, под которой понимают число актов, происходящих в единицу времени. Скорости прямого процесса $A+B \rightarrow AB$ и обратного процесса $AB \rightarrow A+B$, вообще говоря, не равны друг другу. Поэтому химическая реакция идет преимущественно в одну сторону. Однако по прошествии некоторого времени, когда произойдет накопление реагентов, возникающих в ходе более быстрой реакции, и уменьшение количества реагентов, исчезающих в ходе реакции, скорость быстрой реакции уменьшится, а скорость медленной реакции увеличится. В результате в системе установится некоторое равновесное состояние. Число возникающих и распадающихся молекул AB будет одинаковым. В этом случае говорят о равновесной реакции $A+B \rightleftarrows AB$. Удобнее записывать реакцию в форме равенства. Если реакция происходит между несколькими веществами, то всякую химическую реакцию можно записать в виде

$$\sum \nu_i g_i = 0, \tag{67,1}$$

где g_i — химические символы реагирующих веществ, а ν_i — число реагирующих молей соответствующих веществ. При этом принято записывать реакции так, чтобы коэффициенты ν_i для веществ, расходуемых в ходе реакции, имели отрицательный знак, а для образующих веществ — положительный. Например, реакция образования паров воды из гремучей смеси

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

должна с этой точки зрения записываться в виде

$$2H_2O - 2H_2 - O_2 = 0,$$

так что $\nu_{H_2O} = 2$, $\nu_{H_2} = -2$, $\nu_{O_2} = -1$.

Напишем условия химического равновесия в произвольной системе состоящей из исходных веществ и продуктов реакции.

Совокупности молекул исходного вещества и продуктов реакции можно считать некоторыми квазизамкнутыми системами, находящимися в термостате и слабо взаимодействующими между собой. Последнее условие выполнено, если число атомов, реагирующих в единицу времени, мало́ по сравнению с полным числом молекул в системе, что всегда выполнено в макроскопической системе веществ при равновесной реакции.

Обычно приходится изучать равновесные состояния реагирующей системы при заданной температуре и давлении. Условием равновесия поэтому служит требование

$$\Phi(p, T, N_i) \to \min,$$

где N_i — число частиц данного сорта. При постоянных заданных значениях температуры и давления во всей системе условие минимума можно переписать в виде

$$d\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial N_1}\right)_{p,T} dN_1 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial N_2}\right)_{p,T} dN_2 + \ldots = \sum \mu_i \, dN_i = 0$$

и, замечая, что изменение числа частиц данного сорта можно представить в виде

$$dN_i = \nu_i dN,$$

мы получаем условие равновесия в системе при наличии химических реакций:

$$\sum \nu_i \mu_i = 0. \qquad (67,2)$$

При превращении одной молекулы первой подсистемы в одну молекулу второй подсистемы (случай, рассматривавшийся нами ранее), коэффициенты ν_i, очевидно, равны $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = -1$. В этом случае формула (67,2) оказывается тождественной с (61,4).

Мы видим, что химические равновесия определяются равенством парциальных потенциалов. Ввиду этого парциальные потенциалы часто называют химическими потенциалами.

§ 68. Закон действующих масс

Для применения условия (67,2) к конкретным химическим равновесиям необходимо знать явный вид парциальных потенциалов. Последний известен главным образом для газов. Поэтому дальнейшая теория будет относиться к химическим равновесиям в смеси газов. Парциальный потенциал газа был вычислен нами в § 60. В смеси идеальных газов каждый из газов ведет себя так, как будто бы он один занимает весь объем сосуда и имеет парциальное давление $p_i = \frac{N_i}{N} p$, где N_i — число

частиц i-го газа и N — полное число атомов всех сортов, находящихся в сосуде. Запишем μ_i в общем виде:

$$\mu_i = kT \ln p_i + \chi_i(T), \qquad (68,1)$$

где

$$\chi(T) = -\frac{5}{2} kT \ln kT - kTj_1,$$

$$j_1 = \ln\left[\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}\right] \qquad (68,2)$$

для одноатомного газа,

$$\chi(T) = -\frac{7}{2} kT \ln kT - kTj_2 + kT \ln\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) + \varepsilon_0, \qquad (68,3)$$

$$j_2 = \ln\left[\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{7/2} \cdot \frac{8\pi^2 I}{\gamma h^2}\right]$$

для двухатомного газа при очень высоких температурах, когда колебания возбуждены, и

$$\chi(T) = -\frac{7}{2} kT \ln kT - kTj_2 + \varepsilon_0$$

для двухатомного газа при не очень высоких температурах, когда колебания не возбуждены.

Рассмотрим реакцию типа

$$\nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 - \nu_3 g_3 = 0.$$

Условие химического равновесия гласит:

$$\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2 - \nu_3\mu_3 = 0 \qquad (68,4)$$

или

$$\nu_1 kT \ln p_1 + \nu_2 kT \ln p_2 - \nu_3 kT \ln p_3 = \nu_3\chi_3 - \nu_1\chi_1 - \nu_2\chi_2. \qquad (68,5)$$

Таким образом,

$$\frac{p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2}}{p_3^{\nu_3}} = K(T), \qquad (68,6)$$

где

$$\ln K(T) = \frac{\nu_3\chi_3 - \nu_1\chi_1 - \nu_2\chi_2}{kT}. \qquad (68,7)$$

Величина $K(T)$ есть величина, зависящая только от температуры и природы реагирующих молекул, но не зависящая от начальных давлений или количеств реагирующих газов.

Формула (68,6) носит название закона действующих масс. Закон действующих масс показывает, что независимо от исходного состава реагирующей газовой смеси с течением времени в ней установится такое равновесное состояние, при котором

парциальные давления имеют вполне определенные значения, связанные между собой формулой (68,6). Они не зависят ни от каких параметров, кроме температуры, разности нулевых энергий и химических постоянных реагирующих газов. В том случае, когда в реакции участвуют не три, а большее число газов, закон действующих масс нужно писать в виде

$$\prod \frac{(p_{i'})^{\nu_i'}}{(p_i)^{\nu_i}} = K(T), \qquad (68,8)$$

где произведение берется по всем газам, фигурирующим в реакции, а штрихи относятся к продуктам реакции.

Закон действующих масс был впервые экспериментально открыт Н. Н. Бекетовым, а теоретически, на основе статистических соображений, был выведен Гульдбергом и Вааге.

Выражение (68,8) имеет ясный статистический смысл: для того чтобы исходные продукты вступали в реакцию, необходимо, чтобы их молекулы оказались одновременно в весьма малом объеме v, размер которого порядка диаметра молекул. Поскольку газы считаются идеальными и движение молекул происходит независимо друг от друга, вероятность того, что в данном объеме одновременно окажутся молекулы исходных веществ, пропорциональна количествам этих молекул в газе. Последние в свою очередь пропорциональны соответствующим парциальным давлениям. Таким образом, вероятность прямой реакции w_1 пропорциональна $p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots$,

$$w_1 = a p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots$$

Те же самые рассуждения можно применить и к обратной реакции. Вероятность обратной реакции w_2 равна

$$w_2 = b (p_{1'})^{\nu_1'} (p_{2'})^{\nu_2'}.$$

В состоянии равновесия скорости прямой и обратной реакции равны между собой. Для этого должны быть равны вероятности прямого и обратного процессов. Приравнивая w_1 и w_2 и обозначая отношение коэффициентов пропорциональности a/b через K, приходим к формуле (68,8).

Закон действующих масс представляет основной закон химических равновесий. Он может быть выведен чисто термодинамическим путем, но при этом значение константы $K(T)$ остается неопределенным и должно находиться на опыте. С помощью статистических выражений для μ_i, приведенных выше, постоянная K может быть вычислена теоретически Пример подобного вычисления мы дадим несколько позднее.

Закон действующих масс чаще всего выражают не через парциальные давления, а через так называемые молярные доли:

$$c_i = \frac{p_i}{p}.$$

Подставляя c_i в (68,6), получаем

$$\frac{c_1^{\nu_1} c_2^{\nu_2}}{c_3^{\nu_3}} = p^{-\Sigma \nu_i} K(T). \tag{68,9}$$

Из формулы (68,9) следует, что если реакция происходит без изменения числа молей, так что $\nu_3 = \nu_1 + \nu_2$, равновесие не зависит от общего давления в системе p. Примером таких реакций может служить реакция диссоциации йодистого водорода

$$-2HJ + H_2 + J_2 = 0,$$

для которой $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 1$, $\nu_3 = -2$.

Если реакция происходит с изменением числа молей, так что $\nu_3 \neq (\nu_1 + \nu_2)$, то изменение общего давления сдвигает равновесие. Это значит, что при изменении общего давления отношение между молярными долями исходного вещества и продукта реакции изменяется. Пусть, например, происходит диссоциация молекулы двуокиси азота N_2O_4 на две молекулы NO_2. Записываем реакцию в виде

$$2NO_2 - N_2O_4 = 0.$$

Коэффициентами реакции будут $\nu_{NO_2} = 2$, $\nu_{N_2O_4} = -1$, так что реакция идет с увеличением числа молей. Закон действующих масс гласит:

$$\frac{c_{NO_2}^2}{c_{N_2O_4}} = p^{-1} K(T).$$

При уменьшении общего давления число молекул NO_2 увеличивается, т. е. увеличивается процент распавшихся молекул N_2O_4 в равновесной смеси. Таким образом, если реакция идет с увеличением числа молей, $|\nu_3| > \nu_1 + \nu_2$, то понижение общего давления ей благоприятствует, а повышение давления — препятствует. В случае реакций, идущих с уменьшением числа молей, $|\nu_3| < \nu_1 + \nu_2$, изменение общего давления действует в обратном направлении.

§ 69. Тепловая диссоциация атомов

Мы упоминали ранее о происходящей при очень высоких температурах тепловой диссоциации атомов. Когда температура достигает таких высоких значений, что тепловая энергия kT оказывается сравнимой с энергией, которую нужно затратить

на вырывание электрона из электронной оболочки атома (энергии ионизации), то происходит тепловая ионизация атомов. Атомы диссоциируют на положительно заряженный ион и электроны, которые образуют соответствующие идеальные газы. Наряду с процессом ионизации происходит и обратный процесс — рекомбинация, — в ходе которого ион и электрон соединяются в нейтральный атом. Таким образом, при очень высокой температуре в веществе идут две реакции:

$$A \to I^+ + e,$$
$$I^+ + e \to A,$$

где A означает атом и I^+ — ион (для простоты мы ограничиваемся случаем однократной ионизации). Если в системе поддерживаются постоянные условия, температура и давление, то в ней установится равновесное состояние, при котором число ионизаций равно числу рекомбинаций. Система, в которой происходит равновесная реакция

$$A \rightleftarrows I^+ + e,$$

в принципе ничем не отличается от системы, в которой идет равновесная химическая реакция. Для нее может быть написан закон действующих масс в виде

$$\frac{c_{I^+} c_e}{c_A} = p^{(\nu_A - \nu_{I^+} - \nu_e)} K(T) = \frac{K(T)}{p}, \tag{69,1}$$

где c_e, c_{I^+}, c_A — молярные доли электронного, ионного и атомного газов. Константа $K(T)$ равна

$$\ln K(T) = \frac{5}{2} \ln kT + j_e - \frac{\Delta\varepsilon_0}{kT}. \tag{69,2}$$

В формуле (69,2) все величины, относящиеся к иону и атому, сократились, поскольку различием в массе иона и атома можно пренебречь. Химическая постоянная электронного газа равна

$$j_e = \ln\left[\left(\frac{2\pi m_e}{h^2}\right)^{3/2}\right].$$

Величина $\Delta\varepsilon_0$ представляет энергию ионизации атома.

Таким образом,

$$\frac{c_{I^+} c_e}{c_A} = \frac{1}{p} e^{\left(\frac{5}{2} \ln kT + j_e - \frac{\Delta\varepsilon_0}{kT}\right)} = \frac{K(T)}{p}. \tag{69,3}$$

Вместо молярных долей удобнее ввести другую, более наглядную величину, именуемую степенью диссоциации. Пусть α-я часть атомов испытывает диссоциацию, так что из N атомов возникает $N(1+\alpha)$ частиц. Величина α, характеризующая

долю ионизовавшихся атомов, называется степенью диссоциации. Очевидно, имеем

$$c_{I^+}=\frac{\alpha}{1+\alpha},\quad c_e=\frac{\alpha}{1+\alpha},\quad c_A=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Подставляя молярные доли, выраженные через степень диссоциации в (69,3), находим

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}=\frac{K}{p},$$

откуда

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p}{K}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p}{(kT)^{5/2}}\cdot\left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)^{3/2}\exp\frac{\Delta\varepsilon_0}{kT}}}. \qquad (69,4)$$

Из последней формулы видно, что степень диссоциации быстро растет с температурой. Оценки числовых значений величин, входящих в предэкспоненциальный множитель в знаменателе, показывают, что последний весьма мал.

Поэтому, если только $\Delta\varepsilon_0/kT$ не очень велико, все подкоренное выражение, а с ним и α — порядка единицы. Это означает, что при kT, сравнимых с энергией ионизации, газ оказывается практически нацело ионизованным:

$$\alpha\approx 1;\quad c_{I^+}\approx\frac{1}{2};\quad c_e\approx\frac{1}{2};\quad c_A\approx 0.$$

Степень ионизации растет также с понижением общего давления. Последнее находится в полном соответствии со сказанным в конце § 68 для реакции, идущей с увеличением числа молей.

Известным приложением формулы (69,4) является применение ее к разъяснению на первый взгляд весьма странной особенности спектра солнечной атмосферы. В астрофизике был разработан метод исследования спектров, исходящих из различных слоев солнечной атмосферы (хромосферы). Исследования показали, что в более глубоких областях атмосферы, в которых температура выше, степень диссоциации паров кальция ниже, чем степень их диссоциации во внешних, более холодных слоях. В случае кальция потенциал ионизации составляет 6 *эв*. Степень ионизации α при 6000° К и давлении $p=1$ *атм* составляет всего 8%, тогда как при той же температуре и давлении 10^{-2} *атм* она достигла 65%. Объяснение заключается в том, что благодаря влиянию предэкспоненциального члена, содержащего p в формуле (69,4), увеличение степени диссоциации с уменьшением давления идет быстрее, чем уменьшение ее с понижением температуры при переходе от более глубоких к поверхностным слоям солнечной атмосферы.

ГЛАВА X

СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 70. Последовательный учет тождественности элементарных частиц

Мы неоднократно уже указывали ранее, что классические представления оказались недостаточными для изучения движения атомных систем и должны быть заменены представлениями квантовой теории. В главе I мы привели те минимальные сведения из квантовой теории, которые были необходимы для предыдущего изложения. Однако для более глубокого разбора тех изменений, которые вносит квантовая теория в статистическую физику, необходимо остановиться еще на некоторых важных результатах квантовой теории.

Как мы уже подчеркивали ранее, для статистической физики основное значение имеют два положения квантовой механики:

1) существование дискретных состояний системы;

2) принцип тождественности элементарных частиц.

Дискретность квантовых состояний учитывалась нами с самого начала. Нами было установлено, когда необходимо учитывать дискретный характер энергетических уровней, а когда их можно приближенно считать распределенными непрерывно, а также выявлено и влияние дискретности энергетического спектра на поведение статистических систем. Однако последовательный учет тождественности частиц нами до сих пор произведен не был. Правда, состояния, отличающиеся друг от друга только перестановкой частиц, мы считали одним состоянием. Для этого мы произвели деление фазового пространства на число возможных перестановок частиц. Такое деление представляло простейшую попытку учета тождественности частиц. Деление на $N!$ производилось, в сущности, еще до появления квантовой теории. В противном случае, как мы уже указывали в § 37, из статистики получались неправильные выражения для термодинамических функций. Соображения, основанные на принципе тождественности элементарных частиц, до некоторой

степени оправдали деление функции состояний на $N!$. Однако непоследовательность этой операции очевидна. Действительно, мы считали вначале, что все частицы отличимы друг от друга, так что их можно в принципе последовательно перенумеровать, приписать каждой частице определенный номер или метку. Исходя из этой точки зрения, мы провели подсчет возможных состояний системы, состоящей из N независимых частиц, интегрируя по координатам и импульсам первой, второй и так далее частиц. После этого мы, в противоречие с исходной предпосылкой о возможности нумерации частиц, объявили часть состояний, отличающихся друг от друга только перестановкой частиц, совершенно тождественными и потребовали, чтобы каждое из них учитывалось один раз.

Опыт и теория показывают, однако, что тождественность атомных частиц имеет гораздо более глубокий характер. Полная тождественность атомных частиц приводит к тому, что теряет физический смысл первая из произведенных нами операций — нумерация частиц. Не имеет смысла называть одну из частиц первой, другую — второй и так далее и интегрировать по их состояниям, поскольку нет никаких физических различий между первой, второй и так далее частицами. Если назвать первой частицу, находящуюся в начальный момент в определенном состоянии, то в следующий момент уже нельзя было бы утверждать, что в этом состоянии находится именно первая частица, так как отличить первую частицу от «не первой» было бы невозможно. Поэтому нужно с самого начала отказаться от попытки различать между собой отдельные атомные частицы, т. е. от принятой нами характеристики системы атомных частиц [1].

Мы посмотрим сейчас, к каким изменениям в статистическом распределении приводит последовательный учет полной тождественности атомных частиц. Все дальнейшие рассуждения будут относиться только к одноатомному идеальному газу.

§ 71. Другой метод вывода статистического распределения

Для вывода статистического распределения в газе с учетом принципа тождественности элементарных частиц мы прибегнем к особому приему, могущему служить прекрасной характеристикой гибкости и общности статистических методов. Чтобы сделать различие между классическим и квантовым рассмотрением особенно рельефным, мы сначала еще раз выведем

---

[1]) Исключения составляют так называемые системы локализованных частиц, отделенных друг от друга непроницаемыми барьерами. Такие системы мы рассматривать не будем.

классическое распределение (распределение Максвелла) с помощью этого метода.

Предположим, что молекулы в газе могут находиться в индивидуальных квантовых состояниях с энергиями поступательного движения ε_1, ε_2, ε_3, ... (для удобства рассуждений мы будем пока считать уровни энергии дискретными). В газе имеется некоторое распределение частиц по состояниям, так что в первом состоянии находится n_1 частиц, во втором n_2 частиц и т. д. С классической точки зрения мы должны описывать состояния газа следующим образом:

частицы № 1, 2, 3, ..., n_1 находятся в состоянии с энергией ε_1,

частицы № n_1+1, ..., n_1+n_2 находятся в состоянии с энергией ε_2,

частицы № n_1+n_2+1, ..., $n_1+n_2+n_3$ находятся в состоянии с энергией ε_3 и т. д.

Далее, выберем в качестве квазизамкнутой подсистемы все частицы, находящиеся в некотором произвольно выбранном квантовом состоянии с энергией ε_k. Все остальные газовые частицы, находящиеся в других энергетических состояниях, при этом образуют некоторый термостат.

Выбор в качестве подсистемы группы частиц, находящихся в данном состоянии, находится в полном согласии с теми требованиями, которым должна удовлетворять квазизамкнутая подсистема (§ 13). Действительно, в результате столкновений частицы, обладающие энергией ε_k, переходят в другие состояния. Наоборот, благодаря тому же механизму в это состояние попадают другие молекулы, ранее имевшие отличную от ε_k энергию и принадлежавшие, следовательно, к термостату. Если число молекул, входящих или выходящих из подсистемы в единицу времени, мало́ по сравнению с числом частиц, в нем находящихся, то можно считать, что взаимодействие между подсистемой и термостатом является слабым. Это условие будет удовлетворено, если столкновения между частицами, вызывающие соответствующие переходы, происходят достаточно редко, т. е. когда газ разрежен. Поскольку взаимодействие подсистемы с термостатом состоит в переходе частиц из подсистемы в термостат и обратно, выбранная нами подсистема представляет пример подсистемы с переменным числом частиц. Отличие ее от общего случая подсистемы с переменным числом частиц и переменной энергией состоит в том, что энергия каждой частицы в подсистеме фиксирована. Однако энергия подсистемы, слагающаяся из энергии всех содержащихся в ней частиц, также, разумеется, изменяется с изменением числа частиц в ней.

Во избежании недоразумений подчеркнем, что сейчас мы говорим не о состояниях реально существующей системы, а о состояниях условно введенной подсистемы. Нашей подсистемой является совокупность частиц с определенной энергией, находящихся в различных местах газа и не связанных между собой, а не какая-либо единая система.

В процессе изменения состояния реальной системы изменяется число частиц, попадающих в состояние с данной энергией ε_k. В этом смысле изменяется состояние нашей подсистемы. Энергия подсистемы равна

$$\varepsilon = \varepsilon_k n_k, \tag{71,1}$$

где n_k — число частиц в подсистеме. Величина ε изменяется вместе с изменением n_k.

Для того чтобы полностью характеризовать состояние выбранной нами подсистемы, нужно знать среднее число частиц в подсистеме, т. е. среднее число частиц, находящихся на выбранном нами уровне энергии. Для вычисления можно воспользоваться общей формулой (59,11), дающей среднее число частиц в подсистеме с переменным числом частиц. В нашем специальном случае эту формулу можно существенно упростить. Нам не нужно вести двойного суммирования по возможным значениям энергии и числа частиц, так как в нашей системе значение энергии однозначно определяется числом содержащихся в ней частиц по формуле (71,1). При суммировании по возможным значениям числа частиц в подсистеме мы автоматически производим суммирование по возможным значениям ее энергии. С этим упрощением, в сущности, и был связан сделанный нами выбор подсистемы. Таким образом, среднее число частиц в подсистеме $\bar{n}_k$ выражается формулой

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k} \left(e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k} \Omega(n_k), \tag{71.2}$$

где вместо ε мы подставили ее выражение по формуле (71,1).

Суммирование в (71,2) ведется по всем возможным значениям числа частиц в подсистеме n_k. Для фактического проведения суммирования в формуле (71,2) необходимо знать явное выражение для статистического веса (числа состояний) $\Omega(n_k)$ состояния системы, когда в ней содержится n_k частиц. В квазиклассической статистике, когда все частицы можно последовательно пронумеровать, состояния нашей системы всегда будут вырожденными, если только она содержит более одной частицы данного сорта. Действительно, если в системе содержится N одинаковых частиц, то она может находиться в различных

состояниях, отличающихся друг от друга перестановкой частиц. Пусть, например, в нашем газе имеются две молекулы № 1 и 2 с энергией ε_k. В первом состоянии молекула № 1 находится в точке *1*, а молекула № 2 в точке *2*, во втором состоянии они переставлены местами. В обоих состояниях энергия подсистемы одинакова и равна $2\varepsilon_k$. Таким образом, имеется два состояния системы с энергией $2\varepsilon_k$ или, иными словами, состояния системы двукратно вырождены. В общем случае состояния системы, содержащей n_k частиц, являются $n_k!$ — кратно-вырожденными.

Если мы не хотим считать различными состояния, отличающиеся только перестановкой частиц (что заведомо привело бы нас к неправильным выражениям для термодинамических функций), то для Ω следует воспользоваться общей формулой (1,26) и разделить полный объем фазового пространства на число возможных перестановок молекул $n_k!$ и размер ячейки $\hbar^3$.

Объем фазового пространства, отвечающего одному квантовому состоянию с энергией ε_k, равен, очевидно, $\hbar^3$. Поэтому окончательно для $\Omega(n_k)$ получаем

$$\Omega(n_k)=\frac{1}{n_k!}. \tag{71,3}$$

Подставляя выражение (71,3) в формулу (71,2), находим

$$\bar{n}_k=kT\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sum_{n_k=0}^{N}\frac{1}{n_k!}\left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{\theta}}\right)^{n_k}. \tag{71,4}$$

Число частиц, входящих в состав подсистемы n_k, может изменяться от нуля до полного числа частиц в газе N. Однако вероятность того, что все частицы газа соберутся в одно энергетическое состояние, бесконечно мала. Поэтому при n_k, близких к N, члены суммы (71,4) также бесконечно малы и сумма быстро сходится. Мы не совершим поэтому ошибки, если заменим верхний предел N в сумме бесконечностью. Это соответствует добавлению к сумме бесконечно малых слагаемых. При такой замене сумма (71,4) обращается в простой ряд:

$$\sum_{n_k=0}^{\infty}\frac{1}{n_k!}\left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{\theta}}\right)^{n_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x, \tag{71,5}$$

где через x мы временно обозначили $e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{\theta}}$. Таким образом,

$$\bar{n}_k=kT\frac{\partial}{\partial\mu}\ln e^x=kT\frac{\partial}{\partial\mu}e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}=e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}. \tag{71,6}$$

В частности, если состояния молекулы и ее энергия изменяются непрерывным образом, что всегда справедливо в клас-

сической статистике, то вместо данного уровня энергии ε_k нужно рассматривать состояния с энергией, лежащей между ε и $\varepsilon+\delta\varepsilon$. При этом вместо числа частиц в данном квантовом состоянии n_k нужно выражение для среднего числа частиц с энергией между ε и $\varepsilon+\delta\varepsilon$, которое мы обозначим через dn. Очевидно,

$$dn = \bar{n}\frac{d\gamma}{h^3} = e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}\frac{d\gamma}{h^3}, \qquad (71,7)$$

где $d\gamma$ — объем фазового пространства, отвечающий энергии между ε и $\varepsilon+\delta\varepsilon$ и $d\gamma/h^3$ — число состояний с этой энергией. Формула (71,7) совпадает с распределением Максвелла в той форме, которая была ему придана в формуле (60,10).

В следующих параграфах мы воспользуемся статистическим распределением (71,2) для получения квантовых законов распределения молекул в идеальном газе.

В заключение заметим, что описанный здесь метод вывода распределения Максвелла — Больцмана часто называется методом ячеек в фазовом пространстве.

§ 72. Квантовые распределения для идеального газа

Как мы только что подчеркнули, из принципа тождественности частиц следует, что нельзя различать между собой отдельные микроскопические частицы — электроны, фотоны, протоны и другие элементарные частицы, а также атомы и молекулы [1]).

Последовательно проводя точку зрения тождественности частиц, следует отказаться от нумерации частиц. При этом нельзя больше говорить «о двух состояниях, отличающихся перестановкой двух частиц» или «об $n!$ совпадающих состояниях, отличающихся перестановкой n частиц». Мы должны говорить о «состоянии с энергией ε_k, в котором находятся соответственно две частицы или n_k частиц».

Вместо того чтобы указывать состояние всего газа, задав номера частиц, находящихся в различных энергетических состояниях, следует указать число частиц в этих состояниях, т. е. указать, что имеется

n_1 частиц в состоянии с энергией ε_1,

n_2 частиц в состоянии с энергией ε_2.

[1]) В последнем случае тождественны между собой действительно одинаковые атомы или молекулы, которые ведут себя идентично во всех возможных силовых полях. Поэтому атомы или молекулы, отличающиеся по какому-либо признаку, например, содержащие ядра разных изотопов или находящиеся в разных вращательных состояниях, нужно считать частицами совершенно разного сорта.

Таким образом, описание состояния газа оказывается менее детальным, чем в классической статистике.

Поскольку нельзя говорить о перестановке частиц внутри данного состояния, теряет смысл деление на $n!$ Каждое состояние, независимо от числа частиц, в нем находящихся, имеет равный статистический вес, а именно вес, равный единице.

Изменение методики подсчета состояний приводит к существенному изменению вида статистического распределения. Для получения последнего мы воспользуемся методом предыдущего параграфа. Среднее число частиц в состоянии с энергией ε_k дается формулой

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial\mu} \ln \sum_{n_k} \left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k} \Omega(n_k). \qquad (72,1)$$

Теперь, однако, в (72,1) нужно подставить иное значение $\Omega(n_k)$. Поскольку состояние системы, содержащее любое число частиц $0 \ll n_k < \infty$, является невырожденным, и необходимость в делении на $n_k!$ отпадает, для числа состояний системы, содержащей n_k частиц, вместо (71,3) имеем

$$\Omega(n_k) = 1. \qquad (72,2)$$

При этом мы вновь считали $\Delta\gamma = h^3$. Подставляя это значение $\Omega(n_k)$ в (72,1), находим

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial\mu} \ln \sum_{n_k} \left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k}. \qquad (72,3)$$

Суммирование ведется по числу частиц в состоянии с энергией ε_k. При выполнении суммирования нужно различать два вида частиц, о которых речь шла в § 1: частицы, не подчиняющиеся принципу запрета, и частицы, подчиняющиеся принципу запрета.

В первом случае на число частиц, находящихся в индивидуальном состоянии, не накладывается никаких ограничений. Число их может принимать все целые значения между нулем и полным числом частиц в системе. Таким образом,

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial\mu} \ln \sum_{n_k=0}^{N} \left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k}. \qquad (72,4)$$

Заменяя верхний предел суммы на бесконечный, получаем

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial\mu} \ln \sum_{n_k=0}^{\infty} \left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k}. \qquad (72,5)$$

Если имеет место неравенство

$$e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}} < 1, \tag{72,6}$$

то сумма в (72,5) представляет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию и может быть без труда вычислена. Именно,

$$\sum_{n_k=0}^{\infty}\left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k} = \frac{1}{1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}},$$

откуда

$$\bar{n}_k = kT\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\frac{1}{1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{kT}}-1}. \tag{72,7}$$

Формула (72,7) дает среднее число частиц идеального газа, находящихся в состоянии с энергией ε_k, если частицы не подчиняются принципу запрета. К этому классу частиц относятся атомы, имеющие спин, равный нулю, молекулы насыщенных соединений также со спином, равным нулю, и кроме того, как будет показано ниже, световые кванты. Распределение (72,7) носит название распределения Бозе — Эйнштейна.

Заметим, что, поскольку сходимость суммы (72,5) должна иметь место всегда и при любых значениях энергии, в частности, при $\varepsilon_k=0$, наряду с неравенством (72,6) должно также иметь место неравенство

$$e^{\frac{\mu}{kT}} < 1. \tag{72,8}$$

Неравенство (72,8) показывает, что у частиц, подчиняющихся распределению Бозе — Эйнштейна, парциальный потенциал должен быть существенно отрицательной величиной:

$$\mu < 0. \tag{72,9}$$

Напомним, что в распределении Больцмана μ также существенно отрицательная величина, но всегда весьма большая по абсолютному значению (ср. § 60).

В случае частиц, подчиняющихся принципу запрета, число частиц n_k, могущих одновременно находиться в индивидуальном квантовом состоянии, не может превышать единицы. Следовательно, возможные значения n_k ограничены двумя: $n_k=0$ и

$n_k = 1$. Заменяя верхний предел суммирования в формуле (72,1) на единицу, имеем

$$\bar{n}_k = kT\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sum_{n_k=0}^{1}\left(e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}\right)^{n_k} = kT\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left(1+e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}}\right) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{kT}}+1}. \quad (72,10)$$

Распределение (72,10) представляет распределение по состояниям частиц идеального газа в случае, когда частицы подчиняются принципу запрета. Распределение (72,10) получило название распределения Ферми — Дирака.

Во всех случаях, встречающихся на практике, расстояния между уровнями энергии поступательного движения столь малы по сравнению с тепловой энергией kT, что энергетический спектр можно считать непрерывным. Тогда вместо среднего числа частиц на k-м энергетическом уровне нужно ввести среднее число частиц dn с энергией, лежащей между ε и $\varepsilon+\delta\varepsilon$. Очевидно, $dn = \bar{n}\frac{d\gamma}{h^3}$, где $d\gamma/h^3$ — число состояний, отвечающее энергии в интервале ε, $\varepsilon+\delta\varepsilon$. Подставляя среднее значение числа частиц, находящихся в одном состоянии, из (72,7) и (72,10), находим

$$dn = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\pm 1}\frac{d\gamma}{h^3}, \quad (72,11)$$

где знак плюс относится к распределению Ферми, а знак минус — к распределению Бозе. Входящие в распределения Бозе и Ферми парциальные потенциалы определяются из условия нормирования

$$\int dn = N, \quad (72,12)$$

выражающего постоянство числа частиц, находящихся в данном объеме.

Сравнивая вывод распределений Бозе и Ферми с выводом распределения Максвелла — Больцмана, мы видим прежде всего, что оба эти распределения представляют конкретизацию распределения Гиббса для случая идеального газа, частицы которого подчиняются законам квантовой механики. Имеется глубокое различие в законах статистического распределения у частиц, подчиняющихся законам классической и квантовой механики. Это различие связано не с каким-либо изменением статистических законов и даже не с учетом дискретного характера энергетического спектра, но с коренным изменением метода вычисления статистического веса состояний. Различие в методах подсчета статистических весов в классической статистике и в обеих квантовых статистиках связано с принципом тождествен-

ности частиц и обусловлено глубоким различием между поведением классических механических систем и поведением атомных частиц.

Различие в статистических весах в статистиках Бозе и Ферми обусловлено исключительно различием в законах квантовой механики, которым подчиняются частицы с целым и полуцелым спином. В этом смысле часто применяющаяся терминология «классическая статистика» Максвелла — Больцмана или «квантовые статистики» Ферми — Дирака и Бозе — Эйнштейна должна быть признана крайне неудачной. В действительности речь идет не о различных видах статистики, а о различных законах квантовой механики, которым подчиняются соответствующие частицы, о двух видах квантовой механики: для частиц с целым и с полуцелым спином. Статистические законы во всех случаях остаются совершенно неизменными. Если частицы подчиняются законам квантовой механики, предусматривающим частицы с целым спином, применение законов статистики приводит к распределению Бозе — Эйнштейна для частиц идеального газа. Если же частицы подчиняются законам квантовой механики, предусматривающим частицы с полуцелым спином, та же самая статистика приводит к распределению Ферми — Дирака. Наконец, если частицы подчиняются законам классической механики, для системы частиц получается распределение Максвелла — Больцмана.

Естественно возникает следующий вопрос. Опыт показывает, что движение атомных частиц описывается законами квантовой механики. Поэтому поведение любого идеального газа, состоящего из атомных частиц, должно описываться одним из квантовых распределений (72,7) или (72,10). Не является ли поэтому распределение Максвелла — Больцмана просто ошибочным, не относящимся к реально существующим газам? Отрицательный ответ может быть дан даже без анализа распределений (72,7) и (72,10), на основании общих соображений. Законы квантовой механики являются законами движения частиц, включающими законы классической механики как первое приближение. При известных условиях законы классической механики являются достаточно хорошим приближением; в пределах этого приближения можно считать, что движение частиц подчиняется законам классической механики. Следовательно, должны существовать и такие условия, когда распределение Максвелла — Больцмана с достаточной степенью точности отражает фактическое поведение идеальных газов. Газы, подчиняющиеся классической статистике, мы будем называть невырожденными. Наоборот, идеальные газы, в поведении которых существенно сказываются квантовые законы, объединяются общим названием вырожденных газов.

Нашей первоочередной задачей является обсуждение вопроса о том, в каких условиях газ является вырожденным, а в каких — невырожденным, или, иначе говоря, когда можно считать применимой классическую статистику, а когда необходимо учитывать законы квантовой статистики. При решении этого вопроса мы будем исходить из того, что правильными, более точными законами являются распределения Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака. Поэтому законом Максвелла — Больцмана можно пользоваться только тогда, когда различие между ним и квантовыми распределениями (72,7) и (72,10) становится достаточно малым.

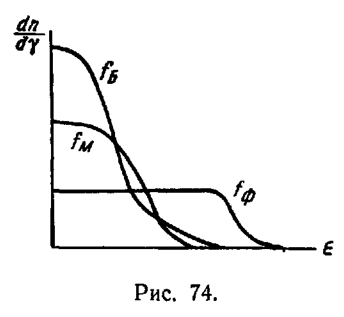


Рис. 74.

Сравнивая распределения (72,7), (72,10) и (71,6), видим, что они имеют в общем случае существенно различный характер (рис. 71). Однако это различие исчезает, если выполняется неравенство

$$e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} \gg 1. \qquad (72,13)$$

Все три распределения имеют одинаковый функциональный вид при выполнении неравенства (72,13). Несовпадение кривых на рис. 74 при больших ε связано с тем, что этим кривым отвечают разные μ. В этом случае единицей в знаменателе в (72,7) и (72,10) можно пренебречь и распределения Бозе и Ферми автоматически превращаются в распределение Максвелла — Больцмана. Таким образом, неравенство (72,13) служит условием применимости классической статистики.

Для выполнения неравенства (72,13) при энергиях $\varepsilon \approx kT$ (при $\varepsilon > kT$ экспонента быстро возрастает), нужно, чтобы $e^{-\frac{\mu}{kT}} \gg 1$. Предположим, что последнее неравенство выполнено, так что при всех энергиях

$$\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} \pm 1} \approx e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}.$$

Тогда из условия нормирования (72,12) находим

$$N = \int e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}} \frac{dp_x\,dp_y\,dp_z\,dV}{h^3} = \frac{2\pi (2m)^{3/2} V}{h^3} e^{\frac{\mu}{kT}} \int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon =$$

$$= V\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} e^{\frac{\mu}{kT}},$$

откуда

$$e^{-\frac{\mu}{kT}} = \frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}. \tag{72,14}$$

Таким образом, критерием законности применения классической статистики является выполнение неравенства

$$e^{-\frac{\mu}{kT}} = \frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} \gg 1. \tag{72,15}$$

При выполнении обратного неравенства наступает вырождение и пользоваться распределением Максвелла — Больцмана нельзя.

Мы видим, что критерий (72,15) содержит несколько параметров. Прежде всего в него входит масса частиц m — чем больше масса, тем больше левая часть неравенства. Далее, в неравенство (72,15) входит плотность газа и его температура T. Как и следовало ожидать, неравенство (72,15) выполнено при высоких температурах и нарушается при низких температурах, так что при низких температурах должны сказываться квантовые эффекты. Выполнению неравенства (72,15) способствует также малая плотность газа.

В обратном предельном случае, когда

$$\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} \ll 1, \tag{72,16}$$

наступает вырождение газов. Таким образом, вырождение может быть обусловлено следующими причинами:

1) малая масса частиц,

2) большая плотность газа,

3) низкая температура.

Чтобы составить себе представление о порядке величин, рассмотрим два численных примера.

Пусть у нас имеется газ электронов. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ *г*. Предположим, что плотность электронного газа такова, что в 1 *см*^{3} содержится $6 \cdot 10^{22}$ частиц; тогда оказывается, что условие вырождения выполнено вплоть до температур порядка 2000—3000° К.

Уже в случае атомного водорода, легчайшего из газов, вырождение может наступать только при очень низких температурах и высоких плотностях, так как масса молекулы водорода в 3700 раз больше массы электрона. Эти температуры и плотности лежат значительно ниже температур и плотностей, при которых становится существенным взаимодействие между атомами, приводящее газ к конденсации.

Таким образом, только в случае электронного газа большой плотности вырождение может иметь место при сравнительно высоких температурах.

Другим случаем квантового (вырожденного) газа является случай фотонного газа, свойства которого будут обсуждаться в § 76.

Мы не останавливаемся здесь более подробно на свойствах распределения Бозе и Ферми, поскольку целесообразнее обсудить их на реальных физических системах (электронный и фотонный газы).

Для всех обычных газов отличие квантовой статистики от классической при не особенно больших значениях температур и плотности оказывается ничтожно малым. Оба квантовых распределения, Бозе и Ферми, с большой степенью точности можно заменить распределением Максвелла. Отсутствие какого-либо различия между статистикой Бозе и Ферми станет понятным, если учесть, что среднее число частиц $\bar{n}_k$ в отдельном квантовом состоянии по порядку величины оценивается следующими соотношениями:

$$\bar{n}_k \approx e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{kT}} \approx e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1.$$

В невырожденном газе при высокой температуре и малой плотности газа плотность заполнения состояний очень мала. В каждом состоянии в среднем находится гораздо меньше одной частицы, поэтому не играет роли, могут ли в одно состояние попасть две и более частиц или нет, все равно они практически никогда не попадают в него даже попарно.

Несмотря на то, что к атомным газам всегда можно применять классическую статистику (точнее, квазиклассическую статистику, поскольку учет дискретных уровней энергии и введение множителя $1/N!$ являются неизбежными), только создание квантовой статистики позволило решить целый ряд важнейших физических вопросов. Некоторые из них будут изложены в последующих параграфах.

§ 73. Излучение черного тела

Статистическая теория излучения сыграла огромную роль в создании квантовой теории. Классическая электромагнитная теория света, объяснявшая широкий круг явлений, связанных с распространением света, и получившая всеобщее признание в конце XIX века, в начале XX века столкнулась с непреодолимыми трудностями в связи с вопросом об излучении света, и в частности, с вопросом о тепловом излучении. Под тепловым излучением мы понимаем всю совокупность излучения, испускаемого нагретым телом.

Как известно, характер излучения света, и в частности, его интенсивность, а также зависимость интенсивности от частоты

(спектральный состав излучения) определяются температурой и природой излучающего тела.

Имеется, однако, случай, когда спектральный состав излучения не зависит от природы излучателя и определяется исключительно его температурой. Речь идет о так называемом равновесном излучении.

Представим себе некоторую замкнутую полость со стенками, не проводящими тепла и поддерживаемыми при определенной температуре T. Стенки полости будут излучать и поглощать электромагнитные волны.

Поскольку все электромагнитное излучение заключено в замкнутую полость, через некоторое время в системе установится состояние статистического равновесия. Стенки полости будут излучать в единицу времени столько же электромагнитной энергии, сколько они поглощают. В полости будет существовать неизменная во времени система стоячих электромагнитных волн.

Плотность энергии соответствующего электромагнитного поля внутри полости будет выражаться формулой (12,6) ч. I:

$$\rho = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}.$$

Тепловое излучение будет содержать разнообразные частоты. Плотность энергии $\rho(\nu)$, приходящаяся на данный интервал частоты $d\nu$, будет, очевидно, различна для разных частот. Плотность энергии излучения данной частоты будет зависеть также от температуры излучающих стенок T. Таким образом,

$$\rho = \rho(\nu, T).$$

Простое термодинамическое рассуждение показывает, однако, что $\rho(\nu, T)$ не зависит от природы излучателя, в частности, стенок (их поглощательных и излучательных свойств, состояния поверхности и т. п.).

Рассмотрим две полости, стенки которых нагреты до одинаковой температуры, но сделаны из различных материалов. Предположим, что спектральная плотность энергии излучения зависит от природы излучателя и различна в обеих полостях. Тогда, соединив обе полости, можно нарушить равновесие. Излучение будет переходить в ту полость, в которой его плотность меньше. В результате этого плотность излучения в этой полости вырастет, стенки полости будут поглощать больше излучения, а их температура повысится; между стенками обеих полостей возникает разность температур, которая может быть использована для получения полезной работы.

Сделанное нами предположение приводит к выводу о возможности самопроизвольного нарушения равновесия в замкнутой

системе и возможности построения вечного двигателя второго рода, что, как известно, невозможно. Таким образом доказано, что спектральное распределение плотности энергии равновесного излучения $\rho(\nu, T)$ является универсальной функцией частоты ν и температуры T.

Изучение излучательных и поглощательных свойств материальных тел привело Кирхгофа к установлению весьма важной теоремы, получившей название теоремы Кирхгофа.

Назовем излучательной способностью произвольного тела величину $E(\nu)$, равную энергии, излучаемой 1 *см*^{2} поверхности тела за 1 секунду с частотой между ν и $\nu+d\nu$ в единичном интервале частоты.

Назовем, далее, поглощательной способностью тела долю всей падающей на 1 *см*^{2} поверхности тела лучистой энергии с частотой между ν и $\nu+d\nu$, которая поглощается внутри тела[1]) в единичном интервале частоты.

Теорема Кирхгофа гласит, что отношение излучательной и поглощательной способностей $E(\nu)/A(\nu)$ является универсальной функцией частоты и температуры тела, но не зависит ни от природы и свойств тел, ни от их геометрических размеров, т. е.

$$\frac{E(\nu)}{A(\nu)} = f(\nu, T). \tag{73,1}$$

Оказывается, что универсальная функция $f(\nu, T)$ связана простым соотношением с плотностью энергии равновесного излучения $\rho(\nu, T)$ (T — температура тела):

$$f(\nu, T) = \frac{c}{4\pi}\rho(\nu, T),$$

где c — скорость света. Итак, теорема Кирхгофа может быть записана в виде

$$\frac{E(\nu)}{A(\nu)} = \frac{c}{4\pi}\rho(\nu, T).$$

Доказательство теоремы Кирхгофа, имеющее весьма общий характер, может быть найдено в любом курсе теории света[2]).

Поскольку поглощательная способность тела может быть найдена без особого труда из измерения коэффициентов поглощения и геометрических соображений, нахождение вида функции $\rho(\nu, T)$ представляло весьма существенный интерес. Из формулы Кирхгофа (73,1) вытекает, что особое значение имеет

[1]) Не смешивать с коэффициентом поглощения, который характеризует поглощение света на единицу пути в веществе. Величина поглощательной способности характеризует поглощение во всем объеме тела.

[2]) См., например, М. Планк, Теория теплового излучения, ОНТИ, 1935.

тело с поглощательной способностью $A(\nu)$, равной единице. Такое тело поглощает всю падающую на него электромагнитную энергию любых частот. Оно было названо абсолютно черным телом.

Для абсолютно черного тела имеем

$$E(\nu)=\frac{c}{4\pi}\rho(\nu,\ T). \qquad (73,2)$$

Формула (73,2) показывает, что абсолютно черное тело имеет бо́льшую излучательную способность, чем все другие тела. Его излучательная способность является универсальной функцией частоты ν и температуры T.

Измеряя излучательную способность абсолютно черного тела, можно на опыте определить вид функции $\rho(\nu,\ T)$.

Разумеется, все тела, существующие в природе, не являются абсолютно черными. Какова бы ни была природа поверхности тела, некоторая часть падающей на нее лучистой энергии отражается. Однако абсолютно черным телом является замкнутая полость, заполненная излучением, которую мы рассматривали выше. Действительно, все излучение, испускаемое стенками полости, ими же и поглощается. Если сделать в полости маленькое отверстие, то изучая спектральное распределение лучистой энергии, выходящей из отверстия, можно экспериментально найти функцию $\rho(\nu,\ T)$. Размеры отверстия должны быть достаточно малы, чтобы утечка энергии через отверстие не приводила к существенному отклонению от состояния равновесия. С помощью подобного рода модели абсолютно черного тела было экспериментально изучено спектральное распределение энергии при различных температурах.

На рис. 75 (см. стр. 656) приведены типичные кривые подобного рода. По оси абсцисс отложена длина волны выходящего излучения, по оси ординат — плотность энергии излучения $\rho(\lambda T)$ с длиной волны, лежащей между λ и $\lambda+d\lambda$. Плотность энергии излучения с данной длиной волны связана с $\rho(\nu,\ T)$ следующим соотношением:

$$\rho(\nu,\ T)\,d\nu=\rho(\lambda,\ T)\,d\lambda.$$

Учитывая, что

$$d\nu=c\left|\frac{d\lambda}{\lambda^2}\right|,$$

имеем

$$\rho(\lambda,\ T)=\frac{c}{\lambda^2}\rho(\nu,\ T).$$

Различные кривые на рис. 75 относятся к различным температурам. Все кривые обнаруживают характерный ход. При больших длинах волн плотность излучения увеличивается с

ростом λ, при некоторой длине волны $\lambda_{макс}$ она проходит через максимум и вновь стремится к нулю со стороны коротких волн. Положение максимума сдвигается в сторону коротких волн по мере повышения температуры.

§ 74. Классическая теория черного излучения

Перейдем теперь к вычислению функции спектрального распределения $\rho(\nu, T)$.

Электромагнитное излучение в замкнутой полости образует систему стоячих волн. Такое электромагнитное поле было рассмотрено нами в § 38 ч. I, где было показано, что оно может быть заменено набором эквивалентных осцилляторов поля. Энергия поля оказалась равной сумме энергий осцилляторов. В случае излучения в полости ему, в соответствии со сказанным выше, следует приписать температуру, равную температуре излучающих стенок T. Мы можем поэтому сказать, что каждой стоячей волне в полости соответствует один осциллятор с частотой ν и энергией $\varepsilon(\nu, T)$, зависящей от частоты, а также от температуры T.

Каждый из осцилляторов, заменяющих систему стоячих волн, может находиться в различных состояниях и иметь различную энергию $\varepsilon(\nu, T)$. Нас, однако, будет интересовать не мгновенная, а средняя энергия осцилляторов $\overline{\varepsilon(\nu, T)}$; здесь усреднение ведется по всем возможным состояниям осциллятора. Энергия стоячих волн в единице объема полости, частоты которых заключены между ν и $\nu+d\nu$, численно равна суммарной средней энергии всех осцилляторов, заменяющих нормальные колебания и имеющих частоты в том же интервале. Если $g(\nu)d\nu$ — число осцилляторов, то сказанное можно записать в виде

$$\rho(\nu, T)d\nu=\overline{\varepsilon(\nu, T)}g(\nu)d\nu. \tag{74,1}$$

Число собственных колебаний было найдено нами в § 38 ч. I. В случае электромагнитных волн нужно только учесть, что они являются поляризованными и могут иметь два направления поляризации. Формула (38,22) ч. I дает число колебаний с частотой между ν и $\nu+d\nu$ для каждого вида поляризации. Для обоих видов поляризации число колебаний нужно удвоить:

$$\rho(\nu, T)\,d\nu=\frac{8\pi\bar{\varepsilon}}{c^3}\nu^2\,d\nu. \tag{74,2}$$

Формула (74,2) при своем выводе не потребовала привлечения каких-либо представлений из квантовой теории, она была получена до создания квантовой теории. Для средней энергии

осциллятора $\bar{\varepsilon}$ было подставлено ее классическое значение

$$\bar{\varepsilon} = kT,$$

и плотность равновесного излучения при температуре T записывалась в виде (закон Рэлея — Джинса)

$$\rho(\nu, T)\,d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2\,d\nu. \qquad (74,3)$$

Бессмысленность формулы (74,3) совершенно очевидна. Действительно, она показывает, что плотность энергии электромагнитного поля в замкнутой полости монотонно возрастает с увеличением частоты. Поскольку в полости могут быть представлены колебания всех частот, в частности $\nu \to \infty$, формула (74,3) приводит к бесконечно большой плотности энергии при $\nu \to \infty$:

$$E = \int_0^\infty \rho(\nu, T)\,d\nu \to \infty.$$

Полученный результат означает, что источники излучения, заключенные в полости, должны были бы излучать до тех пор, пока вся заключенная в них тепловая энергия не перешла бы в излучение поля и их температура не упала бы до абсолютного нуля. Так, например, если излучателем, помещенным в полость, служит раскаленное твердое тело, то из полученного результата вытекает, что равновесие в системе излучатель — электромагнитное поле установится только после того, как раскаленное тело охладится до абсолютного нуля.

Этот вывод имеет простой смысл. Согласно закону равномерного распределения энергии все степени свободы равноправны и в равновесном состоянии на каждую из них приходится равная энергия. Тепловая энергия, заключенная в излучателе — кристалле, содержащем N атомов, может считаться распределенной между $3N$ осцилляторами. Электромагнитное поле в полости также можно рассматривать как набор осцилляторов. Однако число последних неизмеримо больше, чем $3N$. Волновые числа возможных стоячих волн в замкнутой полости, имеющей форму куба, должны удовлетворять условиям:

$$f_1 = \frac{\pi k_1}{L}, \quad f_2 = \frac{\pi k_2}{L}, \quad f_3 = \frac{\pi k_3}{L},$$

где L — размер стороны куба, а k_1, k_2, k_3 — числа, пробегающие ряд целых значений от нуля до бесконечности. Эти условия эквивалентны условиям (50,11) для кристалла, но в последнем случае значения k_1, k_2 и k_3 ограничены числом частиц N. Таким образом, число стоячих электромагнитных волн в полости и

соответствующее число осцилляторов электромагнитного поля в бесконечно большое число раз больше, чем число осцилляторов, требуемых для описания теплового движения в кристалле. В состоянии равновесия вся энергия должна содержаться у поля, поскольку на каждый осциллятор должна приходиться одинаковая энергия.

Этот результат находится в полном противоречии с опытными данными. Опыт показывает, что плотность тепловой энергии, заключенной в излучателе, неизмеримо выше, чем плотность энергии электромагнитного поля; например, при $T=300°$ K плотность тепловой энергии в твердом теле оказывается в 10^{14} раз больше измеренной плотности энергии внутри полости с излучением. Что касается спектрального распределения плотности энергии, выражаемого формулой (74,3), то оно оказывается в согласии с измеренным распределением энергии в спектре черного тела для малых частот, удовлетворяющих условию $h\nu \ll kT$. Наоборот, при больших частотах, когда $h\nu \gg kT$, рост $\rho(\nu, T)$ с частотой ν происходит гораздо медленнее, чем по закону ν^2.

Таким образом, закон равномерного распределения при его применении к проблеме излучения черного тела приводит к полному расхождению теории с экспериментом в области больших частот. Исторически это было первым хорошо изученным случаем полной непригодности классических представлений. Вопиющее противоречие с опытом, к которому привела классическая статистика, побудило современников называть создавшееся положение «ультрафиолетовой катастрофой». Выход из противоречия был найден в создании квантовой теории.

§ 75. Формула Планка

Простейший, хотя и не самый прозрачный с физической стороны способ получения функции спектрального распределения $\rho(\nu, T)$ с учетом квантования заключается в следующем.

Подставим в формулу (74,2) значение средней энергии осциллятора поля, вычисленное по теории квантового осциллятора. При этом опустим нулевую энергию осциллятора $h\nu/2$, выбирая ее за начало отсчета энергии. Тогда

$$\varepsilon = nh\nu \tag{75,1}$$

и

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu \sum n e^{-\frac{h\nu n}{kT}}}{\sum e^{-\frac{h\nu n}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{75,2}$$

Подставив (75,2) в формулу (74,2), находим следующее выражение для средней энергии электромагнитного поля в пустоте в единице объема для частоты, лежащей между ν и $\nu+d\nu$:

$$\rho(\nu,\ T)\,d\nu = \frac{8\pi h\nu^3\,d\nu}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)} \tag{75,3}$$

Формула (75,3) получила название формулы Планка. Формула Планка впервые была выведена полуэмпирически, поскольку неизвестна была формула (75,2) для энергии осциллятора. Наоборот, последняя формула и входящая в нее постоянная Планка h были найдены из опыта.

В двух предельных случаях, $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ и $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$, формула Планка упрощается. В первом случае

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$$

и формула (75,3) сводится к виду

$$\rho(\nu,\ T)\,d\nu \approx \frac{8\pi kT}{c^3}\,\nu^2\,d\nu, \tag{75,4}$$

т. е. переходит в классическую формулу (74,3) для средней плотности энергии черного излучения.

При $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \approx e^{-\frac{h\nu}{kT}},$$

так что

$$\rho(\nu,\ T)\,d\nu \approx \frac{8h\nu^3}{c^3}\,e^{-\frac{h\nu}{kT}}\,d\nu. \tag{75,5}$$

Последняя формула носит название закона Вина.

Переходя от $\rho(\nu,\ T)$ к спектральному распределению плотности излучения по длинам волн $\rho(\nu,\ T)$, можем написать формулы (75,3), (75,4) и (75,5) в следующем виде:

$$\rho(\lambda,\ T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}, \tag{75,6}$$

$$\rho(\lambda,\ T) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \qquad \left(\frac{hc}{kT\lambda} \ll 1\right), \tag{75,7}$$

$$\rho(\lambda,\ T) \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\,e^{-\frac{hc}{kT\lambda}} \qquad \left(\frac{hc}{kT\lambda} \gg 1\right). \tag{75,8}$$

Кривые, отвечающие формуле (75,6), изображены на рис. 75. При больших длинах волн $\rho(\lambda, T)$ падает с увеличением волны, как $1/\lambda^4$; при малых длинах волн $\rho(\lambda, T)$ стремится к нулю, как $\frac{1}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{kT\lambda}}$. Функция $\rho(\lambda, T)$ имеет максимум при длине волны $\lambda_{\text{макс}}$, которую можно найти из условия

$$\frac{\partial \rho(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0$$

или

$$-\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} + \frac{hce^{\frac{hc}{kT\lambda}}}{\lambda^7 kT\left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right)^2} = 0.$$

Обозначив через x величину $\frac{hc}{kT\lambda_{\text{макс}}}$, можно записать последнее уравнение в виде

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = 5.$$

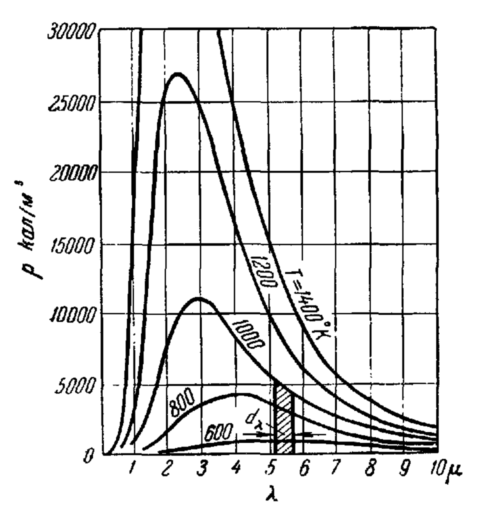


Рис. 75.

Решение этого трансцендентного уравнения дает

$$x = 4{,}96,$$

$$\lambda T \approx 2 \cdot 10^{-3} \frac{hc}{k}. \qquad (75{,}9)$$

Формула (75,9) показывает, что положение максимума плотности энергии черного излучения смещается в сторону малых длин волн с ростом температуры. Это — так называемый закон смещения.

Из закона смещения может быть определено значение квантовой постоянной h. После выбора ее значения формула Планка оказывается в отличном согласии с экспериментальными данными.

§ 76. Статистика фотонного газа

Как мы уже указывали в вводной главе, современная квантовая теория в согласии с опытными фактами утверждает, что наряду с волновыми свойствами излучение обладает также и свойствами корпускулярными. Хотя с точки зрения обыденных

представлений невозможно сочетать в одном объекте свойства волны и частицы, для объяснения различных оптических явлений приходится пользоваться то волновым, то корпускулярным аспектом. Так, например, в явлениях интерференции или дифракции проявляется волновая природа излучения, тогда как при фотоэффекте или рассеянии жестких рентгеновских лучей проявляется корпускулярная природа. С корпускулярной точки зрения излучение можно рассматривать как поток световых квантов, или фотонов, движущихся в пространстве со скоростью света c. Фотоны возникают при излучении и исчезают при поглощении света атомами, причем их энергия равна $\varepsilon = \Delta E$, где ΔE — разность энергетических уровней излучающей системы.

Все фотоны движутся в пустоте с одинаковой скоростью, но различные фотоны могут иметь разную энергию и импульс. Энергия и импульс фотонов связаны между собой соотношением

$$\varepsilon = pc, \tag{76,1}$$

которое является общей формулой, связывающей эти величины для любого объекта, движущегося со скоростью света. Энергия и импульс фотона зависят от частоты по формулам:

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega, \tag{76,2}$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}. \tag{76,3}$$

Подобно другим материальным частицам фотоны обладают моментом количества движения (ср. § 1, а также ч. V).

Оказывается, что при излучении механический момент излучающей системы (атома, молекулы) должен обязательно уменьшаться на величину, кратную $\hbar$. Соответствующий момент уносится улетающим фотоном. Таким образом, момент количества движения, выраженный в единицах $\hbar$, является целочисленным. Как и все другие частицы с целочисленным моментом, фотоны подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна.

С корпускулярной точки зрения равновесное излучение, заполняющее замкнутую полость, нужно рассматривать как некоторый фотонный газ, заполяющий объем сосуда V. Частицы фотонного газа беспорядочно движутся по всем направлениям в сосуде, причем направления их полета изменяются при столкновениях со стенками сосуда. Взаимодействие между фотонами отсутствует. Поэтому фотонный газ по своим свойствам должен быть сходен с обычным молекулярным идеальным газом, заполняющим замкнутый сосуд.

Однако наряду со сходством между фотонным и молекулярным газами имеется и очень существенное различие. Наиболее существенное отличие фотонного газа от молекулярного

заключается в том, что в случае фотонного газа нельзя говорить о фиксированном числе частиц. В отличие от обычных частиц (электронов, протонов или атомов), фотоны могут создаваться или исчезать в момент испускания или поглощения света атомами. Поэтому число фотонов, находящихся в полости, нельзя считать заданным.

Другим отличием фотонов от газовых молекул является то, что все они движутся с одинаковыми скоростями. В действительности, однако, это свойство фотонного газа не связано со специфической природой фотонов. При очень больших значениях кинетической энергии любых частиц их скорости приближаются к скорости света и различия в скорости отдельных частиц постепенно сглаживаются. Поэтому последнее отличие фотонного газа от молекулярного является несущественным. Важно лишь, что в фотонном газе, так же как в молекулярном, имеется некоторое распределение частиц по импульсам и энергиям.

Наконец, между фотонным газом и газом обычных частиц существует еще одно отличие, имеющее скорее принципиальный, нежели практический характер. Как было показано в § 6 и 16, установление распределения молекул по скоростям (или импульсам) тесно связано с взаимодействием между ними, происходящим при молекулярных столкновениях. Фотоны же вовсе не сталкиваются между собой. Равновесное распределение между фотонами может установиться только в том случае, если в полости превращение фотонов одних частот в фотоны других частот. При этом число фотонов не должно оставаться постоянным, но должна сохраняться их полная энергия. Таким телом, в частности, могут служить стенки полости, заполненной «фотонным газом».

Мы покажем сейчас, что, исходя из представлений о фотонном газе, можно с таким же успехом прийти к формуле Планка, как и при использовании волновой картины.

С корпускулярной точки зрения функцию $\rho(\omega, T)$ можно интерпретировать следующим образом.

Пусть в интервале частот ω, $\omega + d\omega$ или соответствующем ему интервале энергий фотонов ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ в единице объема имеется $d\Omega$ квантовых состояний фотонов. Пусть, далее, среднее число фотонов в каждом состоянии равно $\bar{n}(\varepsilon)$. Тогда среднее число фотонов с энергией между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ равно

$$d\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)\,d\Omega. \tag{76,4}$$

Их средняя энергия равна $\varepsilon\bar{n}(\varepsilon)\,d\Omega$. Но эта энергия представляет не что иное, как энергию излучения с частотой между ω и $\omega + d\omega$. Таким образом,

$$\rho(\varepsilon, T)\,d\omega = \varepsilon\bar{n}(\varepsilon)\,d\Omega. \tag{76,5}$$

Нашей задачей является нахождение $\bar{n}(\varepsilon)$, т. е. среднего числа частиц в газе с переменным числом частиц. Учитывая, что фотоны являются частицами со спином, равным единице, для $\bar{n}(\varepsilon)$ можно написать распределение Бозе — Эйнштейна.

Необходимо, однако, учесть особенность фотонного газа, связанную с возможностью поглощения и излучения фотонов стенками сосуда или материальными телами, находящимися внутри полости.

Число частиц в фотонном газе является переменным и зависит от состояния газа. Поэтому в отличие от обычного молекулярного газа свободная энергия фотонного газа зависит не только от переменных V и T, но также и от числа частиц в газе N. При данном значении V и T число фотонов в состоянии равновесия будет иметь такое значение N_0, чтобы свободная энергия $F(V, T, N_0)$ имела минимальное значение. Таким образом, можно утверждать, что равновесное состояние фотонного газа имеет место при выполнении равенства

$$\frac{\partial F(V, T, N)}{\partial N} = \mu(V, T) = 0. \tag{76,6}$$

При этом мы воспользовались формулой (60,3′).

Уравнение (76,6) показывает, что парциальный потенциал равновесного фотонного газа равен нулю.

Таким образом, среднее число частиц фотонного газа в единице объема, обладающих энергией ε, в силу (72,7) и (76,6) следует написать в виде

$$\bar{n}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}. \tag{76,7}$$

Число фотонов с энергией между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ равно

$$d\bar{n}(\varepsilon) = \frac{2}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \frac{4\pi p^2\,dp}{h^3} = \frac{8\pi}{h^3c^3} \frac{\varepsilon^2\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}. \tag{76,8}$$

Множитель 2 введен для того, чтобы учесть факт двукратного вырождения состояний фотонов с заданным импульсом p. Данному значению p отвечают два состояния, соответствующих двум возможным поляризациям света.

Полное число фотонов в равновесном излучении может быть найдено интегрированием (76,8) по всем значениям ε.

Воспользовавшись формулой (76,2), можно выразить ε через частоту ω. Делая эту замену и переходя от числа фотонов к их энергии, находим

$$\rho(\omega, T)\,d\omega = \varepsilon\bar{n}(\varepsilon)\,d\Omega = \frac{8\pi}{h^3c^3} \frac{\varepsilon^3\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} = \frac{\hbar\omega^3\,d\omega}{\pi^2c^3\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1\right)}, \tag{76,9}$$

т. е. формулу Планка.

Нужно подчеркнуть, что если бы к фотонам было применено распределение Больцмана, а не распределение Бозе — Эйнштейна, то вместо формулы Планка получилась бы формула (75,5), справедливая только при $\frac{\hbar\omega}{kT} \gg 1$. Действительно, подставляя вместо $\bar{n}(\varepsilon)$ из (76,7) выражение $\bar{n} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$, вместо формулы Планка (76,9) получим закон Вина (75,5).

Таким образом, применять к фотонам классическую статистику нельзя. Область применимости классической статистики к фотонному газу ограничена условием $\frac{\hbar\omega}{kT} \gg 1$. Это условие является обратным по сравнению с условием применимости классической статистики к осцилляторам электромагнитного поля. Итак, при больших частотах (или низких температурах) у излучения преобладают корпускулярные свойства; при малых частотах (или высоких температурах), наоборот, преобладают волновые свойства.

Энергия электромагнитного излучения или энергия фотонного газа в единице объема получается из (76,9) интегрированием по всем частотам:

$$u = \int_0^\infty \rho(\omega, T)\, d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3\, d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Для вычисления интеграла введем новую переменную, $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$. Тогда

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1}.$$

Значение последнего интеграла получено в приложении IV:

$$\int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Поэтому окончательно имеем

$$u = \frac{\pi^3 k^4 T^4}{15\, (\hbar c)^3} = \alpha T^4. \qquad (76,10)$$

Энергия черного излучения оказывается пропорциональной четвертой степени абсолютной температуры (закон Стефана — Больцмана).

Входящая в (76,10) постоянная α содержит только универсальные константы $\hbar$, c и k. Закон Стефана — Больцмана широ-

ко применяется в теплотехнике для расчета излучающей способности нагретых поверхностей. Хотя излучатели, встречающиеся на практике, не являются черным телом, применение закона Стефана — Больцмана приводит к хорошим результатам для всех твердых излучателей, кроме металлов. У последних излучаемая энергия растет, как более высокая степень температуры.

Полная энергия излучения в объеме V равна

$$E = \alpha V T^4. \qquad (76,11)$$

Найдем, далее, свободную энергию черного излучения. По формуле (30,12) имеем

$$F = -T \int \frac{E\,dT}{T^2} = -\frac{\alpha V T^4}{3}. \qquad (76,12)$$

Энтропия излучения равна

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4}{3}\alpha V T^3. \qquad (76,13)$$

Давление излучения p равно

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{\alpha T^4}{3} = \frac{E}{3V}. \qquad (76,14)$$

Давление излучения впервые было обнаружено П. Н. Лебедевым. Это открытие имело большое принципиальное значение. Оно позволило доказать невозможность построения вечного двигателя второго рода, в котором в качестве рабочего вещества использовалось бы излучение.

Световое давление, весьма малое в земных условиях, приобретает чрезвычайно важное значение в астрофизике. Как показывает формула (76,14), световое давление чрезвычайно быстро увеличивается с ростом температуры. При весьма высоких температурах, имеющих место в астрофизических условиях, световое давление оказывается бо́льшим, чем газовое давление, и играет основную роль в ряде разнообразных астрофизических процессов.

Наконец, простое вычисление показывает, что термодинамический потенциал Φ излучения равен нулю:

$$\Phi = F + pV = 0.$$

Это согласуется с нашим требованием $\mu = 0$ для фотонного газа.

§ 77. Свойства жидкого гелия II

Весьма интересным примером макроскопической системы, в которой сказываются квантовые эффекты, является жидкий гелий II — единственная система, которая остается жидкой вплоть до абсолютного нуля. Все остальные жидкости отвердевают при температурах, которые слишком высоки для того, чтобы при них могли проявляться квантовые эффекты.

Как показывает опыт, жидкий гелий может существовать в двух модификациях, получивших название жидкого гелия I и жидкого гелия II, резко отличающихся друг от друга по своим физическим свойствам.

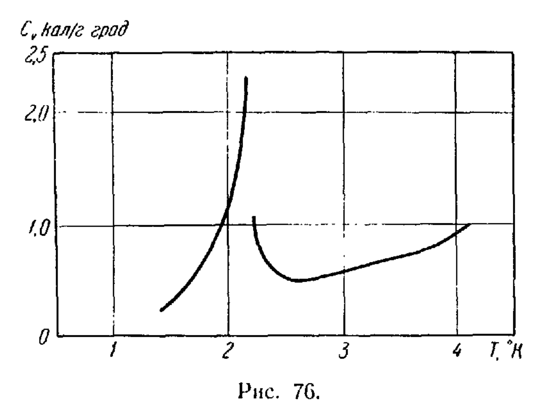


Рис. 76.

На рис. 67 (см. стр. 608) изображена фазовая диаграмма гелия. Из нее видно, что при давлениях, лежащих выше 30 *атм*, жидкий гелий I, представляющий высокотемпературную модификацию, при понижении температуры переходит в твердое состояние. Однако при давлениях ниже 30 *атм* гелий не затвердевает ни при каких температурах и остается жидким вплоть до $T = 0°$. На кривой *II* происходит фазовый переход гелия I в другую модификацию. Об этом свидетельствует ход теплоемкости (рис. 76), плотности и ряда других свойств гелия в зависимости от температуры. Теплоемкость претерпевает скачок в точке перехода; на кривой плотности в этой точке наблюдается излом и т. д. Поскольку скрытая теплота фазового перехода гелий I — гелий II равна нулю, этот фазовый переход является типичным фазовым переходом второго рода.

Жидкий гелий II обладает целым рядом замечательных свойств, обусловленных его квантовой природой. Некоторые из них будут описаны ниже[1]).

[1]) См. книгу В. Кеезом, Гелий, ИЛ, 1949 (изложению которой мы следуем).

Л. Д. Ландау была предложена статистическая теория жидкого гелия II, основанная на известных допущениях о характере энергетического спектра этой системы. В части V будут изложены новые работы по теории гелия II. В этих работах предположения, положенные в основу теории Ландау, выведены из общих положений квантовой механики системы частиц.

Рассмотрим некоторую порцию жидкого гелия II, заключенную в сосуд. Вся жидкость как целое представляет квантовую систему; ее возможные значения энергии образуют некоторый энергетический спектр. При очень низких температурах пренебрегать дискретным характером энергетического спектра жидкости нельзя, несмотря на то, что жидкость является макроскопической системой. Нам нужно определить характер энергетического спектра макроскопической квантовой системы при весьма малых энергиях возбуждения, когда система может находиться только на уровнях энергии, близких к нормальному уровню, на котором она находится при абсолютном нуле.

Точное вычисление энергетических уровней системы, состоящей из большого числа сильно взаимодействующих частиц, пока не представляется возможным. Это в равной мере относится к жидкому гелию II, к кристаллам, к взаимодействующим между собой электронам и любым другим системам взаимодействующих частиц. Тем не менее можно установить некоторые общие свойства энергетического спектра таких систем при малых энергиях возбуждения. В частности, подобным энергетическим спектром будет обладать и жидкий гелий II, в котором малость энергии возбуждения обеспечивается температурой.

Основным свойством энергетического спектра всякой макроскопической системы при малых энергиях возбуждения является то, что энергию возбуждения можно разложить на совокупность независимых «элементарных возбуждений».

Рассмотрим для конкретности энергетический спектр упругих колебаний кристалла или жидкости при малых энергиях возбуждения. Мы видели ранее, что движение атомов твердого тела можно разложить на независимые, не взаимодействующие друг с другом упругие волны, распространяющиеся по всему объему тела. Единственным различием между кристаллом и квантовой жидкостью является то, что в первом возможно распространение как продольных, так и поперечных волн, тогда как в жидкости могут существовать только продольные волны (волны сжатия и расширения). Каждая из таких волн несет определенную неизменную энергию, которая и может считаться элементарным возбуждением. Энергию всего тела можно рассматривать как совокупность элементарных возбуждений, т. е. как сумму энергий всех независимых упругих волн, распространяющихся в теле. Из сказанного ясно, что элементарное

возбуждение является энергией возбуждения всего тела как целого, но отнюдь не может быть отнесено к отдельному атому в теле, получившему избыточную по сравнению с другими атомами энергию. Каждое из элементарных возбуждений, представляющих звуковую волну, движется вдоль тела, испытывает отражение от его стенок, движется в новом направлении и т. д. Элементарное возбуждение обладает энергией и импульсом.

Движение всех элементарных возбуждений в теле можно уподобить движению невзаимодействующих квазичастиц, квантов возбуждения, образующих внутри тела идеальный газ. Можно провести полную аналогию между световыми волнами и световыми квантами, с одной стороны, и упругими волнами и квантами возбуждения кристалла, с другой стороны. Подобно тому как световое поле можно трактовать как набор световых квантов (фотонов), поле упругих волн в кристалле можно заменить газом квантов возбуждения, часто называемых фононами.

Следует, однако, сделать существенную оговорку. Эта аналогия, очень удобная для выполнения ряда расчетов, имеет лишь формальный характер. Звуковые кванты не имеют непосредственной физической реальности и служат лишь для математического выражения свойств дискретного набора упругих волн в кристалле, поскольку система независимых упругих волн является приближенной картиной теплового движения в твердом теле. Имея в виду эту оговорку, мы будем в дальнейшем считать, что энергия возбуждения тела представляет энергию квантов возбуждения, заполняющих весь его объем подобно идеальному газу. Энергия квантов возбуждения ε связана некоторой, в общем случае неизвестной функциональной зависимостью с их импульсом p.

Рассмотрим теперь детальнее энергетический спектр в случае жидкого гелия[1]). Основные свойства жидкого гелия можно вывести из некоторых простых предположений о виде спектра. Именно, следует предположить, что в гелии II имеются два вида квантов возбуждения — длинноволновые и коротковолновые. Первые кванты, имеющие большую длину волны λ, несут малый импульс $p=\frac{h}{\lambda}$ и малую энергию $\varepsilon(p)$. При малых p можно разложить функцию $\varepsilon(p)$ в ряд по степеням p и написать

$$\varepsilon \approx \text{const} \cdot p. \qquad (77,1)$$

Длинноволновые возбуждения в жидком гелии II представляют упругие продольные волны расширения и сжатия. По-

[1]) К вопросу об энергетическом спектре гелия II мы вернемся в ч. VI. Вопрос о коллективных возбуждениях также будет более подробно разобран в ч. VI.

этому постоянная в (77,1) есть просто скорость c распространения звуковых волн. Таким образом, для длинноволновых квантов можно написать

$$\varepsilon = cp. \tag{77,2}$$

В гидродинамике показывается, что при возникновении в жидкости звуковых волн малой амплитуды она приходит в состояние безвихревого (потенциального) движения. Однако в общем случае течение неидеальной (вязкой) жидкости является вихревым. Поэтому помимо продольных звуковых волн в жидком гелии II должны существовать и другие элементарные возбуждения. Именно, мы будем предполагать, что помимо длинноволновых звуковых квантов возбуждения в гелии II существуют еще и коротковолновые кванты возбуждения, длина волны которых близка к некоторой длине λ_0. Соответствующий импульс коротковолновых квантов близок к $p_0 = \frac{h}{\lambda_0}$, При этом мы примем, что энергия квантов с импульсом p_0 имеет минимальное значение по сравнению со всеми квантами, импульсы которых близки к p_0. Иными словами, мы будем считать, что энергия элементарных возбуждений имеет вид кривой, изображенной на рис. 77. Тогда можно сказать, что в жидкости помимо длинноволновых квантов возбуждения, импульс которых близок к нулю, будут существовать еще кванты с импульсом $p \approx p_0$. Энергия таких квантов может быть написана в виде

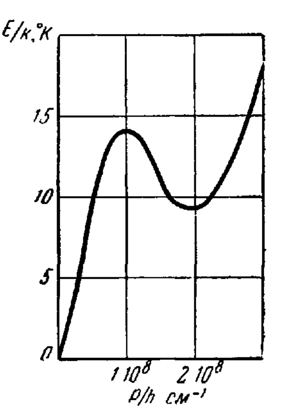


Рис. 77.

$$\varepsilon \approx \varepsilon(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2\mu}, \tag{77,3}$$

где $\varepsilon(p_0)$ и μ — постоянные, значения которых должны быть определены из опыта. В разложении (77,3) по степеням $(p - p_0)$ член, пропорциональный первой степени этой разности, отсутствует, поскольку, по предположению, $\varepsilon(p)$ имеет в точке $p = p_0$ минимум. Постоянная во втором члене обозначена через μ, чем подчеркивается, что энергия коротковолновых квантов формально выглядит так же, как энергия обычных частиц.

Разумеется, нет никаких оснований заранее предполагать, что в спектре возбуждения квантовой жидкости преимущественно существуют кванты двух указанных типов. Однако введение подобного вида спектра оправдывается тем, что с его помощью оказывается возможным количественное объяснение всех своеобразных явлений, имеющих место в гелии II.

Вместе с тем нужно иметь в виду, что кроме коротко- и длинноволновых квантов возбуждения в жидкости имеются и кванты промежуточных длин волн, но число таких квантов сравнительно невелико. Кванты возбуждения, как мы только что подчеркивали, движутся по всему объему тела, не взаимодействуя (при малых возбуждениях) друг с другом, подобно частицам идеального газа, заполняющего объем тела. Если длинноволновые кванты возбуждения можно уподобить фотонам, коротковолновые кванты ведут себя, как обычные частицы идеального газа, обладающие массой μ.

Во избежание каких-либо недоразумений, подчеркнем еще раз, что эта аналогия имеет лишь математический характер. В действительности каждый квант возбуждения представляет особый вид движения всех атомов жидкости. Нельзя поэтому представлять коротковолновый квант возбуждения как реальную частицу, движущуюся в жидкости. Однако математическая аналогия между набором квантов возбуждения и идеальным газом позволяет легко найти термодинамические функции жидкого гелия.

§ 78. Статистическая теория жидкого гелия II

Наличие в жидком гелии II квантов теплового возбуждения означает, с макроскопической точки зрения, существование у него свободной энергии F, которую можно считать слагающейся из свободной энергии, обязанной своим происхождением существованию длинно- и коротковолновых квантов возбуждения:

$$F = F_{д} + F_{к}. \tag{78,1}$$

Напишем выражение для каждого из слагаемых в отдельности.

Свободную энергию длинноволновых квантов $F_{д}$ можем сразу написать по аналогии со свободной энергией твердого тела при низкой температуре, учитывая, что теперь могут существовать только продольные волны, а поперечные отсутствуют. Таким образом,

$$3N = \frac{4\pi V \nu^3_{макс}}{3c^3}, \tag{78,2}$$

где N — число атомов жидкости в объеме V, $\nu_{макс}$ — максимальная частота звуковых волн и c — скорость звука.

Поэтому, подставляя в (53,7) значение $\theta_c = \frac{h\nu_{макс}}{k}$ и учитывая (78,2), находим для $F_{д}$:

$$F_{д} = -\frac{4}{45}\frac{\pi^5 (kT)^4 V}{h^3 c^3}. \tag{78,3}$$

Несколько более сложным является вычисление $F_к$. Коротковолновые кванты ведут себя подобно частицам идеального газа. Их энергию, определяемую формулой (77,3), при достаточно низких температурах, когда еще можно говорить о независимых элементарных возбуждениях, можно считать большой по сравнению с kT. Для этого во всяком случае должно выполняться неравенство

$$\varepsilon(p_0) \gg kT.$$

Мы увидим ниже, что последнее неравенство действительно выполнено в жидком гелии II. Поэтому функция распределения коротковолновых квантов имеет вид классического больцмановского распределения. Свободная энергия классического идеального газа (с учетом тождественности частиц) имеет вид

$$F_к = -N_к kT \ln\left(\frac{eV}{N_k}\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{d\gamma}{h^3}\right) \tag{78,4}$$

$$(d\gamma = dp_x\,dp_y\,dp_z),$$

где $N_к$ — число коротковолновых квантов возбуждения. Значение $N_к$ не является, однако, определенной величиной, но зависит от температуры жидкости. Оно возрастает с увеличением возбуждения, т. е. с повышением температуры жидкости[1]). При данной температуре число коротковолновых квантов возбуждения определяется из условия минимума свободной энергии:

$$\frac{\partial F_k}{\partial N_k} = 0. \tag{78,5}$$

Подставляя (78,4) в условие (78,5), находим для числа коротковолновых квантов выражение

$$N_k = V\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{d\gamma}{h^3}. \tag{78,6}$$

Подставляя N_k в (78,4), находим для свободной энергии

$$F_к = -kTV\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{d\gamma}{h^3}. \tag{78,7}$$

Вычислим интеграл, входящий в (78,7). Очевидно, имеем

$$\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\frac{d\gamma}{h^3} = 4\pi\int e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\mu kT}}\frac{p^2\,dp}{h^3} =$$

$$= 4\pi e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}\int e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\mu kT}}\frac{p^2\,dp}{h^3}.$$

---

[1]) Зависимость $N_к$ от температуры лишний раз позволяет убедиться в том, что трактовка элементарных возбуждений как квазичастиц имеет условный характер.

Пределы интегрирования по импульсу кванта возбуждения точно не определены. Поскольку, однако, подынтегральное выражение быстро убывает с возрастанием разности $(p-p_0)$ и при $\frac{(p-p_0)^2}{2\mu} \gg kT$ практически обращается в нуль, можно распространить пределы интегрирования до $\pm\infty$. Тогда имеем

$$\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \frac{d\gamma}{h^3} = 4\pi e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\mu kT}} \frac{p^2\,dp}{h^3}.$$

Поскольку подынтегральная функция обращается в нуль при $\frac{(p-p_0)^2}{2\mu} \gg kT$, медленно меняющуюся функцию p^2 можно вынести за знак интеграла, взяв ее в точке $p = p_0$. При этом

$$\int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \frac{d\gamma}{h^3} = 4\pi p_0^2 e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\mu kT}} \frac{dp}{h^3} = \frac{4\pi p_0^2 \sqrt{2\pi\mu kT}}{h^3} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}. \qquad (78,8)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$F_{\text{к}} = -\frac{4\pi\sqrt{2\pi\mu}\,(kT)^{3/2} V p_0^2}{h^3} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}, \qquad (78,9)$$

$$N_{\text{к}} = \frac{4\pi p_0^2 V \sqrt{2\pi\mu kT}}{h^3} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}. \qquad (78,10)$$

Подставляя значения $F_{\text{д}}$ и $F_{\text{к}}$ из (78,3) и (78,9) в (78,1), находим выражение для свободной энергии жидкого гелия II:

$$F = -\frac{4}{45}\frac{\pi^5 (kT)^4 V}{h^3 c^3} - \frac{4\pi\sqrt{2\pi\mu}\,(kT)^{3/2} V p_0^2}{h^3} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}. \qquad (78,11)$$

Соответственно энтропия и теплоемкость гелия II равны

$$S = \frac{16}{45}\frac{\pi^5 k^4 T^3 V}{h^3 c^3} + \frac{4\pi\sqrt{2\pi\mu}\,p_0^2 k^{1/2} T^{1/2} V}{h^3}\left\{\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon(p_0)}{kT}\right\} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}, \qquad (78,12)$$

$$C_V = \frac{16}{15}\frac{\pi^5 k^4 T^3 V}{h^3 c^3} + \frac{4\pi\sqrt{2\pi\mu}\,p_0^2 k^{3/2} T^{1/2} V}{h^3}\left\{\frac{3}{4} - \frac{\varepsilon}{2kT} + \frac{\varepsilon^2}{k^2T^2}\right\} e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}}. \qquad (78,13)$$

Мы видим, что все термодинамические величины слагаются из двух частей, обязанных своим происхождением длинноволновым и коротковолновым квантам возбуждения. Первая часть изменяется с температурой по такому же степенному закону,

как и в случае кристаллов, вторая зависит от температуры экспоненциально, т. е. пропорционально $\exp\left\{-\frac{\varepsilon(p_0)}{kT}\right\}$. Значения постоянных были определены из измерений энтропии и теплоемкости гелия II и оказались равными

$$\frac{\varepsilon(p_0)}{k} = 9{,}6^\circ \text{ K}, \quad \frac{p_0}{h} = 12{,}25 \cdot 10^8 \text{ } см^{-1},$$
$$\mu = 0{,}75 m_{\text{He}}.$$

При таком значении постоянных степенная часть теплоемкости и энтропии превышает экспоненциальную при температурах, меньших примерно 1° К. Наоборот, при больших температурах преобладает экспоненциальная (коротковолновая) часть. Температурный ход термодинамических величин находится в полном согласии с опытом.

Самой замечательной особенностью жидкого гелия II, которая была открыта П. Л. Капицей, является присущее ему свойство «сверхтекучести». Именно, измерения вязкости гелия II, протекающего через тонкие щели и капилляры, показали, что она исчезающе мала. Благодаря этому гелий II практически беспрепятственно «проваливается» через тончайшие капилляры. Следствием сверхтекучести гелия II является его необычайно высокая теплопроводность («сверхтеплопроводность»), обнаруженная экспериментально ранее, чем сама сверхтекучесть. Благодаря исчезающей вязкости в гелии II возникают характерные конвекционные потоки, которые позволяют переносить значительные количества тепла в таких условиях, в которых обычная вязкая жидкость, лишенная конвекционного перемешивания, имеет ничтожно малую теплопроводность. Явление сверхтекучести находит полное разъяснение в изложенной выше теории. Оно оказывается тесно связанным с характером энергетического спектра гелия II.

Рассмотрим течение гелия II вдоль некоторой твердой стенки. Для удобства рассуждений перейдем к системе отсчета, в которой гелий покоится, а движется твердая стенка. С точки зрения квантов возбуждения всякий процесс рассеяния энергии, обусловленный вязкостью, можно рассматривать следующим образом. В выбранной нами системе отсчета энергия гелия первоначально задана и определяется количеством элементарных тепловых возбуждений. Взаимодействие между стенкой, увлекающей гелий, и жидкостью приводит к появлению в пристеночном слое жидкости дополнительного внутреннего движения. Это внутреннее движение представляет тепловое движение частиц жидкости. Таким образом, рассеяние энергии состоит в появлении в жидкости квантов возбуждения (теплового движения). Будем считать вначале, что в гелии II не было

первоначально квантов возбуждения, т. е. что его температура T равна нулю. Пусть в гелии возник квант возбуждения с импульсом p и энергией $\varepsilon(p)$. При этом внутренняя энергия гелия станет равной $\varepsilon(p)$. В системе отсчета, в которой гелий течет, а стенка неподвижна, его энергия по правилам преобразования энергии при относительном движении равна

$$E = \frac{mv^2}{2} + \varepsilon(p) + \boldsymbol{pv}, \tag{78,14}$$

где v — скорость течения, $\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия жидкости, а $\varepsilon(p) + \boldsymbol{pv}$ — изменение ее энергии.

При рассеянии энергии кинетическая энергия текущей жидкости может только уменьшаться, т. е. $\varepsilon + \boldsymbol{pv} < 0$. Наименьшее значение величины $(\varepsilon + \boldsymbol{pv})$ достигается при возникновении кванта с импульсом $\boldsymbol{p}$, направленным антипараллельно к $\boldsymbol{v}$. Она равна при этом $\varepsilon - pv$. Следовательно, должно выполняться неравенство

$$\varepsilon - pv < 0$$

или

$$v > \frac{\varepsilon}{p}. \tag{78,15}$$

Последнее означает, что если $\frac{\varepsilon}{p} \neq 0$, в текущем гелии могут возникать кванты возбуждения, и рассеяние энергии может иметь место только при достаточно большой скорости течения. При скорости течения, не удовлетворяющей неравенству (78,15), взаимодействие между стенкой и гелием, сопровождающееся появлением квантов теплового возбуждения, возникать не может.

Из вида энергетического спектра гелия II, представленного на рис. 77 (стр. 665), ясно, что величина $\frac{\varepsilon}{p}$ для гелия II всегда отлична от нуля. Таким образом, при температуре абсолютного нуля жидкий гелий II движется мимо твердой стенки без взаимодействия и рассеяния энергии, если только скорость движения его не превышает $v_0 = \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{\text{мин}}$, где $\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{\text{мин}}$ — минимальное значение отношения $\frac{\varepsilon}{p}$. В этом и состоит явление сверхтекучести.

При $T \neq 0$ все прежние рассуждения остаются в силе и в гелии II не могут возникать новые кванты возбуждения при $v \neq v_0$. Однако уже имеющиеся кванты теплового возбуждения могут взаимодействовать с твердой стенкой.

Оказывается, что в гелии II при $T \neq 0$ возможны два вида движения, которые могут происходить в одной порции жидкости одновременно и независимо друг от друга, — сверхтекучее и

нормальное. Сверхтекучее происходит без вязкости и не сопровождается переносом энергии теплового возбуждения. Нормальное течение происходит так же, как обычное течение жидкости с вязкостью, отличной от нуля. С каждым из видов движения связан перенос части массы гелия. Благодаря этому гелий II можно наглядно, хотя и не строго, рассматривать как смесь двух жидкостей — сверхтекучей и нормальной. Движение сверхтекучей жидкости, несущей часть гелия II при $T \neq 0$, происходит так же, как движение всего гелия II при $T = 0$. Однако при $T \neq 0$ часть массы гелия находится в нормальном состоянии, течет с трением и несет с собой тепло. В опытах с течением гелия через тонкий капилляр проявляются свойства сверхтекучей части. Она вытекает через тончайший капилляр, не испытывая никакого сопротивления. В опытах с движением тел, например, в опытах с колебаниями диска, погруженного в сосуд с гелием, наблюдается взаимодействие с нормальной частью гелия. При этом движение диска происходит как в нормальной жидкости, обладающей вязкостью. Однако масса нормальной жидкости оказывается зависящей от температуры. При $T \to 0$ масса нормальной части гелия II также обращается в нуль.

Одним из замечательных тепловых свойств гелия II является так называемый термомеханический эффект. Термомеханический эффект состоит в том, что при вытекании гелия из сосуда через весьма тонкий капилляр температура гелия, остающегося в сосуде, повышается. Наоборот, при втекании гелия температура в сосуде понижается.

Происхождение термомеханического эффекта понятно из предыдущего. Через тонкий капилляр движется сверхтекучая часть гелия, которая не несет тепловой энергии. При вытекании некоторой сверхтекучей массы гелия из сосуда имевшийся ранее запас тепловой энергии распределяется в оставшейся массе и ее температура повышается. При вытекании имеет место обратное явление: запас тепловой энергии, имевшейся первоначально у гелия в сосуде, распределяется между всем гелием. Величина эффекта возрастает с понижением температуры. Это позволяет использовать термомеханический эффект в гелии для получения сверхнизких температур.

§ 79. Электронный газ в металле при абсолютном нуле

Рассмотрим теперь поведение Ферми — системы — электронного газа при низких температурах. Во втором томе, при изложении квантовой теории металлов мы покажем, что в известном приближении совокупность электронов в металлах можно считать идеальным вырожденным Ферми — газом. Поэтому свойства Ферми — газа представляют очень большой интерес.

Обсудим прежде всего поведение электронного газа при абсолютном нуле. Для этого напишем распределение Ферми, имеющее согласно (72,11) вид·

$$dn = n\frac{d\gamma}{h^3} = 2\cdot 2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}. \tag{79,1}$$

Множитель 2 введен для учета того, что каждому энергетическому уровню отвечает два состояния, в которых могут находиться электроны со спинами, имеющими противоположные ориентации

Перейдем в (79,1) к пределу $T\to 0$. Тогда распределение Ферми, изображенное (при $T\neq 0$) на рис. 74, приобретает вид, представленный на рис 79 и выражаемый формулами

$$n = \begin{cases} 1 & \varepsilon\leqslant\mu\,(T=0)=\varepsilon_{max}, \\ 0 & \varepsilon>\mu\,(T=0)=\varepsilon_{max}, \end{cases} \tag{79,2}$$

где $\mu(T=0)$ означает химический потенциал при абсолютном нуле. Эту величину принято именовать максимальной энергией при абсолютном нуле ε_{max}. Этот результат имеет простой смысл: уровни энергии системы большого числа электронов, свободно движущихся в конечном объеме V, ограниченном непроницаемым энергетическим барьером (стенками), образуют почти непрерывный спектр.

Рассмотрим прежде всего поведение электронов в металле при весьма низких температурах, близких к абсолютному нулю.

Предположим, что все атомы при образовании металла превращаются в ионы, причем каждый атом ионизован однократно. Число свободных электронов в металле будет равно числу атомов Эти электроны движутся совершенно хаотически и образуют электронный газ. Плотность этого газа будет чрезвычайно велика — число частиц в единице объема будет в несколько тысяч раз превышать число частиц в обычном, не очень разреженном газе Тем не менее, мы будем полностью пренебрегать взаимодействием между электронами.

Иными словами, мы будем считать электроны в металле идеальным газом. Оказывается, что теория, основывающаяся на этом предположении, дает объяснение очень большому числу фактов и находится в хорошем количественном согласии с опытом. Это показывает, что в действительности взаимодействие между электронами в металле не играет большой роли. Взаимодействие между электронами компенсируется взаимодействием электронов с ионами решетки. В ч. VI мы подробно осветим вопрос о взаимодействии электронов с ионами решетки и между собой.

Электроны распределяются по всему объему металла равномерно. Уровни энергии системы, состоящей из очень большого числа электронов, образуют почти непрерывный спектр. На каждом уровне энергии согласно принципу запрета может одновременно находиться не более двух электронов с противоположными ориентациями спина. Два электрона в металле будут заполнять самое нижнее энергетическое состояние с энергией,

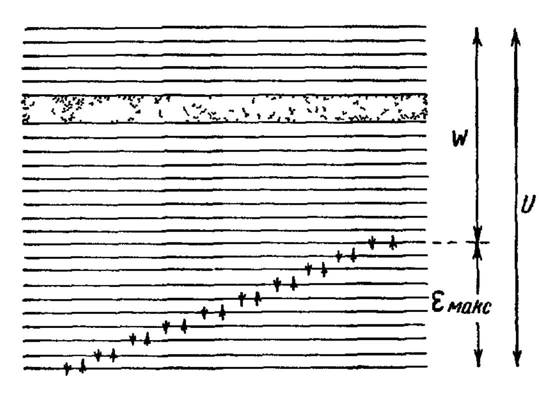


Рис. 78

равной нулю. Третий и четвертый электроны вынуждены уже находиться на первом возбужденном уровне. Следующие электроны располагаются на более высоких энергетических уровнях, причем каждая пара электронов заполняет соответствующий уровень Если полное число электронов в металле равно N, то при абсолютном нуле будут заполнены первые $N/2$ состояния с энергиями $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_{\text{макс}}$. Все остальные состояния с $\varepsilon > \varepsilon_{\text{макс}}$ будут свободны от электронов. Это схематически изображено на рис. 78.

Рис. 79

На рис. 79 представлена функция распределения электронов по состояниям при $T = 0$. Число электронов во всех заполненных состояниях равно двум, в незаполненных оно равно нулю. Очевидно, что благодаря принципу запрета электроны вынуждены попадать в возбужденные энергетические состояния даже при абсолютном нуле.

Найдем энергию $\varepsilon_{\text{макс}}$ последнего, самого высокого из заполненных энергетических состояний электронов при абсолютном нуле. Поскольку уровни энергии электронов в металле распределены почти непрерывно, мы можем написать для числа уровней энергии одного электрона, лежащих в интервале энергии ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ выражение (1,24) ч. III. На каждом уровне энергии

находится два электрона, так что для полного числа заполненных уровней имеем:

$$4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}}} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon = N,$$

откуда

$$N = \frac{8\pi}{3} V \left(\frac{2m\varepsilon_{\text{макс}}}{h^2}\right)^{3/2} = \frac{8\pi V}{3h^3} p^3_{\text{макс}}$$

или

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{79,3}$$

Энергия всех электронов при абсолютном нуле, очевидно, равна

$$E_0 = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}}} \varepsilon \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon = \frac{3}{5} N\varepsilon_{\text{макс}}. \tag{79,4}$$

Средняя энергия отдельного электрона в электронном газе при $T = 0$ составляет $^3/_5$ от максимальной энергии $\varepsilon_{\text{макс}}$.

Подстановка численных значений величин, входящих в (79,3), дает, например, при $\frac{N}{V} \sim 10^{19}$: $\varepsilon_{\text{макс}} = 5$ *эв* или $\varepsilon_{\text{макс}} = 6{,}0 \cdot 10^4$ *град*. Можно найти также максимальную скорость электронов при абсолютном нуле:

$$v_{\text{макс}} = \frac{p_{\text{макс}}}{m} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{\text{макс}}}{m}} = 1{,}39 \cdot 10^8 \text{ см/сек}. \tag{79,3'}$$

Скорости электронов оказываются очень большими даже при абсолютном нуле.

Мы видим, что свойства электронного газа коренным образом отличаются от свойств классического атомного газа.

Энергия электронного газа оказывается пропорциональной числу электронов N в степени $^5/_3$ и объему, заполненному электронным газом, в степени $(-^2/_3)$. Электроны при абсолютном нуле не находятся в состоянии покоя, как это следовало бы ожидать, исходя из классических представлений, а движутся с различными скоростями. Средняя скорость этого движения весьма велика. Несмотря на это, теплоемкость электронного газа при абсолютном нуле оказывается точно равной нулю. Действительно,

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{T=0} = 0,$$

поскольку энергия газа не зависит от температуры.

Электроны, движущиеся в металле, как и всякий другой газ, оказывают давление на стенки сосуда. Для давления газа можно сразу написать выражение (8,2):

$$p = \frac{2mN}{V} \int_0^{\infty} v_x^2 \rho(v_x)\, dv_x = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V}, \tag{79,5}$$

так как все направления движения электронов равноправны и $\overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$. Для $\overline{v^2}$ нужно подставить выражение

$$\overline{v^2} = \frac{2E_0}{mN}, \tag{79,6}$$

где E_0/N — средняя энергия, приходящаяся на один электрон. Тогда получаем:

$$p = \frac{2}{3} \frac{E_0}{V}. \tag{79,7}$$

Этот же результат можно получить и термодинамическим путем.

Подстановка численных значений дает для $\frac{N}{V} = 10^{19}$:

$$p = 2 \cdot 10^5 \text{ атм.}$$

В ходе предыдущих рассуждений мы молчаливо предполагали, что электронный газ является идеальным газом Ферми, в котором можно полностью пренебрегать взаимодействием между частицами. Законность такого допущения может показаться весьма сомнительной, особенно если учесть, что плотность вырожденного газа весьма велика и он состоит из заряженных частиц, для которых взаимодействие медленно убывает с расстоянием.

Предположение об идеальности газа выполнено, если средняя кинетическая энергия электрона весьма велика по сравнению со средней энергией его взаимодействия с другими частицами.

Средняя кинетическая энергия электрона дается формулой (79,4). Энергия взаимодействия двух электронов по порядку величины равна $e^2/\bar{r}$, где $\bar{r}$ — среднее расстояние между ними. Если N/V — число электронов и ионов в единице объема, то среднее расстояние $\bar{r}$ равно по порядку величины

$$\bar{r} \approx \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}.$$

Критерий малости энергии взаимодействия можно записать в виде

$$\frac{e^2}{\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}} \ll \varepsilon_{\text{макс}}.$$

Поскольку $\varepsilon_{\text{макс}} \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{2/3}$, то, производя несложные преобразования, получаем:

$$\frac{N}{V} \gg \left(\frac{e^2 m}{h^2}\right)^3.$$

При большой плотности электронного газа отношение энергии взаимодействия к кинетической энергии может оказаться малым.

Поскольку кинетическая энергия газа растет с плотностью быстрее, чем потенциальная, мы приходим к парадоксальному на первый взгляд результату:

для того, чтобы электронный газ можно было считать идеальным газом, его плотность должна быть достаточно велика.

§ 80. Электронный газ при низких температурах

Рассмотрим теперь свойства электронного газа при температурах, отличных от нуля, но являющихся еще достаточно низкими. Именно, предположим, что температура такова, что kT значительно меньше, чем максимальная энергия электронов при абсолютном нуле $\varepsilon_{\text{макс}}$. В этом случае тепловое возбуждение электронного газа будет сравнительно незначительным. Это означает, что тепловое возбуждение может переводить электроны из энергетических состояний, заполненных при $T = 0$, только в близлежащие более высокие энергетические состояния. Ясно, например, что тепловое возбуждение недостаточно для того, чтобы поднять электрон с уровня энергии $\varepsilon \ll \varepsilon_{\text{макс}}$ на уровень энергии $\varepsilon > \varepsilon_{\text{макс}}$. Его хватает лишь на возбуждение электронов, находящихся на энергетических уровнях, лежащих в узком интервале порядка kT. Часть электронов с этих уровней оказывается переброшенной на уровни, лежащие выше уровня $\varepsilon = \varepsilon_{\text{макс}}$, но отстоящие от него не выше, чем kT.

На рис. 80 схематически изображено тепловое возбуждение при низкой температуре. Часть уровней, лежащих ниже $\varepsilon_{\text{макс}}$, оказывается освобожденной чаще всего от одного из заполняющих их электронов; на уровнях, лежащих выше $\varepsilon_{\text{макс}}$, появляются одиночные электроны. Функция распределения электронов по состояниям изменяется. Если при $T = 0$ она представлялась ломаной кривой (рис. 79), то при низкой, но отличной от нуля температуре она принимает вид, изображенный на рис. 81. Распределение при $T = 0$ показано на рис. 81 ломаной. Падение

кривой при $\varepsilon < \varepsilon_{макс}$ означает, что среднее число электронов на соответствующих уровнях оказывается меньшим единицы — электроны переходят на уровни, лежащие выше $\varepsilon_{макс}$. Та область энергий, в которых среднее число электронов на каждом уровне оказывается меньшим единицы, но большим нуля, называется зоной размытости функции распределения. Из рис. 81

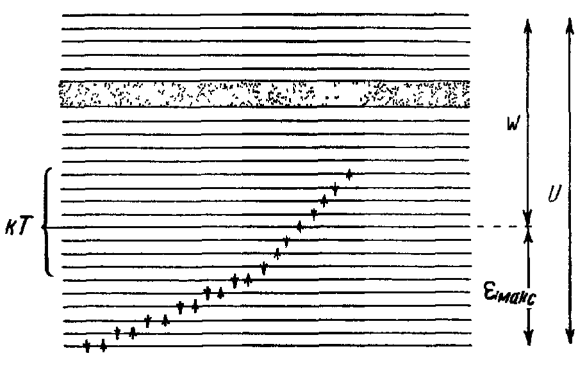


Рис. 80.

и сказанного выше ясно, что ширина зоны размытости по порядку величины равна kT. Число электронов, попадающих на уровни, лежащие выше $\varepsilon_{макс}$, весьма мало по сравнению с полным числом электронов. Точно так же число электронов, находящихся на уровне энергии «без пары», составляет малую долю от полного числа электронов. Условие вырождения $kT \ll \varepsilon_{макс}$ совпадает с условием вырождения газа Ферми.

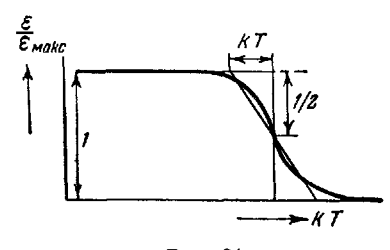


Рис. 81.

Мы ограничимся вычислением двух термодинамических величин парциального потенциала и средней энергии в зависимости от температуры. Парциальный потенциал электронного газа обычно называют уровнем или поверхностью Ферми. Происхождение такой терминологии будет ясно из дальнейшего.

Для определения парциального потенциала воспользуемся условием нормирования. Именно на основании (79,1) можем написать

$$N = 2 \cdot 2\pi \left(\frac{2m}{h^3}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}. \qquad (80,1)$$

Средняя энергия электронного газа дается формулой

$$E = 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V \int_0^\infty \frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}. \qquad (80,2)$$

Интегралы, входящие в формулы (80,1) и (80,2), в общем виде не берутся. Для вычисления их при низких температурах воспользуемся следующим приемом. Пусть

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} \qquad (80,3)$$

и

$$I = \int_0^\infty f\varepsilon^n\,d\varepsilon, \quad n > 0.$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$I = f\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\infty - \frac{1}{(n+1)}\int_0^\infty \varepsilon^{n+1}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\,d\varepsilon. \qquad (80,4)$$

При подстановке пределов первое слагаемое обращается, очевидно, в нуль. Функция $\left|\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right|$ изображена на рис. 82. Мы видим, что она является четной функцией своего аргумента и имеет столь резкий максимум при $\varepsilon = \mu$, что ее можно считать одним из представлений δ-функции. Введем новую переменную

Рис. 82.

$$x = \frac{\varepsilon-\mu}{kT}.$$

Тогда

$$I = -\frac{1}{(n+1)}\int_{-\frac{\mu}{kT}}^\infty (\mu + kTx)^{n+1}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx.$$

Поскольку мы рассматриваем область низких температур, нижний предел можно заменить на минус бесконечность:

$$I = -\frac{1}{(n+1)}\int_{-\infty}^\infty (\mu + kTx)^{n+1}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx.$$

В той области изменения x, в которой $\frac{\partial f}{\partial x}$ имеет значение, отличное от нуля, т. е. при $\varepsilon \approx \mu$, величина x весьма мала. Поэтому первый множитель в подынтегральном выражении

можно разложить в ряд и ограничиться первыми членами разложения. При больших x, когда этого делать нельзя, подынтегральное выражение обращается в нуль за счет множителя $\frac{\partial f}{\partial x}$, который ничтожно мал всюду, кроме $x = 0$. Таким образом:

$$I \approx -\frac{1}{(n+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{n+1} \left[1 + (n+1)\frac{kTx}{\mu} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)n}{2}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 x^2 + \ldots \right] \frac{\partial f}{\partial x}\, dx. \quad (80{,}5)$$

Поскольку $\frac{\partial f}{\partial x}$ — четная функция, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = 2\int_{0}^{\infty} x^2 \frac{\partial f}{\partial x}\, dx \neq 0.$$

Поэтому

$$I = -\frac{1}{(n+1)} \mu^{n+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \ldots \right]. \quad (80{,}6)$$

Легко видеть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = f\Big|_{-\infty}^{\infty} = -1.$$

Второй интеграл в (80,6) вычислен в приложении IV. Он равен $-\pi^2/3$. Окончательно имеем:

$$I = \frac{\mu^{(n+1)}}{n+1}\left[1 + \frac{(n+1)n}{6}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]. \quad (80{,}7)$$

Отброшенные члены пропорциональны более высоким степеням отношения kT/μ.

Возвращаясь к условию нормирования, в котором $n = \frac{1}{2}$, имеем:

$$N = 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1} \approx$$
$$\approx 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} V\mu^{3/2}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]. \quad (80{,}8)$$

При $T = 0$ второй член в (80,8) обращается в нуль и

$$N = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \mu_{T=0}^{3/2} V. \tag{80,9}$$

Сравнивая (80,9) с (79,3), находим, что

$$\mu_{T=0} = \mu_0 = \varepsilon_{\text{макс}}. \tag{80,10}$$

Парциальный потенциал электронного газа при абсолютном нуле оказывается равным максимальной энергии электрона при абсолютном нуле.

При температурах, близких к абсолютному нулю, (80,8) можно решить относительно μ по методу последовательных приближений. В малом втором члене в (80.8) μ можно заменить на $\mu_0 = \varepsilon_{\text{макс}}$. Тогда имеем:

$$\mu = \mu_0\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\frac{(kT)^2}{\mu_0^2}\right]. \tag{80,11}$$

Аналогично для средней энергии электронного газа $\left(n = \frac{3}{2}\right)$ находим:

$$E \approx 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} V\left(\frac{2}{5}\mu^{5/2} + \frac{\pi^2}{4}\mu^{1/2}(kT)^2\right). \tag{80,12}$$

Подставляя значение μ из (80,11) в (80,12) и пренебрегая высшими степенями отношения kT/μ, получаем:

$$E = \frac{3}{5}N\varepsilon_{\text{макс}}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_{\text{макс}}}\right)^2\right]. \tag{80,13}$$

Из (80,9) или (80,10) можно видеть, что условия вырождения $kT \ll \varepsilon_{\text{макс}}$ и (72,16) совершенно идентичны. Поэтому электронный газ является вырожденным при температурах $T < \frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{k}$.

Из (80,13) можно найти теплоемкость электронного газа

$$C_V = \frac{Nk\pi^2}{2}\frac{kT}{\varepsilon_{\text{макс}}}. \tag{80,14}$$

Теплоемкость электронного газа оказывается линейной функцией температуры и обращается в нуль при $T = 0$. Коэффициент пропорциональности содержит только известные величины — универсальные постоянные и плотность электронного газа N/V. Мы увидим в ч. VI, что для простых металлов, например меди и серебра, атомы которых имеют один валентный, слабо связанный электрон, число свободных электронов, приходящихся на атом, можно считать равным единице. Тогда, например, для меди теоретическое выражение электронной теплоемкости имеет вид

$$C_V = 0{,}9 \cdot 10^{-4} NkT. \tag{80,15}$$

Таким образом, теплоемкость электронного газа в согласии с опытными данными весьма мала и при нормальной температуре составляет неизмеримо малую долю теплоемкости кристаллической решетки.

Теплоемкость решетки при температурах ниже характеристической температуры быстро убывает и стремится к нулю при $T \to 0$, как куб температуры. Теплоемкость электронного газа также стремится к нулю при $T \to 0$, но гораздо медленнее, как первая степень температуры. Отношение теплоемкости электронного газа к теплоемкости решетки равно

$$\frac{C_V^{\text{эл}}}{C_V^{\text{реш}}} = \frac{5}{24\pi^2} \frac{kT}{\varepsilon_{\text{макс}}} \left(\frac{\theta}{T}\right)^3.$$

Для меди $\varepsilon_{\text{макс}} = 5$ *эв*, характеристическая температура $\theta = 335°$ K, так что

$$\frac{C_V^{\text{эл}}}{C_V^{\text{реш}}} = 0{,}02 \frac{T}{7 \cdot 10^4} \left(\frac{335}{T}\right)^3.$$

Отношение теплоемкостей оказывается порядка единицы при $T = 3{,}3°$ K. При еще более низких температурах теплоемкости электронов оказываются больше теплоемкости решетки.

Точные измерения теплоемкости подтвердили правильность теоретических формул. Так у меди, для которой измерения особенно точны, теплоемкость при низких температурах оказалась слагающейся из двух членов, один из которых очень точно совпадал с теоретической формулой для теплоемкости решетки. Второй член с точностью до 2% совпадает с теоретической формулой (80,14). При температурах ниже 3° K электронная теплоемкость больше теплоемкости решетки и укладывается на теоретическую кривую.

В заключение вычислим число электронов в зоне размытости распределения Ферми, которым удобно пользоваться для наглядной интерпретации ряда формул в дальнейшем.

Число электронов в зоне размытости или число непарных электронов мы будем именовать также числом эффективных электронов $n_{\text{эфф}}$. Именно они могут изменять свое состояние под влиянием внешних воздействий. Поэтому эффективные электроны обусловливают теплоемкость электронного газа, его электропроводность (см. следующий параграф) и т. п.

Значение $n_{\text{эфф}}$ может быть найдено из следующих соображений. Вероятность нахождения электрона в данном состоянии с энергией ε пропорциональна значению функции распределения f. Вероятность того, что оно не заполнено, равна $(1-f)$. Поскольку в одном состоянии могут находиться только электроны с антипараллельными спинами, произведение вероятно-

стей $f(1-f)$ представляет вероятность того, что в состоянии с энергией ε находится один электрон и не находится второй электрон с антипараллельным спином. Иначе говоря, $f(1-f)$ представляет вероятность того, что состояние с энергией ε будет заполнено только одним электроном. Полное число таких состояний или, что то же самое, полное число непарных электронов, равно интегралу от произведения $f(1-f)$ на число состояний $d\Omega$ с данной энергией, причем интеграл берется по всем значениям энергии:

$$n_{эфф} = 2\int_0^\infty f(1-f)\,d\Omega = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^\infty f(1-f)\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon. \quad (80,16)$$

В сильно вырожденном газе $\mu \gg kT$, так что

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} \approx 1, \quad (1-f) \approx e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}.$$

При $\varepsilon-\mu \gg kT$ подынтегральное выражение экспоненциально убывает. Поэтому, вместо того чтобы интегрировать до бесконечно больших значений энергии, можно ограничиться интегрированием до значений $\varepsilon \approx \mu$. Тогда

$$n_{эфф} \approx \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^\mu e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon.$$

Поскольку экспоненциальный множитель быстро убывает, можно вынести медленно изменяющийся множитель $\sqrt{\varepsilon}$ за знак интеграла, взяв его значение на верхием пределе. Это дает:

$$\int_0^\mu e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon \approx \sqrt{\mu}\int_0^\mu e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}\,d\varepsilon = kT\sqrt{\mu}\left(1-e^{-\frac{\mu}{kT}}\right) \approx$$

$$\approx kT\sqrt{\mu} \approx kT\sqrt{\mu_0},$$

поскольку $\mu \gg kT$, откуда

$$n_{эфф} \approx \frac{4\pi(2m)^{3/2}\,kT\sqrt{\mu_0}}{h^3}. \quad (80,17)$$

С помощью формул (79,3) и (79,10) $n_{эфф}$ можно представить в виде

$$n_{эфф} = \frac{3}{2}\frac{N}{V}\frac{kT}{\varepsilon_{макс}}. \quad (80,18)$$

Таким образом, $n_{эфф}$ составляет (с точностью до числового коэффициента) малую долю до полного числа электронов в 1 $см^3$, равную приближенно $kT/\varepsilon_{макс}$.

По порядку величины теплоемкость электронного газа с помощью $n_{эфф}$ можно представить в виде

$$C_V^{эл} \sim \frac{3}{2} k n_{эфф}, \qquad (80,19)$$

где $\frac{3}{2}k$ — классическое значение теплоемкости.

Формула (80,19) показывает, что свойства электронного газа можно приближенно трактовать следующим образом: в газе имеется $n_{эфф}$ эффективных частиц, могущих изменять свое состояние и принимать подводимую извне энергию. Каждая из них обладает обычными классическими свойствами и, в частности, на долю каждой из них приходится обычное значение теплоемкости. Мы вернемся еще к обсуждению статистических свойств квантовых частиц в ч. VI.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ВЕЩЕСТВЕ

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 1. Вывод основных уравнений поля

Мы рассматривали выше электромагнитные процессы, происходящие в вакууме. Предметом нашего рассмотрения служили как электрические заряды, движущиеся в вакууме, так и окружающее их электромагнитное поле. Теперь мы перейдем к изучению электромагнитных явлений, происходящих в веществе (в среде). Теория электромагнитных процессов в веществе часто именуется макроскопической электродинамикой.

Как будет видно из дальнейшего, характер электромагнитных процессов в веществе существенно зависит от свойств последнего. Например, механизм прохождения тока через металлические проводники и плазму газового разряда имеет существенно разный характер и сопровождается различными явлениями; магнитные явления в ферромагнетиках сильно отличаются от таких же процессов в диа- и парамагнетиках и т. д.

Тем не менее, оказывается возможным на основе некоторых весьма общих допущений построить феноменологическую теорию электромагнитных явлений в веществе. Для этого необходимо, прежде всего, найти общие уравнения электромагнитного поля в веществе. Затем, как мы увидим ниже, необходимо будет высказать некоторые, хотя и весьма общие допущения, о конкретных свойствах той среды, в которой происходят те или иные электромагнитные процессы.

Мы видели, что в основных уравнениях теории электромагнитного поля — уравнениях Максвелла — Лоренца — фигурировали величины, относящиеся к данной точке и данному моменту времени. Запишем эти уравнения в несколько измененных обозначениях, заменив $\boldsymbol{E}$ на $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{H}$ на $\boldsymbol{h}$. Выпишем уравнения Максвелла — Лоренца, а также закон сохранения заряда в новых

обозначениях:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}, \tag{1,1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0, \tag{1,2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \frac{4\pi}{c}\rho \boldsymbol{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t}, \tag{1,3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{e} = 4\pi\rho, \tag{1,4}$$

$$\operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1,5}$$

В веществе — среде, построенной из атомов или молекул, уравнения Максвелла — Лоренца, содержащие характеристики поля, отнесенные к данной точке и данному моменту времени, теряют смысл. Действительно, в веществе все величины, в том числе и электромагнитное поле, весьма быстро изменяются от точки к точке и в данном месте — во времени. Например, напряженность электрического поля имеет сравнительно малое значение вне данного атома, становится весьма большой внутри него и вновь спадает за его пределами. Рост поля в миллионы раз и его последующее спадание происходят в масштабах порядка атомных размеров. Такое же изменение поля во времени в фиксированной точке происходит, например, из-за теплового движения атома за малые доли секунды. Поэтому, как и в других макроскопических процессах, происходящих в веществе, интерес и значение имеют лишь средние значения соответствующих величин (ср. ч. III).

Усредним уравнения Максвелла — Лоренца по физически бесконечно малым объему v_0 и промежутку времени τ, вводя средние по формуле

$$\bar{f} = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\frac{1}{v_0}\int_{v_0} f\,dV\,dt. \tag{1,6}$$

Тогда имеем

$$\operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{e}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\boldsymbol{h}}}{\partial t}, \tag{1,7}$$

$$\operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{h}} = 0, \tag{1,8}$$

$$\operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{h}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\rho \boldsymbol{v}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\boldsymbol{e}}}{\partial t}, \tag{1,9}$$

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{e}} = 4\pi\bar{\rho}, \tag{1,10}$$

$$\operatorname{div} \overline{\rho \boldsymbol{v}} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 0. \tag{1,11}$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{e} = E, \qquad (1,12)$$

$$\bar{h} = B \qquad (1,13)$$

и будем именовать среднее значение напряженности электрического поля в среде напряженностью поля E, а среднее значение напряженности магнитного поля в среде магнитной индукцией B (такое название среднего магнитного поля связано исключительно с исторической традицией). Тогда уравнения (1,7)—(1,11) приобретают вид

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad (1,14)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \qquad (1,15)$$

$$\operatorname{rot} B = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\rho v}, \qquad (1,16)$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi\bar{\rho}, \qquad (1,17)$$

$$\operatorname{div}\overline{\rho v} + \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} = 0. \qquad (1,18)$$

Дальнейшие преобразования уравнений связаны с нахождением средних значений $\bar{\rho}$ и $\overline{\rho v}$. Нахождение этих средних требует введения некоторых допущений о строении вещества.

В рамках теории электромагнитного поля в веществе последнее рассматривается как сплошная среда, свойства которой описываются при помощи ряда формальных макроскопических характеристик, таких как диэлектрическая проницаемость, проводимость и т. п. Некоторые из этих формальных характеристик будут найдены путем применения методов статистической физики и связаны с молекулярным строением вещества.

Однако с самого начала нам придется разбить все вещества на две группы — на проводники и диэлектрики. Под проводниками мы будем понимать тела, в которых под действием приложенного внешнего стационарного поля возникает перемещение зарядов по объему и соответствующий этому движению зарядов электрический ток. В диэлектриках внешнее поле не создает движения зарядов, хотя может вызывать их смещение в новые положения равновесия.

Уже из этих определений ясна условность разделения тел на проводники и диэлектрики. В действительности в диэлектриках внешнее электрическое поле вызывает некоторый, хотя и весьма малый ток. С другой стороны, в некоторых проводниках ток также может быть невелик. Важнейшую роль в физике и технике играют полупроводники. В одних условиях электрический ток в полупроводниках сравнительно велик и приближается

к току в проводниках. Иногда же ток в полупроводниках так же мал, как в самых совершенных диэлектриках.

Тем не менее схематическое разделение всех тел на проводники и диэлектрики является достаточно хорошим приближением, на основе которого возможно построение феноменологической теории электромагнитных явлений в сплошных средах.

§ 2. Поляризация среды в электрическом поле

При вычислении $\bar{\rho}$ следует различать случаи тела в целом электронейтрального и содержащего отличный от нуля заряд.

Рассмотрим сперва первый случай. Если электронейтральное тело помещено во внешнее электрическое поле, в атомах и молекулах происходит смещение отрицательных и положительных зарядов друг относительно друга. Тело, оставаясь электронейтральным, приобретает дипольный момент. Мы будем характеризовать тело средним дипольным моментом всех его частиц в единице объема. Средний дипольный момент единицы объема будет именоваться вектором поляризации или, кратко, поляризацией $\boldsymbol{P}$. Дипольный момент, приобретаемый телом, равен, по определению

$$\boldsymbol{d} = \int \boldsymbol{P}\, dV = \int \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{r}\, dV. \tag{2,1}$$

Ввиду произвольности объема интегрирования

$$\boldsymbol{P} = \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{r}. \tag{2,1'}$$

Если тело поляризовано равномерно, т. е. $\boldsymbol{P}$ одинаково во всех точках тела, то $\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{d}}{V}$. Появление в теле поляризации при известных условиях, которые будут ясны из дальнейшего, сопровождается возникновением среднего объемного заряда $\rho_{\text{связ}}$. Значок (связ) означает, что средний заряд обусловлен смещением зарядов, связанных в атомах тела. Появление связанного, или индуцированного, заряда называется электростатической индукцией или поляризацией.

Для нахождения $\rho_{\text{связ}}$ воспользуемся определением (2,1) и преобразуем интеграл $\int \boldsymbol{P}\, dV$ к виду $\int f(\boldsymbol{P}) \boldsymbol{r}\, dV$, где $f(\boldsymbol{P})$ — некоторая функция поляризации. Тогда, сравнивая $\int f(\boldsymbol{P}) \boldsymbol{r}\, dV$ с $\int \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{r}\, dV$, можно найти значение $\rho_{\text{связ}}$. Используя формулу (1,53) и полагая в ней $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}$, находим

$$\int (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n})\, \boldsymbol{r}\, dS = \int \boldsymbol{r} \operatorname{div} \boldsymbol{P}\, dV + \int (\boldsymbol{P} \operatorname{grad}) \boldsymbol{r}\, dV = \\ = \int \boldsymbol{r} \operatorname{div} \boldsymbol{P}\, dV + \int \boldsymbol{P}\, dV.$$

Выбирая поверхность интегрирования вне объема, занятого телом, имеем

$$\int (\boldsymbol{Pn})\,\boldsymbol{r}\,dS = 0,$$

поскольку вне тела поляризация равна нулю. Поэтому

$$\int \boldsymbol{P}\,dV = -\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\,dV. \qquad (2,2)$$

Сравнивая (2,2) с (2,1), получаем

$$\rho_{\text{связ}} = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}. \qquad (2,3)$$

Таким образом, если поляризация тела неоднородна и вектор $\boldsymbol{P}$ изменяется от точки к точке и притом изменяется так, что $\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} \neq 0$, в теле возникает объемный заряд $\rho_{\text{связ}}$, определенный формулой (2,3).

Формуле (2,3) может быть придан наглядный смысл. Пусть внутри тела проведены две воображаемые плоскости S_1 и S_2. Во внешнем поле заряды, связанные в атомах, заключенных в пространстве между плоскостями, смещаются. Если поляризация неоднородна в пространстве, то, например, поверхность S_2 пересечет большее число зарядов, уходящих из объема, чем поверхность S_1. В результате из объема, заключенного между плоскостями, выходит больше зарядов, чем входит из соседнего объема. В пространстве между S_2 и S_1 возникает объемный заряд $\rho_{\text{связ}}$.

В частности, когда поверхность служит граничной поверхностью тела, то заряды, приходящие на нее при поляризации, образуют поверхностный заряд. Его плотность $\omega_{\text{связ}}$ определится из следующего простого вычисления. Проинтегрируем (2,3) по объему, заключенному между двумя поверхностями. Выберем эти поверхности так, чтобы одна из них проходила вне тела, а вторая внутри него и обе они отстояли на весьма малом расстоянии h от внешней поверхности тела.

Тогда имеем

$$\int \mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\,dV = \oint \boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{S} = \oint\limits_{\text{вне тела}} P_n\,dS - \oint\limits_{\text{внутри тела}} P_n\,dS =$$
$$= -\oint\limits_{\text{внутри тела}} P_n\,dS = -\int \rho_{\text{связ}}\,dV. \qquad (2,4)$$

Переходя к пределу $h \to 0$, можем написать

$$\lim_{h \to 0} \int \rho_{\text{связ}}\,dV = \oint\limits_{S} \omega_S\,dS,$$

$$\oint\limits_{\text{внутри тела}} P_n\,dS \to P_n\,dS,$$

где S означает поверхность тела и значение P_n берется на самой поверхности. Ввиду произвольного характера поверхности тела из равенства

$$\oint\limits_S P_n\,dS = \int \omega_S\,dS$$

следует, что

$$\omega_S = P_n. \tag{2,5}$$

Ясно, что полный заряд электронейтрального тела, помещенного во внешнее поле, остается равным нулю. Выбирая в (2,4) поверхность интегрирования вне объема тела, можно написать

$$\int \rho_{\text{связ}}\,dV = -\int \operatorname{div}\boldsymbol{P}\,dV = -\int P_n\,dS = 0.$$

Таким образом, полный объемный связанный заряд, возникающий в теле, равен полному заряду, индуцированному на его поверхности.

До сих пор мы считали тело электронейтральным. Если полный свободный заряд тела отличен от нуля и распределен в нем с объемной плотностью ρ, то полная средняя плотность заряда

$$\bar{\rho} = \rho_{\text{связ}} + \rho$$

и

$$\int \bar{\rho}\,dV = \int (\rho_{\text{связ}} + \rho)\,dV = \int \rho\,dV = e. \tag{2,6}$$

Заряд тела, характеризуемый плотностью ρ, не связан с атомами вещества и не индуцируется внешним полем. Ниже мы увидим, что в постоянном поле свободный заряд ρ может существовать только у диэлектриков. В проводниках свободные заряды подвижны и смещаются до тех пор, пока не выходят на его поверхность, образуя поверхностный заряд.

§ 3. Средняя плотность тока и средняя плотность заряда в среде

Несколько более сложной задачей является вычисление средней плотности тока в среде $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$. Это вычисление может быть проведено либо на основе некоторых модельных представлений, либо, более формально, исходя из общих представлений об электромагнитных свойствах среды.

Мы изберем здесь второй путь, поскольку используемые обычно при изложении макроскопической электродинамики модели атомов и молекул не только далеки от действительности, но и по необходимости содержат явно неверные допущения. Как будет пояснено ниже, квантовые эффекты играют основную роль в магнитных свойствах атомов. Поэтому нельзя проводить

рассмотрение электрических и особенно магнитных свойств атомных систем на основе классических моделей. При формальном рассмотрении мы можем ограничиться лишь одним физическим допущением: если некоторое тело помещено во внешнее электромагнитное поле, то среднее поле в объеме тела мало по сравнению с внутриатомными полями. Иными словами, мы будем предполагать, что средние поля внутри тела являются слабыми. Кроме того, мы ограничимся случаем однородных и изотропных тел.

Средняя плотность тока в среде $\overline{\rho v}$ в каждой точке тела является функцией напряженностей электрического и магнитного полей. Кроме того, если поля изменяются в пространстве и во времени, средняя плотность тока будет зависеть от скорости изменения векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ во времени и пространственных производных этих величин, т. е.

$$\overline{\rho \boldsymbol{v}} = f\left(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B},\ \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},\ \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\ \frac{\partial E_i}{\partial x_k},\ \frac{\partial H_i}{\partial x_k}\right). \qquad (3,1)$$

Поскольку поля являются слабыми, можно разложить функцию f в ряд по степеням переменных и ограничиться первыми степенями разложения[1]). По существу это разложение производится по степеням малого отношения типа $\frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{E}_{\text{вн. ат}}|}$, где $\boldsymbol{E}_{\text{вн. ат}}$ — напряженность внутриатомного поля.

Разлагая f в ряд по степеням переменных, мы должны учитывать, что $\overline{\rho v}$ является полярным вектором. Поэтому все члены ряда, выражающего искомое разложение, также должны представлять полярные векторы. Они не могут быть ни скалярами, ни аксиальными векторами.

Напомним (ср. § 6 ч. I), что напряженность электрического поля $\boldsymbol{e}$, а следовательно, и средняя напряженность электрического поля в среде $\boldsymbol{E}$ являются полярными векторами. Напротив, напряженность магнитного поля $\boldsymbol{h}$, а с ней и среднее магнитное поле $\boldsymbol{B}$ являются аксиальными векторами или псевдовекторами. Поэтому в искомом разложении может фигурировать вектор $\boldsymbol{E}$, но не вектор $\boldsymbol{B}$.

Производная вектора $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ по времени является полярным вектором и должна быть первым членом разложения. Пространственные производные $\frac{\partial E_i}{\partial x_k}$ могут быть сгруппированы в виде двух комбинаций производных $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$. Первая комбинация производных $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ образует аксиальный вектор, вторая — скаляр. Обе величины в разложении сами по себе фигурировать

[1]) Ср. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1954, стр. 428.

не могут. Производные первого порядка от $\boldsymbol{B}$ суть: $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$. Величина $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ является аксиальным вектором, $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$ в силу (1,15), $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ представляет полярный вектор. Поэтому в разложении $\boldsymbol{f}$ нужно удержать вектор $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$. Таким образом, имеются только три величины первого порядка малости, являющиеся полярными векторами $\boldsymbol{E}$, $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$. Разумеется, в следующем приближении из скаляров и аксиальных векторов можно составить целый ряд полярных векторов, но члены разложения второго порядка нас интересовать не будут.

При разложении по степеням отношения $\frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{E}_{\text{вн. ат}}|}$ нужно, вообще говоря, учитывать анизотропию тела, так как в разных направлениях $E_{\text{вн. ат}}$ изменяется по разным законам. В изотропных телах (такими являются газы, жидкости и, в известном приближении, поликристаллические тела) можно считать отношение $\frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{E}_{\text{вн. ат}}|}$ имеющим одно и то же значение во всех направлениях. Тогда с точностью до членов первого порядка малости

$$\overline{\rho\boldsymbol{v}}=\sigma\boldsymbol{E}+\varkappa\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\alpha c\operatorname{rot}\boldsymbol{B}, \tag{3,2}$$

где σ, $\varkappa$ и α — скаляры, зависящие от свойств среды. Причина, по которой в последнее слагаемое введен множитель c (скорость света), будет ясна из дальнейшего.

Нулевой член в разложении (3,2) отсутствует, поскольку отсутствию поля должен отвечать средний ток, равный нулю.

Прежде чем ввести это выражение для $\overline{\rho\boldsymbol{v}}$ в уравнения Максвелла, обсудим физический смысл отдельных членов разложения.

Первый член разложения $\sigma\boldsymbol{E}$ имеет весьма простой и наглядный смысл. Он показывает, что при наличии электрического поля в среде возникает ток, средняя плотность которого пропорциональна средней напряженности поля $\boldsymbol{E}$. Величина σ носит название проводимости или электропроводности тела.

Мы будем пользоваться обозначением

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}. \tag{3,3}$$

Вектор $\boldsymbol{j}$ представляет средний заряд, проходящий через 1 *см*^{2} поверхности, проведенной внутри тела перпендикулярно к $\boldsymbol{j}$, за 1 *сек*. Вектор $\boldsymbol{j}$ именуется плотностью тока проводимости. Соотношение (3,3) связывает плотность тока в данной точке тела с напряженностью поля в этой точке. Соотношение (3,3)

мы будем называть законом Ома в дифференциальной форме. Ниже, в § 14, мы установим связь (3,3) с обычной формулировкой закона Ома.

Свойства тел характеризуются значением проводимости σ. В идеальных диэлектриках, в соответствии с их определением, следует положить $\sigma=0$. В реальных диэлектриках $\sigma\neq0$, но весьма мало по сравнению с значением этой величины в полупроводниках и особенно в металлах.

Вопрос о проводимости в телах различной природы будет рассмотрен ниже. Пока отметим лишь, что за ток проводимости в теле ответственны свободные заряды: свободные электроны в металлах, ионы и электроны в газах, ионы в жидкостях. Свободными их именуют потому, что они не связаны с каким-либо атомом и под действием поля могут перемещаться по всему объему тела.

Среднюю плотность свободных зарядов в теле мы будем обозначать через ρ. Она связана, очевидно, с плотностью тока $\boldsymbol{j}$ уравнением непрерывности

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \qquad (3,4)$$

При этом предполагается, что свободные заряды, имеющиеся в теле, не переходят в связанное состояние и не возникают из связанных зарядов.

Для выяснения физического смысла второго и третьего слагаемых в разложении (3,2) преобразуем (3,2) так, чтобы векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ были отделены один от другого. Возьмем, например, дивергенцию от обеих частей уравнения (3,2). Тогда имеем, очевидно,

$$\operatorname{div}\overline{\rho\boldsymbol{v}}=\operatorname{div}\boldsymbol{j}+\varkappa\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{E}.$$

В силу уравнений непрерывности для полного тока $\overline{\rho\boldsymbol{v}}$ и тока свободных зарядов $\boldsymbol{j}$, даваемых формулами (1,18) и (3,4),

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\bar\rho-\rho)=\varkappa\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{E}. \qquad (3,5)$$

Разность $\bar\rho-\rho$ равна, очевидно, средней плотности связанных зарядов $\rho_{\text{связ}}$. Таким образом, в однородной среде имеем

$$\frac{\partial\rho_{\text{связ}}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\varkappa\boldsymbol{E}.$$

Интегрируя, можно написать

$$\rho_{\text{связ}}=-\operatorname{div}\varkappa\boldsymbol{E}. \qquad (3,6)$$

Постоянная интегрирования положена равной нулю, поскольку в отсутствие поля $\rho_{\text{связ}}$ должна быть равна нулю.

Сравнивая (3,6) с (2,3), мы убеждаемся, прежде всего, в существоваиии формулы

$$\boldsymbol{P}=\varkappa\boldsymbol{E}, \tag{3,7}$$

связывающей поляризацию в теле с напряженностью поля $\boldsymbol{E}$. Поляризация $\boldsymbol{P}$ оказывается пропорциональной полю $\boldsymbol{E}$. Коэффициент пропорциональности $\varkappa$ носит название коэффициента поляризации или диэлектрической восприимчивости вещества. Значение диэлектрической восприимчивости для тел, состоящих из простых молекул, будет вычислено в §§ 12 и 13. Там будет доказано, что $\varkappa$ является величиной существенно положительной, так что вектор $\boldsymbol{P}$ всегда направлен в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{E}$.

В силу (3,7) второе слагаемое в (3,2) можно записать в виде

$$\varkappa\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}. \tag{3,8}$$

Формула (3,8) показывает, что изменение вектора поляризации во времени эквивалентно появлению некоторого тока. Этот ток именуется током поляризации, а его плотность

$$\boldsymbol{j}_{\text{пол}}=\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}, \tag{3,9}$$

т. е. равна скорости изменения дипольного момента единицы объема, выбранного в данной точке тела.

Действительно, из определения (2,1) вектора $\boldsymbol{P}$ следует

$$\int \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\,dV=\frac{\partial}{\partial t}\int \rho_{\text{связ}}\boldsymbol{r}\,dV=\int \boldsymbol{r}\frac{\partial \rho_{\text{связ}}}{\partial t}\,dV. \tag{3,10}$$

При этом мы переменили порядок дифференцирования и интегрирования. Величина $\boldsymbol{r}$ представляет переменную интегрирования и от t не зависит.

Пользуясь (1,5) и применяя соотношение (2,2) к вектору $(\rho_{\text{связ}}\boldsymbol{v})$, находим

$$\int \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\,dV=-\int \boldsymbol{r}\operatorname{div}(\rho_{\text{связ}}\boldsymbol{v})\,dV=\int \rho_{\text{связ}}\boldsymbol{v}\,dV. \tag{3,11}$$

Смысл плотности тока связанных зарядов очень прост. Изменение во времени поляризации данного объема означает, что из него уходят (или в него входят) сказанные заряды. Ясно, однако, что перемещение связанных зарядов, с точки зрения переноса ими электричества, эквивалентно движению свободных зарядов.

Перейдем теперь к выяснению смысла последнего слагаемого в (3,2). Для этого умножим формулу (3,2) на $\boldsymbol{r}$ векторно и проинтегрируем результат по объему тела:

$$\int [\boldsymbol{r}, \overline{\rho \boldsymbol{v}}]\, dV = \int [\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}]\, dV + \int \left[\boldsymbol{r}, \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right] dV + \alpha c \int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{B}]\, dV.$$

В силу (3,10)

$$\int \left[\boldsymbol{r}, \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right] dV = \int \left[\boldsymbol{r}, \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{r}\right] dV = \frac{\partial}{\partial t} \int [\boldsymbol{r}, \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{r}]\, dV = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_{\text{связ}} [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}]\, dV = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha c \int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{B}]\, dV = \int [\boldsymbol{r}, \overline{\rho \boldsymbol{v}} - \boldsymbol{j}]\, dV = \int [\boldsymbol{r}, \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{v}]\, dV, \tag{3,12}$$

где $\rho_{\text{связ}} \boldsymbol{v} = \overline{\rho \boldsymbol{v}} - \boldsymbol{j}$ — плотность тока, переносимая связанными зарядами.

Введем обозначение

$$\boldsymbol{M} = \alpha \boldsymbol{B}. \tag{3,13}$$

Тогда (3,12) запишется в виде

$$\int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{M}]\, dV = \frac{1}{c} \int [\boldsymbol{r}, \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{v}]\, dV. \tag{3,14}$$

В силу формулы (I, 54), в которой $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{M}$,

$$\int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{M}]\, dV = - \int [[\boldsymbol{M}\nabla]\, \boldsymbol{r}]\, dV - \oint [[\boldsymbol{n}\boldsymbol{M}]\, \boldsymbol{r}]\, dS.$$

Если поверхность интегрирования проходит вне объема, занятого телом, то на этой поверхности $\boldsymbol{M}=0$, и, таким образом,

$$\int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{M}]\, dV = - \int [[\boldsymbol{M}\nabla]\, \boldsymbol{r}]\, dV.$$

При этом

$$[[\boldsymbol{M}\nabla]\, \boldsymbol{r}] = (\boldsymbol{M}\nabla)\, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{M} \operatorname{div} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{M} - 3\boldsymbol{M} = -2\boldsymbol{M}.$$

Отсюда окончательно

$$\int [\boldsymbol{r}, \operatorname{rot} \boldsymbol{M}]\, dV = 2 \int \boldsymbol{M}\, dV. \tag{3,15}$$

Сравнивая (3,15) с (3,14), получаем

$$\int \boldsymbol{M}\, dV = \int \frac{[\boldsymbol{r}, \rho_{\text{связ}} \boldsymbol{v}]}{2c}\, dV. \tag{3,16}$$

Равенство (3,16) показывает, что введенный соотношением (3,13) вектор $\boldsymbol{M}$ представляет средний магнитный момент единицы объема тела, создаваемый движущимися связанными зарядами (ср. § 22 ч. I).

Статистическая теория магнитных явлений будет изложена в гл. III.

С помощью величин $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{M}$ средняя плотность тока в веществе может быть окончательно написана в виде

$$\overline{\rho \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \boldsymbol{M}. \tag{3,17}$$

§ 4. Система уравнений для электромагнитного поля в среде

Вычислив средние значения величины $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$, мы можем перейти к окончательной формулировке уравнений для электромагнитного поля в среде. Подставляя (3,17) в (1,16), находим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + 4\pi \operatorname{rot} \boldsymbol{M},$$

или

$$\operatorname{rot} (\boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{M}) = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}). \tag{4,1}$$

Введем новые обозначения, написав

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{M} \tag{4,2}$$

и

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} - 4\pi \boldsymbol{P}; \tag{4,3}$$

перепишем (4,1) в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{4,4}$$

Обратимся теперь к уравнению (1,17). Выражая среднюю плотность заряда по формуле (2,6) через среднюю плотность свободного ρ и связанного $\rho_{\text{связ}}$ заряда и пользуясь (2,3), получаем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho + 4\pi\rho_{\text{связ}} = 4\pi\rho - 4\pi \operatorname{div} \boldsymbol{P},$$

откуда в силу (4,3)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho. \tag{4,5}$$

Два оставшихся уравнения (1,14) и (1,15), как мы видели, усредняются без каких-либо трудностей,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{4,6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{4,7}$$

При этом ρ и $\boldsymbol{j}$ связаны между собой уравнением непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0. \qquad (4,8)$$

Совокупность уравнений (4,4)—(4,8) образуют систему уравнений поля в среде. Эта система уравнений была установлена Максвеллом в 1873 г. и именуется уравнениями Максвелла (в отличие от уравнений Максвелла — Лоренца (1,1)—(1,5)). Совершенно ясно, что эта система еще не полна, поскольку она содержит четыре неизвестных вектора — средние поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ и вспомогательные величины $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{D}$. По историческим причинам вектор $\boldsymbol{H}$ принято именовать магнитным полем в среде, а вектор $\boldsymbol{D}$ — электрической индукцией.

Для того чтобы система уравнений Максвелла стала полной, необходимо задать некоторые дополнительные соотношения, связывающие между собой основные и вспомогательные векторы поля. Эти уравнения носят общее название уравнений связи. В простейшей (однородной и изотропной) среде, рассмотренной выше, вид уравнений связи следует непосредственно из (3,2).

В силу (3,13) и (4,2) имеем

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4\pi\alpha\boldsymbol{B}=(1-4\pi\alpha)\boldsymbol{B}. \qquad (4,9)$$

По историческим причинам принято записывать уравнение связи (4,9) в виде

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}, \qquad (4,10)$$

причем постоянная $\mu=\frac{1}{1-4\pi\alpha}$ называется магнитной восприимчивостью среды. При этом индуцированный магнитный момент единицы объема $\boldsymbol{M}$ выражают не через $\boldsymbol{B}$, а через $\boldsymbol{H}$ по формуле

$$\boldsymbol{M}=\mu\alpha\boldsymbol{H}=\chi\boldsymbol{H}, \qquad (4,11)$$

где χ именуется магнитной восприимчивостью. Из (4,2) и (4,11) следует, что

$$\mu=1+4\pi\chi. \qquad (4,12)$$

Аналогично из (3,7) и (4,3) получаем уравнение связи

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}, \qquad (4,13)$$

где коэффициент

$$\varepsilon=1+4\pi\varkappa \qquad (4,14)$$

называется диэлектрической проницаемостью или, по устаревшей, но часто применяемой терминологии, диэлектрической постоянной. К уравнениям связи относят обычно и соотношение (3,3).

Мы хотели бы подчеркнуть, что в отличие от уравнений Максвелла — Лоренца, являющихся одним из самых точных и универсальных из известных законов природы, система уравнений Максвелла имеет ограниченную область применимости вследствие ограниченной области применимости уравнений связи. Ниже мы остановимся на этом вопросе подробнее.

В дальнейшем будет показано, что электрическая восприимчивость всех тел $\varkappa > 0$ и, соответственно, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon > 1$.

Напротив, магнитная восприимчивость χ может быть как положительной, так и отрицательной. Вещества, у которых $\chi > 0$, называются парамагнитными, вещества с $\chi < 0$ — диамагнитными.

Для дальнейшего нам понадобится интегральная форма уравнений Максвелла, которую мы запишем следующим образом:

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}, \tag{4,15}$$

$$\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} = 0, \tag{4,16}$$

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{S} = \frac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}, \tag{4,17}$$

$$\oint \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S} = 4\pi\int \rho\, dV. \tag{4,18}$$

Совершенно так же, как это было сделано в § 10 ч. I для электромагнитного поля в вакууме, можно ввести электромагнитные потенциалы φ и $\boldsymbol{A}$ в веществе. Определим их формулами

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \tag{4,19}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi; \tag{4,20}$$

при этом условие Лоренца приобретает вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{4,21}$$

Повторяя выкладки § 10 ч. I, легко прийти к уравнениям для потенциалов

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}, \tag{4,22}$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho. \tag{4,23}$$

§ 5. Система граничных условий

В дальнейшем нам обычно придется рассматривать электромагнитные явления в телах, ограниченных в пространстве. Необходимо поэтому выяснить, как изменяются векторы электромагнитного поля вблизи границы тела. В самом общем случае граница тела служит границей раздела двух сред с различными свойствами. Мы будем предполагать, что с достаточной степенью точности границу раздела можно считать геометрической, и не будем интересоваться свойствами электромагнитного поля в переходном слое вблизи границы.

Пусть одна среда характеризуется проницаемостями ε_1 и μ_1, а вторая — соответственно ε_2 и μ_2. Поведение векторов поля на границе раздела может быть установлено из уравнений Максвелла, записанных в интегральной форме.

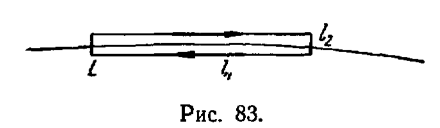


Рис. 83.

Рассмотрим уравнение (4,15) и применим его к бесконечно малому контуру L, изображенному на рис. 83, считая сторону l_1 бесконечно малой первого порядка, а сторону l_2 — бесконечно малой вторго прядка. Тогда имеем

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = E_{tg}^{(1)} l_1 - E_{tg}^{(2)} l_1 + \text{б. м. второго порядка.}$$

При этом E_{tg} означает касательную к поверхности раздела слагающую вектора напряженности электрического поля; индексы относятся к первой и второй средам.

Уравнение (4,15) дает

$$\left(E_{tg}^{(1)} - E_{tg}^{(2)}\right) l_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad (5,1)$$

где Φ — поток магнитной индукции через поверхность, стягиваемую контуром L. Очевидно, $\Phi \sim l_1 l_2$ и является величиной старшего порядка малости. Поэтому, переходя к пределу $l_2 \to 0$, из (5,1) находим

$$E_{tg}^{(1)} = E_{tg}^{(2)}. \qquad (5,2)$$

Тангенциальная слагающая напряженности электрического поля остается непрерывной при переходе через границу раздела сред.

Применим аналогичный прием к формуле (4,17). При этом сразу опустим член второго порядка малости $\int \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}$. Тогда находим

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)\, \boldsymbol{l}\, dl_1,$$

где $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор контура, лежащий в плоскости раздела (см. рис. 83).

Обозначим через $\boldsymbol{n}$ нормаль к поверхности раздела и через $\boldsymbol{n}_1$ нормаль к поверхности, охваченной контуром $\boldsymbol{l}$. Векторы $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{l}$ образуют правовинтовую систему:

$$\boldsymbol{l}=[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}].$$

Введем, далее, понятие поверхностной плотности тока j_s и будем под этим понимать количество электричества, проходящее за 1 *сек* через единичный отрезок на поверхности:

$$\lim_{dl_1\cdot dl_2\to 0} \boldsymbol{j}\boldsymbol{n}_1\, dl_1\, dl_2=\boldsymbol{j}_S\boldsymbol{n}_1\, dl_1.$$

Тогда (4,17) дает

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_S\boldsymbol{n}_1\, dl_1=(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\,\boldsymbol{l}\cdot dl_1,$$

или

$$(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\,\boldsymbol{l}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_S\boldsymbol{n}_1.$$

Выражая $\boldsymbol{l}$ через $\boldsymbol{n}_1$, имеем

$$(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\,[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{n}_1\,[\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1],$$

откуда

$$\boldsymbol{n}_1\,[\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1]=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_S\boldsymbol{n}_1.$$

Поскольку ориентация вектора $\boldsymbol{n}_1$ в плоскости раздела может быть произвольной, должно выполняться равенство

$$\frac{c}{4\pi}\,[\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1]=\boldsymbol{j}_S. \qquad (5,3)$$

При наличии поверхностных токов тангенциальная слагающая напряженности поля $\boldsymbol{H}$ претерпевает разрыв непрерывности при переходе через границу раздела сред. Величина скачка ΔH_{tg} равна $\frac{4\pi}{c}j_S$.

Если поверхностный ток на границе раздела отсутствует, $j_S=0$, то

$$H_{\text{tg}}^{(1)}=H_{\text{tg}}^{(2)}. \qquad (5,4)$$

Граничные условия для нормальных слагающих векторов индукции $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ получаются из (4,16) и (4,18), если в качестве поверхности интегрирования выбрать бесконечно малую поверхность S, изображенную на рис. 84. Площадь оснований S_1 является бесконечно малой первого, а площадь боковых

граней — бесконечно малой второго порядка. Из (4,16) находим

$$\left(B_n^{(1)} - B_n^{(2)}\right) S_1 + \text{б. м. второго порядка} = 0$$

или, переходя к пределу,

$$B_n^{(1)} = B_n^{(2)}. \tag{5,5}$$

Нормальная слагающая вектора магнитной индукции при переходе через границу раздела сохраняется.

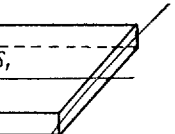


Рис. 84.

Аналогично из (4,18) находим

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)} + 4\pi\omega_S, \tag{5,6}$$

где ω_S — поверхностная плотность заряда, определяемая, как и выше,

$$\lim_{h \to 0} \int \rho \, dV = \int \omega_S \, dS.$$

Если поверхностная плотность заряда $\omega_S = 0$, то

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}. \tag{5,7}$$

Уравнения (5,2), (5,3), (5,5) и (5,6) являются граничными условиями, которым должны удовлетворять векторы поля на границе раздела сред. В частности, на границе с вакуумом следует положить в этих формулах $\varepsilon_2 = \mu_2 = 1$.

§ 6. Пределы применимости системы уравнений связи

Мы получили систему уравнений Максвелла (вместе с уравнениями связи) из уравнений Максвелла — Лоренца путем усреднения, основываясь на некоторых допущениях о свойствах среды.

Хотя эти допущения носили довольно общий характер, они выполняются отнюдь не всегда. Оказывается, что область применимости уравнений связи и, следовательно, уравнений Максвелла в простейшей форме (4,4) — (4,7) достаточно ограничена. Мы должны особенно подчеркнуть эти ограничения потому, что в настоящее время в физике приходится все чаще сталкиваться с системами, к которым уравнения Максвелла в написанном нами виде неприменимы. Обычно в правой части уравнения (4,4) одно из слагаемых велико, тогда как другое — мало. Так, в идеальных диэлектриках ток проводимости $j = 0$, а в реальных диэлектриках он весьма мал по сравнению с током смещения $\frac{\partial D}{\partial t}$. Напротив, в проводниках обычно мал ток смещения. Поэтому уравнение (4,4) следует рассматривать как некоторое общее выражение, включающее в себя предельные реальные

случаи, но почти всегда упрощаемое при фактическом использовании. Между тем оно приведено во всех старых и многих новых руководствах без должных оговорок.

Перейдем теперь к разбору допущений, сделанных при выводе уравнений Максвелла. Основным допущением является разложение (3,2). Это разложение означает, прежде всего, что среда является изотропной, так что связь между вектором $\overline{\rho \boldsymbol{v}}$ и векторами $\boldsymbol{E}$, $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{B}$ характеризуется скалярными постоянными σ, $\varkappa$, α. Совершенно очевидно, что это допущение неприменимо к анизотропным средам, в частности к монокристаллам. Поэтому в анизотропных средах теряют силу соотношения (4,10) и (4,13), которые должны быть заменены тензорными выражениями

$$\begin{aligned} D_i &= \varepsilon_{ik} E_k, \\ B_i &= \mu_{ik} H_k. \end{aligned} \tag{6,1}$$

Величины ε_{ik} и μ_{ik} — симметричные тензоры второго ранга. Доказательство последнего утверждения будет дано в § 13. Далее, само существование линейного соотношения между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{B}$ или, что то же самое, между $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ оказывается невыполненным у сравнительно немногочисленной, но весьма важной группы веществ, именуемых ферромагнетиками и антиферромагнетиками. В этих веществах функциональная зависимость между $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ имеет сложный нелинейный и притом неоднозначный характер. Ниже мы остановимся на теории ферромагнетизма.

Другая группа веществ, именуемых сегнетоэлектриками, обладает электрическими свойствами, сходными с магнитными свойствами ферромагнетиков: зависимость $\boldsymbol{D}$ от $\boldsymbol{E}$ является нелинейной и неоднозначной.

Таким образом, у ферромагнетиков и сегнетоэлектриков выражение (3,2), в котором удержаны первые члены разложения, теряют смысл.

Ряд веществ, названных сверхпроводниками, обнаруживает при низких температурах глубокое изменение магнитных свойств. Магнитное поле не проникает в глубь сверхпроводников, так что в объеме сверхпроводника выполнено условие

$$\boldsymbol{B} = 0.$$

Очевидно, что уравнения Максвелла в форме (4,4)—(4,7) не описывают поведение сверхпроводников. Свойства сверхпроводников будут описаны в § 21, а теория сверхпроводимости будет изложена в ч. VI. Более сложным является вопрос о применимости разложения (3,2) в случае полей высокой частоты и в пространственно-неоднородных системах.

При переходе к высоким частотам разделение тока на две части — ток свободных и связанных зарядов — теряет смысл.

Ясно, что в высокочастотном поле заряды как свободные, так и связанные совершают практически одинаковое колебательное движение. Рассуждая, далее, количественно, можно утверждать, что разложение (3,2) предполагает, что изменение полей в пространстве должно быть достаточно плавным и происходить на расстояниях, бóльших по сравнению с молекулярными размерами a. В противном случае потеряло бы смысл макроскопическое усреднение по объему, включающее достаточно большое число молекул. Поскольку изменение в пространстве происходит на длине волны, должно выполняться неравенство $\lambda \gg a$, и следовательно, мы ограничены частотами, много меньшими $\omega_0 < c/a$.

Однако это ограничение не является еще самым сильным. В области $\omega \ll \omega_0$ существует широкий интервал частот, в котором уравнение связи (4,13) оказывается неприменимым. Это уравнение, так же как и (3,2), предполагает, что частота поля мала по сравнению с обратным временем релаксации $1/\tau$, характерным для данного вещества. При этом поляризация $\boldsymbol{P}$ в некоторой точке пространства в момент времени t определяется индукцией (средним полем) в той же точке и в тот же момент времени. Если же частота сравнима с обратным временем $1/\tau$, то поляризация будет отставать от поля и станет зависящей от истории процесса. При этом вместо (4,13) мы должны будем написать более общее соотношение:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(t, t') \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t')\, dt', \tag{6,2}$$

где интегрирование ведется по всем более ранним временам ($t' < t$) и функция $\varepsilon(t, t')$ определяет образование поляризации в результате воздействия поля в предыдущие моменты времени. Поскольку время течет равномерно, никакого выделенного момента времени не существует. Это значит, что функция $\varepsilon(t, t')$ может зависеть только от времени, которое протекло между моментом t' и моментом t, иными словами, от аргумента $(t - t')$. Таким образом,

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(t - t') \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t')\, dt'. \tag{6,3}$$

Заметим при этом, что частоты, при которых уравнение (4,13) теряет свою применимость, весьма малы по сравнению с ω_0. Действительно, времена релаксации τ всегда меньше или

равны характерным атомным временам $\tau_{ат} \sim \frac{a}{v}$, где v — скорость электронов в атомах. Поэтому

$$\omega \sim \frac{1}{\tau_{ат}} \sim \frac{v}{a} \sim \frac{v}{c}\,\omega_0 \ll \omega_0. \qquad (6,4)$$

Рассмотрение, которое будет проведено в § 32, покажет, что в области частот, приближающихся к характерным атомным частотам, диэлектрическая проницаемость оказывается зависящей от частоты. Поэтому явление это получило название частотной, или временной, дисперсии.

При высоких частотах наступает и другое явление, получившее название пространственной дисперсии. Именно для применимости уравнения связи (4,13) длина волны должна быть велика не только по сравнению с размерами атома, но также и с размерами области пространственной неоднородности в веществе. Если обозначить размер области неоднородности через l, то необходимо соблюдение неравенства $\lambda > l$. Если $\lambda \sim l$, то поляризация в данной точке пространства будет зависеть от значения поля в соседних точках пространства в предыдущие моменты времени, т. е.

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int \varepsilon(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t - t')\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}', t')\,dV'. \qquad (6,5)$$

Выражение (6,5) показывает, что вклад в поляризацию в данной точке и в данный момент делают заряды, находившиеся ранее в соседних точках пространства. В качестве примеров среды с пространственной дисперсией можно назвать, например, плазму и металлы.

Все сказанное о временно́й и пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости относится также и к магнитной проницаемости. Мы видим, таким образом, что приведенная в § 4 форма записи уравнений связи, а следовательно, и уравнений Максвелла в их простейшем виде применима лишь в случае изотропных сред, не обнаруживающих временно́й и пространственной дисперсии и не являющихся ферромагнитными или сегнетоэлектрическими.

§ 7. Закон сохранения энергии

Вывод закона сохранения энергии в непоглощающей, изотропной, неферромагнитной, несегнетоэлектрической среде в отсутствие пространственной и временно́й дисперсии ничем не отличается от аналогичных вычислений, проведенных в § 12 ч. I.

Именно: если все тела (проводники и диэлектрики), находящиеся в поле, неподвижны, то работа, произведенная (в единицу времени) электрическим полем над зарядами, равна

$$\frac{dW}{dt} = \int \boldsymbol{jE}\, dV = \frac{c}{4\pi} \int \boldsymbol{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\, dV - \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{E} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\, dV =$$
$$= \frac{c}{4\pi} \int (\boldsymbol{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{E})\, dV - \frac{1}{4\pi} \int \left(\boldsymbol{E} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) dV =$$
$$= - \oint \boldsymbol{\sigma}\, d\boldsymbol{S} - \int \frac{\partial}{\partial t} u_0\, dV.$$

При этом мы прибавили к вычисляемому интегралу выражение, равное нулю в силу (4,13), и обозначили через u_0 плотность энергии электромагнитного поля в среде

$$u_0 = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} \tag{7,1}$$

и через σ — вектор Пойнтинга

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\boldsymbol{EH}] = \frac{c}{4\pi\mu} [\boldsymbol{EB}]. \tag{7,2}$$

Удобно записать закон сохранения энергии в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int u_0\, dV = \oint \boldsymbol{\sigma}\, d\boldsymbol{S} + \frac{dW}{dt}. \tag{7,3}$$

В дифференциальной форме закон сохранения энергии выражается соотношением

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \boldsymbol{jE} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}. \tag{7,4}$$

Интерпретация закона сохранения энергии в среде не отличается, в принципе, от данной нами в гл. I для пустоты. Следует лишь отметить то обстоятельство, что в (7,4) входит только плотность тока свободных зарядов j. При движении свободных зарядов в неподвижном проводнике вся механическая работа поля полностью переходит в тепло, именуемое джоулевым теплом. Механизм последнего процесса зависит от конкретных свойств проводников. Мы коснемся еще этого вопроса в дальнейшем. Обозначив через Q_0 джоулево тепло, выделяющееся в единице объема за 1 *сек* и равное

$$Q_0 = \boldsymbol{jE} = \frac{j^2}{\sigma},$$

мы можем написать закон сохранения энергии в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int u_0\, dV = \int Q_0\, dV + \oint \sigma\, d\boldsymbol{S}.$$

Величины

$$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{DE}{8\pi} \quad \text{и} \quad \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi}$$

представляют соответственно плотность электрической и магнитной энергии единицы объема.

Поскольку, однако, величины ε и μ в веществе являются функциями температуры, все наше рассмотрение предполагает постоянство температуры среды. Поэтому величину $\frac{ED+BH}{8\pi}$ следует трактовать как свободную энергию единицы объема среды.

К закону сохранения энергии в случае переменных во времени полей мы вернемся еще раз в § 31.

ГЛАВА II

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 8. Электростатическое поле

Уравнения электромагнитного поля существенно упрощаются в случае электростатики.

Полагая, что поля не зависят от времени и ток равен нулю, можно написать систему уравнений Максвелла в виде

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{E}&=0,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{D}&=4\pi\rho, \end{aligned}\right\} \qquad (8{,}1)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{B}&=0,\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H}&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (8{,}2)$$

Мы не будем рассматривать постоянные магнитные поля в веществе [1]).

Уравнения (8,1) полностью определяют электростатическое поле в среде.

Подчеркнем, что ρ означает среднюю плотность свободных зарядов, введенных в диэлектрик извне. В отличие от проводников, свободные заряды в диэлектрике неподвижно фиксированы в определенных положениях.

Если диэлектрик помещен во внешнее электрическое поле, связанные заряды, входящие в состав молекул, или ионы, образующие ионную решетку, смещаются друг относительно друга так, что диэлектрик поляризуется. При неоднородной поляризации в диэлектрике возникает объемный связанный заряд, средняя плотность которого определяется формулой (3,6). Напомним, что полный связанный заряд, появившийся в диэлектрике при поляризации, всегда равен нулю.

Наряду с объемной плотностью связанных зарядов на поверхности диэлектрика при его поляризации возникает поверхностная плотность заряда $\omega_s = P_n$.

---

[1]) См. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1967.

Поле внутри диэлектрика согласно (8,1) является безвихревым. Потенциал электростатического поля, определяемый по (6,2), удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho. \tag{8,3}$$

В однородном диэлектрике $\varepsilon = \text{const}$, и последнее уравнение переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{8,4}$$

Из уравнения Пуассона следует, что в однородном диэлектрике потенциал поля, создаваемого зарядами с объемной плотностью свободного заряда ρ, можно написать в виде

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho\, dV}{r}. \tag{8,5}$$

Формула (8,5) показывает, что потенциал поля и самое поле в диэлектрической среде уменьшено по сравнению с полем, создаваемым теми же зарядами в пустоте, в ε раз. В частности, поле точечного заряда в диэлектрической среде равно

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{R}}{\varepsilon R^3}.$$

Соответственно сила взаимодействия зарядов по закону Кулона в однородной диэлектрической среде меньше, чем в пустоте, в ε раз. Этот результат имеет простой смысл: электрическое поле, создаваемое свободными зарядами, помещенными в диэлектрическую среду, вызывает ее поляризацию. При поляризации связанные заряды смещаются и создают в среде поле, ослабляющее поле свободных зарядов.

Необходимо подчеркнуть, что этот вывод относится исключительно к полю зарядов, помещенных внутрь однородного и изотропного диэлектрика. Из примеров, которые будут разобраны ниже, будет ясно, что к неоднородному диэлектрику этот вывод совершенно неприменим.

На границе раздела двух диэлектриков потенциал должен удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \tag{8,6}$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = \varepsilon_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2. \tag{8,7}$$

Первое из них эквивалентно (5,2), второе непосредственно следует из (5,6), если положить поверхностную плотность свободного заряда $\omega_S = 0$.

Изображая наглядно распределение поля при помощи силовых линий, мы видим из граничных условий (8,6) и (8,7), что

на границе раздела двух диэлектриков происходит преломление силовых линий, причем

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{8,8}$$

Смысл углов α_1 и α_2 виден на рис. 85.

Рассмотрим теперь электростатическое поле в проводниках. Как мы подчеркивали уже выше, отличительной особенностью проводников является наличие в них большого количества подвижных зарядов. Появление внутри проводника среднего поля $\boldsymbol{E}$ всегда вызывает в нем электрический ток, представляющий перемещение свободных зарядов под действием поля. Если ток в проводнике отсутствует, а это и есть требование электростатики, то неизбежно и напряженность поля в проводнике равна нулю

$$\boldsymbol{E} = 0.$$

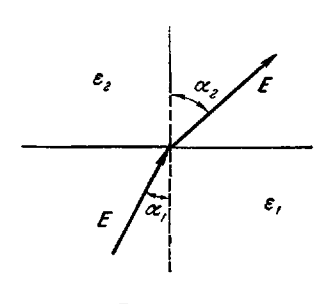


Рис. 85.

Из равенства нулю поля во всей области пространства, заполненной проводником, следует, что объемная плотность заряда внутри проводника также равна нулю.

Обращение в нуль вектора напряженности электростатического поля в проводнике можно наглядно представить следующим образом: при внесении проводника во внешнее поле в нем начинается перемещение свободных зарядов к поверхности, которое происходит до тех пор, пока поле поверхностных зарядов полностью компенсирует внешнее поле внутри проводника.

Процесс происходит так, как будто бы проводник обладал бесконечно большой поляризуемостью при любом значении напряженности поля или, как это видно из (8,7), бесконечно большой диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 \to \infty$. Как видно из (8,8), линии электростатического поля подходят нормально к поверхности проводника. Хотя отождествление проводника с диэлектриком, имеющим бесконечно большую проницаемость, имеет формальный характер, — понятие поляризации неприменимо к свободным зарядам в проводниках, оно полезно лишь для наглядной интерпретации соотношений электростатики.

Значение поверхностной плотности заряда для проводников получается из граничного условия (5,6), если положить в нем напряженность поля внутри металла равной нулю. Тогда находим

$$\omega_S = \frac{\varepsilon E_n}{4\pi}, \tag{8,9}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник, E_n — нормальная слагающая внешнего поля у его поверхности. Граничное условие (5,2) дает для тангенциальной слагающей внешнего поля у поверхности проводника

$$E_{\mathrm{tg}} = 0, \tag{8,10}$$

поскольку в самом проводнике она равна нулю.

Таким образом, внешнее поле проводника направлено нормально к его поверхности и $E_n = E$. Формулы (8,9) и (8,10) можно переписать, введя потенциал внешнего поля φ в виде

$$\left.\begin{aligned} \omega_S &= -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}, \\ \varphi &= \varphi_{\text{м}} = \text{const} \end{aligned}\right\} \quad \text{на поверхности проводника.} \tag{8,11}$$

В частности, если металл находится в пустоте, величину ε следует положить равной единице.

Полный заряд на поверхности проводника

$$e = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_S dS, \tag{8,12}$$

где интегрирование ведется по всей поверхности проводника S. Формула (8,12) устанавливает связь между потенциалом поверхности проводника $\varphi_{\text{м}}$ и его зарядом e. Нетрудно убедиться, что эта связь имеет линейный характер: если увеличить φ в k раз, в силу (8,12) и постоянства потенциала вдоль поверхности металла, его заряд e увеличится во столько же раз.

Отношение заряда проводника к его потенциалу носит название емкости:

$$C = \frac{e}{\varphi_{\text{м}}} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\frac{1}{\varphi_{\text{м}}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_S dS. \tag{8,13}$$

Емкость пропорциональна диэлектрической постоянной среды ε, а в остальном определяется исключительно формой проводника.

Как видно из (8,13), емкость имеет размерность длины, а по порядку величины C совпадает с линейным размером проводника. В случае, если в электростатическом поле имеется не один, а несколько проводников, граничные условия (8,11) должны выполняться на каждом из них.

При этом заряды на проводниках и их потенциалы не являются произвольными. Между ними существует некоторая связь, вытекающая из однозначности решения уравнения

Лапласа с граничными условиями типа (9,3). Нахождение взаимного влияния одних проводников на другие является сложной в математическом отношении задачей, и мы ее касаться не будем[1]).

§ 9. Решение задач электростатики

Мы можем теперь в общем виде сформулировать задачу электростатики.

Пусть задана некоторая система проводников и различных по своей природе диэлектриков, находящихся в конечной области пространства. Задана также плотность объемных зарядов ρ во всех точках пространства (в объеме, занятом проводниками, $\rho=0$). Тогда уравнение для потенциала имеет вид

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon_i}$$

(i — номер среды; в пустоте $\varepsilon=1$).

На границе раздела сред: пустота — диэлектрик, пустота — проводник и диэлектрик — проводник выполняется система граничных условий, разобранных выше. Потенциал на бесконечности удовлетворяет требованию в поле с центральной симметрией

$$\varphi \sim O\left(\frac{1}{r^{1+\alpha}}\right) \quad (\alpha \geqslant 0). \tag{9,1}$$

Требуется найти распределение потенциала и электрического поля во всем пространстве. Часто эту задачу именуют прямой задачей электростатики. При этом под обратной задачей понимают нахождение распределения заряда по известному распределению потенциала. Прямая задача электростатики является одной из основных задач математической физики. Элементарными приемами электростатическая задача решается лишь для отдельных простейших случаев. Разработан ряд методов ее решения и рассчитано множество конкретных систем. Важную роль среди них играют приближенные и численные методы. В нашу цель не входит разбор различных случаев электростатических полей. Мы рассмотрим лишь некоторые простейшие примеры, имеющие общий интерес.

В простейших случаях к результату сразу приводит применение интегральной теоремы Гаусса — Остроградского. Мы не будем, однако, останавливаться на этом элементарном методе расчета, известном из курса общей физики.

На примере простейших систем будет показан метод решения уравнения Пуассона, который является эффективным и

[1]) См., например, В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954.

тогда, когда метод теоремы Гаусса оказывается несостоятельным.

Рассмотрим поле равномерно заряженной сферы. Полагая

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R, \end{cases}$$

где R — радиус сферы, запишем уравнение Пуассона в сферических координатах, учитывая, что из соображений симметрии потенциал может зависеть только от r, но не от полярных углов θ и ψ. С помощью (I, 84) получаем

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \begin{cases} -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_0 & \text{при} \quad r < R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R. \end{cases} \tag{9,2}$$

Интегрируя (9,2) в области $r<R$, находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{4\pi\rho_0 r}{3\varepsilon} + \frac{C_1}{r^2}.$$

Второе интегрирование дает

$$\varphi = -\frac{2\pi\rho_0}{3\varepsilon}r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2. \tag{9,3}$$

Поскольку потенциал должен всюду и, в частности, в точке $r=0$ иметь конечное значение, следует положить $C_1=0$. Обозначив через φ_R потенциал на поверхности сферы, запишем (9,3) в виде

$$\varphi = \varphi_R - \frac{2\pi\rho_0}{3\varepsilon}(r^2 - R^2) \qquad (r \leqslant R).$$

Вводя полный заряд сферы

$$e = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0,$$

так что $\varphi_R = \frac{e}{\varepsilon R}$, можно записать φ в виде

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{e}{\varepsilon R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (r \leqslant R). \tag{9,4}$$

При $r > R$ интегрирование (9,2) дает

$$r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = C_1,$$

$$\varphi = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

Полагая $\varphi=0$ при $r\to\infty$, находим, что $C_2=0$. На поверхности сферы должно выполняться граничное условие

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_0}\right)_{r=R}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R},$$

где слева стоит потенциал внутри, а справа вне сферы. Это условие дает $C_1=-e$, так что

$$\varphi=\frac{e}{r}\qquad(r>R).$$

Потенциал вне сферы совпадает с потенциалом точечного заряда, находящегося в центре сферы.

Найдем еще поле внутри и вне сферы и энергию поля сферы. Согласно (I, 71)

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{er}{\varepsilon R^3}\qquad(r\leqslant R),$$

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{e}{r^2}\qquad(r>R).$$

Полная энергия поля равномерно заряженной сферы равна

$$U=\frac{\varepsilon}{8\pi}\int_0^R E^2\,dV+\frac{1}{8\pi}\int_R^\infty E^2\,dV=\frac{3}{5}\frac{e^2}{R}. \tag{9,5}$$

Столь же просто можно найти поле неравномерно заряженной сферы, когда плотность заряда ρ зависит только от расстояния до центра сферы $\rho=\rho(r)$.

Именно,

$$\varphi=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int\frac{dr'}{r'^2}\left(\int_0^{r'}\rho(r)\,r^2\,dr\right)+C.$$

Между тем, уже эта простая задача не может быть решена с помощью теоремы Гаусса — Остроградского.

Совершенно аналогично решается задача о распределении потенциала внутри и вне равномерно заряженного цилиндра радиуса R.

Уравнение Пуассона на основании (I, 85) гласит:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\,\omega,$$

где ω — плотность заряда. Интегрирование дает

$$\varphi=\frac{\pi\omega}{\varepsilon}(R^2-\rho^2)-2\pi\omega R^2\ln R+C\qquad(\rho<R),$$

$$\varphi=-2\pi\omega R^2\ln\rho+C\qquad(\rho>R).$$

Следует обратить внимание на поведение потенциала вне цилиндра. При $\rho \to \infty$ имеет место логарифмическая расходимость φ. По этой причине значение постоянной C остается неопределенным. Поле вне цилиндра

$$E_\rho = -\frac{2\pi\omega R^2}{\rho} \qquad (\rho > R)$$

имеет всюду конечное значение.

§ 10. Методы изображений и отражений

При решении ряда электростатических задач полезно пользоваться теоремой единственности. Действительно, предположим, что для заданной системы нам удалось подобрать каким-нибудь образом потенциалы или электрические поля, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям и граничным условиям. В силу теоремы единственности можно считать найденное решение правильным независимо от способа его получения. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пусть бесконечная плоскость $x=0$ является поверхностью металла, который занимает полупространство $x<0$; в вакууме на расстоянии a от границы металл — вакуум помещен заряд e. Требуется найти напряженность поля во всем пространстве. Очевидно, что электрическое поле внутри металла (область $x<0$) равно нулю.

Уравнение Пуассона для потенциала в области $x>0$ имеет вид

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}). \qquad (10{,}1)$$

Граничные условия для нашей задачи имеют следующий вид:

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

В плоскости $x=0$ должны выполняться соотношения:

$$\left.\begin{aligned} D_n^{(2)} &= D_n^{(1)} + 4\pi\omega_S = 4\pi\omega_S, \\ E_{tg}^{(1)} &= E_{tg}^{(2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (10{,}2)$$

При этом учтено, что $D_n^{(1)} = 0$ в металле и на его поверхности. Условие для E_{tg} эквивалентно требованию постоянства потенциала на поверхности металла. Если электрическое поле вне металла будет найдено, то граничное условие (10,2) позволит нам определить заряд поверхности.

Для получения решения заметим, что уравнению (10,1) и условию постоянства потенциала на поверхности $x=0$ удовлетворяет потенциал поля двух зарядов, один из которых (e) находится в точке $x=+a$, а другой ($-e$) в точке $x=-a$:

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_1}, \qquad (10{,}3)$$

где r и r_1 — расстояния от зарядов до точки наблюдения. В силу единственности решений уравнений Максвелла формула (10,3) дает искомое распределение.

Вычисление градиента φ позволяет определить электрическое поле $\boldsymbol{E}$.

Перейдем теперь к рассмотрению более сложного случая, когда плоскость $x=0$ служит границей раздела двух диэлектриков. Полупространство $x>0$ и $x<0$ заполняют диэлектрики с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. В точке $x=a$ расположен заряд e. Следует найти распределение поля, создаваемого зарядом, находящимся в точке $x=a$, во всем пространстве.

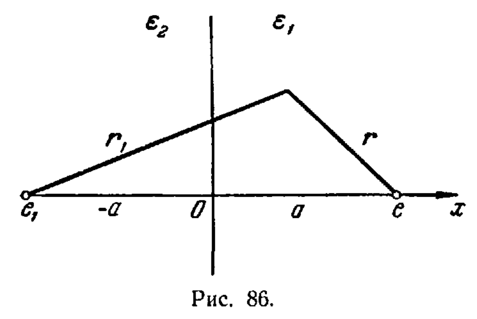


Рис. 86.

Дифференциальное уравнение для потенциала в области $x>0$ имеет вид

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi e}{\varepsilon_1}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}).$$

Будем считать, что на границе раздела нет свободных зарядов, так что граничные условия запишутся в форме

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

$$D_n^{(2)} = D_n^{(1)}, \tag{10,4}$$

$$E_{\text{tg}}^{(2)} = E_{\text{tg}}^{(1)}. \tag{10,5}$$

Мы постараемся решить эту задачу по аналогии с предыдущей, предполагая, что потенциал поля совпадает с потенциалом поля эквивалентных зарядов, расположенных в точках $x=a$ и $x=-a$.

Предположим, что поле в области $x>0$ эквивалентно полю двух зарядов: заряда e, находящегося в точке $x=a$ и неизвестного заряда e_1, помещенного в точку $x=-a$. В этом случае потенциал поля в области $x>0$ имеет вид (рис. 86)

$$\varphi_1 = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e}{\varepsilon_1 r} \qquad (x>0). \tag{10,6}$$

Предположим далее, что потенциал в области $x<0$ также представляется в виде потенциала поля точечного заряда

$$\varphi_2 = \frac{e_2}{r}, \tag{10,7}$$

где e_2 — некоторый неизвестный заряд, помещенный в точке $x=a$.

Очевидно, что потенциалы φ_1 и φ_2 являются решением уравнений электростатики для соответствующих точечных зарядов. Электрические поля в обеих областях имеют вид

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{e_1 \boldsymbol{r}_1}{r_1^3} + \frac{e\boldsymbol{r}}{\varepsilon_1 r^3},$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{e_2 \boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Подставляя эти значения в граничные условия (10,4) и (10,5), находим

$$\varepsilon_2 \frac{e_2 (\boldsymbol{r})_n}{r^3} = \varepsilon_1 \left[\frac{e (\boldsymbol{r})_n}{\varepsilon_1 r^3} + \frac{e_1 (\boldsymbol{r}_1)_n}{r_1^3} \right],$$

$$\frac{e_1 (\boldsymbol{r}_1)_{\text{tg}}}{r_1^3} + \frac{e (\boldsymbol{r})_{\text{tg}}}{\varepsilon_1 r^3} = \frac{e_2 (\boldsymbol{r})_{\text{tg}}}{r^3}.$$

Здесь $(\boldsymbol{r})_n$, $(\boldsymbol{r})_{\text{tg}}$ и $(\boldsymbol{r}_1)_n$, $(\boldsymbol{r}_1)_{\text{tg}}$ — соответственно нормальные и тангенциальные проекции векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_1$.

В плоскости $x=0$ имеются следующие очевидные соотношения:

$$|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_1| \quad (\boldsymbol{r}_1)_{\text{tg}} = (\boldsymbol{r})_{\text{tg}} \quad (\boldsymbol{r}_1)_n = -(\boldsymbol{r})_n.$$

Поэтому получаем два уравнения для определения зарядов e_1 и e_2:

$$e_2 = e_1 + \frac{e}{\varepsilon_1},$$

$$e_1 \varepsilon_1 = e - \varepsilon_2 e_2,$$

из которых следует

$$e_2 = \frac{2e}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

$$e_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) e}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Таким образом, потенциал поля выражается формулами:

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{e}{r_1} \qquad (x > 0),$$

$$\varphi = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{e}{r} \qquad (x < 0).$$

Аналогичным образом метод изображений применяется для решения более сложных с геометрической точки зрения задач.

Другим полезным приемом решения электростатических задач является метод отражений.

Если $\varphi(r, \theta, \psi)$ — потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа, то простой расчет показывает, что функция

$$\varphi_1 = -\frac{R}{r} \varphi\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \psi\right)$$

также удовлетворяет этому уравнению. Соотношение

$$\varphi_1+\varphi=0$$

выполнено на сфере радиуса $r=R$. Преобразование $r\to\frac{R^2}{r}$ с геометрической точки зрения представляет зеркальное отражение в сфере радиуса R.

В качестве простого примера применения метода отражений можно привести задачу о распределении потенциала в системе точечный заряд — заземленная сфера радиуса R. Положим потенциал сферы равным нулю. Если заряд e_1 находится на расстоянии p_1 от центра сферы, то потенциал поля, создаваемого этим зарядом и индуцированным на сфере зарядом, должен иметь нулевое значение на поверхности $r=R$. Этому условию удовлетворяет потенциал вне сферы, даваемый формулой

$$\varphi=\frac{e_1}{r_1}-\frac{e_2}{r_2},$$

если подобрать должным образом неизвестные величины — заряд e_2 и его местонахождение.

Именно положим, что фиктивный заряд помещен в точке, удаленной от центра сферы на расстояние p_2, причем

$$p_1p_2=R^2.$$

Если абсолютная величина этого заряда равна

$$e_2=e_1\sqrt{\frac{p_1}{p_2}},$$

то оба заряда создают на поверхности сферы потенциал, равный нулю.

Таким образом,

$$\varphi=\frac{e_1}{r_1}-\frac{R}{p_2}\frac{e_1}{r_2}.$$

§ 11. Энергия системы проводников

Перейдем теперь к рассмотрению энергетических соотношений в электростатическом поле. Проще всего энергетические соотношения выглядят для проводников.

Поскольку поле не проникает внутрь проводников, их термодинамические свойства не изменяются. Однако наличие проводника изменяет конфигурацию поля в окружающем пространстве.

Энергию электромагнитного поля, окружающего проводник, принято называть электромагнитной энергией проводника. Полная энергия проводника равна сумме его внутренней и электромагнитной энергий.

Ниже мы будем интересоваться только последней и для краткости говорить просто об энергии проводника.

Рассмотрим энергию системы проводников. Мы будем предполагать вначале, что проводники находятся в пустоте. Полная энергия электростатического поля равна

$$U = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV.$$

Преобразуем интеграл, написав его в виде

$$U = -\frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{E}\,\mathrm{grad}\,\varphi\,dV = -\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{div}\,(\varphi\boldsymbol{E})\,dV + \frac{1}{8\pi}\int \varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\,dV =$$
$$= -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{R\to\infty} \varphi\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{S} + \frac{1}{8\pi}\sum_i \oint \varphi_i \boldsymbol{E}_i\,d\boldsymbol{S}_i.$$

Интегрирование ведется по всем поверхностям, ограничивающим объем интегрирования. Таковыми служат внешняя поверхность радиуса $R\to\infty$ и поверхности проводников. Поскольку внешние нормали у этих поверхностей ориентированы в противоположных направлениях, перед поверхностными интегралами стоят разные знаки. Мы воспользовались также тем, что в пустоте

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0.$$

Интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю в силу (9,1). На металлических поверхностях

$$\varphi_{\text{м}_i} = \mathrm{const},$$

поэтому

$$U = \frac{1}{8\pi}\sum_i \oint \varphi_i \boldsymbol{E}_i\,d\boldsymbol{S}_i = \frac{1}{8\pi}\sum_i \varphi_i \oint \boldsymbol{E}_i\,d\boldsymbol{S}_i =$$
$$= -\frac{1}{8\pi}\sum_i \varphi_{\text{м}_i} \oint \left(\frac{\partial\varphi_{\text{м}_i}}{\partial n}\right) dS_i = \frac{1}{2}\sum_i e_i\varphi_{\text{м}_i}.$$

Энергия системы проводников формально совпадает с энергией системы зарядов.

Предположим теперь, что пространство между проводниками заполняется диэлектриком. При этом возможны в принципе два случая:

а) проводники изолированы, так что заряды всех проводников имеют постоянное значение;

б) проводники соединены с устройствами, поддерживающими их потенциалы постоянными.

В первом случае, как видно из формулы (9,4), имеем

$$e = -\frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,dS = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\oint \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\,dS,$$

так что

$$\varphi' = \frac{\varphi}{\varepsilon}.$$

Соответственно

$$U' = \frac{1}{2}\sum_i e_i \varphi_{\text{м}i} = \frac{U}{\varepsilon}.$$

Поля и энергия уменьшаются в ε раз. Энергия расходуется на работу, выполняемую при заполнении пространства диэлектриком.

Во втором случае заряд каждого из проводников будет равен после заполнения диэлектриком

$$e' = \frac{\varepsilon}{4\pi}\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,dS = \varepsilon e,$$

и энергия

$$U' = \varepsilon U.$$

Увеличение энергии и работа над диэлектриком происходят за счет устройств, поддерживающих постоянными потенциалы проводников.

§ 12. Диэлектрики и проводники во внешнем электростатическом поле

Если во внешнее поле $E_0^{(e)}$ поместить незаряженный проводник или диэлектрик, конфигурация поля вблизи тела изменится. Это изменение существенно зависит от формы тел и характера внешнего поля, как это ясно видно из разбираемых ниже примеров.

Рассмотрим прежде всего случай диэлектрика.

В дальнейшем мы будем считать внешнее поле однородным на протяжении тела. Все величины, относящиеся к области пространства внутри тела, будем отмечать индексом «i».

В качестве простейших примеров рассмотрим длинный цилиндр, ориентированный осью вдоль поля, и тонкую плоскопараллельную пластинку, расположенную перпендикулярно к полю.

В первом случае поляризация диэлектрика вызовет появление поверхностных зарядов на основаниях цилиндра. Однако, поскольку длина цилиндра велика, эти заряды создают лишь слабое поле, не искажающее внешнее поле внутри цилиндра.

То же видно из граничного условия (5,2), которое дает

$$E^{(i)}_{g} = E^{(e)}_{tg}$$

и, поскольку вектор $\boldsymbol{E}$ в силу условий симметрии параллелен оси цилиндра,

$$E^{(i)} = E^{(e)}_{(0)}. \tag{12,1}$$

Во втором примере поверхностные заряды создают заметное ослабление внешего поля. Граничное условие (5,7) дает

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D}^{(i)} &= \boldsymbol{E}_0^{(e)}, \\ \text{или} \quad \boldsymbol{E}^{(i)} &= \boldsymbol{E}_0^{(e)} - 4\pi \boldsymbol{P}. \end{aligned}\right\} \tag{12,2}$$

Поле внутри пластинки ослаблено на величину $4\pi\boldsymbol{P}$. Этот вывод, как показывают расчеты, качественно сохраняется для тел более сложной формы.

В качестве следующего примера рассмотрим диэлектрический шар в однородном внешнем поле $\boldsymbol{E}_0^{(e)}$. Распределение потенциала определится из решения уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,$$

которое удовлетворяет требованию

$$\varphi = -\boldsymbol{E}_0^{(e)}\boldsymbol{r} \tag{12,3}$$

вдали от шара ($r \gg R$) и удовлетворяет граничным условиям (8,6)—(8,7) на его поверхности. Будем пытаться искать решение в виде

$$\varphi^{(e)} = \varphi_0 + \varphi_1^{(e)}(r,\ \theta,\ \boldsymbol{E}_0^{(e)}),$$

где $\varphi_0 = -\boldsymbol{E}_0^{(e)}\boldsymbol{r}$, а $\varphi_1^{(e)}$ представляет изменение потенциала вблизи шара.

Функция $\varphi_1^{(e)}$ должна убывать при $r \gg R$. Поскольку $\varphi_1^{(e)}$ зависит только от вектора $\boldsymbol{E}_0^{(e)}$, скаляров r и θ и сама должна быть скаляром, ее можно написать в виде комбинации векторов $\boldsymbol{E}_0^{(e)}$ и $\boldsymbol{r}$ или $\boldsymbol{E}_0^{(e)}$ и градиента $\frac{1}{r}$. В первом случае $\varphi_1^{(e)}$ не удовлетворяло бы требованию убывания на бесконечности, так что единственный возможный вид $\varphi_1^{(e)}$ таков:

$$\varphi_1^{(e)} = \alpha\boldsymbol{E}_0^{(e)} \operatorname{grad}\frac{1}{r},$$

где α — постоянная. Поэтому

$$\varphi^{(e)} = -\boldsymbol{E}_0^{(e)}\boldsymbol{r} + \alpha\boldsymbol{E}_0^{(e)} \operatorname{grad}\frac{1}{r}. \tag{12,4}$$

Напротив, внутри сферы потенциал $\varphi^{(i)}$ во всех точках должен оставаться конечным и поэтому должен быть написан в виде

$$\varphi^{(i)} = \beta \mathbf{E}_0^{(e)} \mathbf{r}. \qquad (12,5)$$

Очевидно, что как (12,4), так и (12,5) удовлетворяют уравнению Лапласа, а φ_0 ведет себя на бесконечности в соответствии с (12,3).

Для нахождения двух неизвестных α и β можно использовать два граничных условия:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(i)} &= \varphi^{(e)}, \\ \varepsilon^{(i)} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r} &= \varepsilon^{(e)} \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial r} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad r = R.$$

Элементарные вычисления, которые удобнее всего проводить в сферических координатах, дают

$$\alpha = \frac{\varepsilon^{(e)} - \varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} R^3,$$

$$\beta = -\left(1 - \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}}\right) = -\frac{3\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}},$$

так что окончательно

$$\varphi^{(e)} = -\left(\mathbf{E}_0^{(e)} \mathbf{r}\right) + \frac{(\mathbf{P}\mathbf{r})\, V}{r^3}, \qquad (12,6)$$

$$\varphi^{(i)} = -\left(\mathbf{E}_0^{(e)} \mathbf{r}\right) + \frac{4\pi}{3} (\mathbf{P}\mathbf{r}), \qquad (12,7)$$

где обозначено

$$\mathbf{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} \mathbf{E}_0^{(e)}, \qquad (12,8)$$

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

В частности, в пустоте $\varepsilon^{(e)} = 1$ и

$$\mathbf{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon^{(i)} - 1}{\varepsilon^{(i)} + 2} \mathbf{E}_0^{(e)} = \frac{3\varkappa}{\varepsilon^{(i)} + 2} \mathbf{E}_0^{(e)}. \qquad (12,9)$$

Если восприимчивость тела $\varkappa$ мала, так что $\varepsilon^{(i)} \approx 1$, то

$$\mathbf{P} \approx \varkappa \mathbf{E}_0^{(e)}.$$

Отсюда напряженность поля вне сферы

$$\mathbf{E}^{(e)} = -\operatorname{grad} \varphi^{(e)} = \mathbf{E}_0^{(e)} + V \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{P}\mathbf{r}) - r^2 \mathbf{P}}{r^5} \quad (r < R); \qquad (12,10)$$

$$\mathbf{E}^{(i)} = -\operatorname{grad} \varphi^{(i)} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P} + \mathbf{E}_0^{(e)} \quad (r < R). \qquad (12,11)$$

При вычислении градиента по (I, 47) мы учитывали постоянство вектора $\boldsymbol{P}$.

Из формул (12,6)—(12,11) следует:

1) во внешнем однородном поле шар, поляризуясь, приобретает дипольный момент ($\boldsymbol{P}V$) и создает дополнительное поле, совпадающее с полем диполя, помещенным в центр шара;

2) внутри шара поле имеет постоянное значение и ослаблено в $\frac{3\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(i)}+2\varepsilon^{(e)}}$ раз по сравнению с внешним полем.

Рассмотрим теперь незаряженный металлический шар, помещенный в однородное поле $\boldsymbol{E}_0$. Поле вне шара найдется из решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего тому же условию (12,3) на бесконечности и условию

$$\varphi = \varphi_{\text{м}} = 0 \tag{12,12}$$

на поверхности металла (потенциал $\varphi_{\text{м}}$ можно принять за нуль потенциала).

Выражение для $\varphi^{(e)}$ снова можно написать в виде (12,4) и подобрать α так, чтобы удовлетворялось условие (12,12).

Можно, однако, просто в формулах для $\varphi^{(e)}$, $\boldsymbol{E}^{(e)}$ и $\boldsymbol{P}$, полученных выше для диэлектрического шара, считать диэлектрическую проницаемость внутри сферы $\varepsilon^{(i)} \to \infty$. Тогда сразу получается выражение

$$\varphi^{(e)} = -E_0^{(e)} r \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \cos\theta = -\boldsymbol{E}_0^{(e)} \boldsymbol{r} + \frac{(\boldsymbol{rP})\, V}{r^3},$$

где положено

$$\boldsymbol{P} = \frac{3}{4\pi} \boldsymbol{E}_0^{(e)}.$$

Поле внутри шара

$$\boldsymbol{E}^{(i)} = 0.$$

Плотность поверхностного заряда на поверхности шара равна

$$\omega_S = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^{(e)}_{r=R} = \frac{3E_0}{4\pi} \cos\theta.$$

Полный заряд незаряженного шара остается, очевидно, равным нулю.

§ 13. Термодинамические потенциалы диэлектрика и диэлектрическая восприимчивость

Мы видели в предыдущем параграфе, что поле внутри диэлектрика существенно отличается от поля во внутреннем пространстве. При этом значение напряженности поля внутри диэлектрика зависит от его формы.

Пусть некоторый диэлектрик помещен во внешнее электрическое поле напряженности $\boldsymbol{E}_0$. Для простоты мы в дальнейшем ограничимся случаем однородного и изотропного диэлектрика. Со статистической точки зрения диэлектрик можно считать квазизамкнутой подсистемой, помещенной во внешнее поле сил.

Энергия такой подсистемы будет отличаться от энергии той же подсистемы без поля. Напряженность поля является внешним параметром, с изменением которого изменяются уровни энергии системы.

Согласно результатам § 22 ч. III, энергия i-го уровня изменяется с изменением параметра по формуле (22,1). В нашем случае внешним параметром служит вектор $\boldsymbol{E}_0$. Поэтому изменение его на величину $\delta\boldsymbol{E}_0$ приводит к изменению энергии i-го уровня на величину

$$\delta\varepsilon_i = -\mathscr{P}_i\,\delta\boldsymbol{E}_0, \tag{13,1}$$

где $\mathscr{P}_i$ представляет обобщенную силу, отвечающую внешнему параметру $\boldsymbol{E}$[1]):

$$\mathscr{P}_i = -\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\boldsymbol{E}_0}.$$

Поскольку нас будут интересовать средние значения, то, усредняя (13,1), имеем

$$\delta U = \overline{\delta\varepsilon_i} = -\overline{\mathscr{P}}_i\,\delta\boldsymbol{E}_0 = -\mathscr{P}\delta\boldsymbol{E}_0, \tag{13,2}$$

где

$$\mathscr{P} = \overline{\mathscr{P}}_i = -\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{E}_0} \tag{13,3}$$

и U — средняя энергия системы (для удобства мы не пишем черты усреднения и просто опускаем индекс i) во внешнем поле.

Сравнивая (13,2) с (17,8) ч. I, нетрудно видеть, что $\mathscr{P}$ представляет средний дипольный момент всего диэлектрика.

По определению среднего находим

$$\mathscr{P} = \frac{\sum P_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}\,\Omega(\varepsilon_i)}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}\,\Omega(\varepsilon_i)} = -\frac{\sum \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\boldsymbol{E}_0} e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}\,\Omega(\varepsilon_i)}{\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}\,\Omega(\varepsilon_i)} =$$

$$= kT\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{E}_0}\ln\sum e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}\,\Omega(\varepsilon_i) = kT\frac{\partial\ln Z}{\partial\boldsymbol{E}_0} = -\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{E}_0}, \tag{13,4}$$

где F — свободная энергия.

---

[1]) Производная по вектору имеет обычный смысл сокращенной записи соотношений для компонент векторов.

Производные по проекциям внешнего параметра $\boldsymbol{E}_0$ берутся при постоянных значениях температуры и всех остальных внешних параметров, характеризующих состояние системы. Формула (13,4) показывает, что средний дипольный момент тела и его поляризация $\boldsymbol{P} = \frac{\mathcal{P}}{V}$ могут быть вычислены, если известна функция состояний системы и ее зависимость от напряженности внешнего поля. На основании (13,4) мы можем установить связь между изменением свободной энергии в поле dF и без поля dF_0 в виде

$$dF = dF_0 - \mathcal{P} d\boldsymbol{E}_0. \tag{13,5}$$

Интегрируя (13,5), находим

$$F = F_0 - \int \mathcal{P}\, d\boldsymbol{E}_0 = F_0 - V \int \boldsymbol{P}\, d\boldsymbol{E}_0 = F_0 - \frac{\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_0 V}{2}. \tag{13,6}$$

При этом мы полагали, что в однородном поле и однородной диэлектрической среде вектор поляризации $\boldsymbol{P} \sim \boldsymbol{E}_0$. Это всегда имеет место для равномерно поляризующихся тел (в частности, тел эллипсоидальной формы).

Поляризация тела $\boldsymbol{P}$ связана с полем $\boldsymbol{E}$ соотношением (3,7). При этом, вообще говоря, поле $\boldsymbol{E}$ отлично от внешнего поля $\boldsymbol{E}_0$, поскольку диэлектрик искажает внешнее поле в окружающем его пространстве. Если, однако, его диэлектрическая проницаемость ε близка к единице, то $\boldsymbol{E}_0 \approx \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{P} = \varkappa \boldsymbol{E} \approx \varkappa \boldsymbol{E}_0$. При этом

$$dF = dF_0 - V\boldsymbol{P}\, d\boldsymbol{E} \tag{13,7}$$

или

$$F = F_0 - \frac{\varkappa V E^2}{2} = F_0 - \frac{\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}V}{2}. \tag{13,8}$$

Часто наряду со свободной энергией диэлектрика во внешнем поле F рассматривают полную свободную энергию диэлектрика за вычетом его потенциальной энергии во внешнем поле

$$dF' = dF_0 + V\boldsymbol{E}_0\, d\boldsymbol{P} = dF_0 + \boldsymbol{E}V\, d\boldsymbol{P}, \tag{13,9}$$

$$F' = F_0 + V\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_0. \tag{13,10}$$

Иногда свободной энергией именуют также величину

$$F'' = F' + \frac{E_0^2 V}{8\pi} = F_0 + \frac{E_0^2 V}{8\pi} + V\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_0, \tag{13,11}$$

представляющую свободную энергию диэлектрика (за вычетом его потенциальной энергии во внешнем поле) плюс энергия внешнего электрического поля в объеме, заполненном диэлектриком.

Нетрудно найти, пользуясь (13,8), что

$$dF'' = dF_0 + V\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{P} + \frac{1}{4\pi}V\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{E} =$$

$$= dF_0 + V\boldsymbol{E}\left(d\boldsymbol{P} + \frac{d\boldsymbol{E}}{4\pi}\right) = dF_0 + \frac{V\boldsymbol{E}}{4\pi}\,d\boldsymbol{D}. \qquad (13,12)$$

Таким образом, F'' представляет энергию диэлектрика без поля плюс энергия поля в объеме, занятом диэлектриком.

Заметим, что из (13,12) следует

$$E_i = \frac{4\pi}{V}\frac{\partial F''}{\partial D_i}, \qquad \frac{\partial E_i}{\partial D_k} = \frac{4\pi}{V}\frac{\partial^2 F''}{\partial D_i\,\partial D_k}. \qquad (13,13)$$

В анизотропной среде связь между $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ дается формулой (6,1), которую мы запишем в виде

$$E_i = \varepsilon_{ik}^{-1} D_k,$$

где ε_{ik}^{-1} — тензор, обратный ε_{ik}.

Тогда (13,13) дает

$$\frac{V}{4\pi}\varepsilon_{ik}^{-1} = \frac{\partial^2 F''}{\partial D_i\,\partial D_k} = \frac{\partial^2 F''}{\partial D_k\,\partial D_i} = \frac{V}{4\pi}\varepsilon_{ki}^{-1}.$$

Таким образом, доказано, что ε_{ik} является симметричным тензором.

Для практических целей вместо свободной энергии удобно пользоваться термодинамическим потенциалом Φ. При этом вместо (13,8) получаем

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{PE_0V}{2}. \qquad (13,14)$$

Объем диэлектрика в поле равен

$$V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T = V_0 - \frac{E_0}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial p}(\boldsymbol{P}V)\right\}_T.$$

Изменение объема диэлектрика при изотермическом включении внешнего поля носит название электрострикции. Как видно из последней формулы, знак и величина эффекта зависят от поляризуемости, а также сжимаемости тела.

Наряду с изменением объема происходит изменение энтропии диэлектрика при включении поля. Именно,

$$S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p = S_0 + \frac{E_0}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial T}(\boldsymbol{P}V)\right\}_p. \qquad (13,15)$$

Изменение энтропии при изотермическом включении поля сопровождается выделением тепла $Q = T\Delta S$ (так называемый электрокалорический эффект при постоянном давлении). При адиабатическом включении поля происходит изменение температуры диэлектрика.

В виде примера найдем электрострикцию и электрокалорический эффект для шара в однородном поле.

Согласно (12,9) имеем

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{PE_0V}{2} = \Phi_0 - \frac{3}{8\pi}\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 2}VE_0^2,$$

откуда

$$V = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_T = \\ = V_0 - \frac{3}{8\pi}\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 2}E_0^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T - \frac{9E_0^2V}{8\pi}\frac{1}{(\varepsilon_1 + 2)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial p}\right)_T. \quad (13,16)$$

Аналогично

$$Q = T\Delta S = \frac{3TE_0^2}{8\pi}\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_2 + 2}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \frac{9TE_0^2V}{8\pi}\frac{1}{(\varepsilon_1 + 2)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial T}\right)_p. \quad (13,17)$$

Нетрудно показать, что если ε уменьшается с ростом температуры (как это имеет место для большинства веществ), $Q < 0$, т. е. при увеличении поляризации тепло выделяется.

Следующая естественно возникающая проблема — это вычисление электрической восприимчивости $\varkappa$ диэлектрика.

В отличие от предыдущих соотношений, имеющих весьма общий характер, и не требовавших знания конкретного вида функции состояний Z, для нахождения электрической восприимчивости необходимо получить функцию состояний тела.

Рассмотрим прежде всего электрическую восприимчивость идеальных газов.

Для того чтобы найти значение восприимчивости, отнесенной к одной молекуле, нужно найти соответствующую функцию состояний молекулы в электрическом поле. При этом нужно различать два случая:

а) молекулы обладают собственным постоянным дипольным моментом,

б) молекулы не обладают собственным дипольным моментом.

Дипольный момент определяется выражением

$$\boldsymbol{d} = \sum e_i\boldsymbol{r}_i,$$

где суммирование ведется по всем зарядам в молекуле. В атомах и молекулах, обладающих симметричной формой, положительные и отрицательные заряды расположены симметрично. Благодаря этому суммирование по положительным и отрицательным зарядам в результате дает нуль. Все атомы и такие симметричные молекулы, как H_2, O_2, CH_4 и т. п., не имеют собственного дипольного момента. Напротив, у сильно асимметричных молекул, например молекул, представляющих образование

двух разных ионов, как HCl, HBr и т. п., или имеющих асимметричную форму, как CH_3Cl, CH_3COOH, H_2O и т. п., дипольный момент отличен от нуля. Такие молекулы называются дипольными.

Рассмотрим прежде всего свойства газа с дипольными молекулами, имеющими собственный момент $\boldsymbol{d}_0$. Если $\varepsilon^{(0)}$ — энергия молекулы в отсутствии поля, то при помещении ее в электрическое поле напряженностью $\boldsymbol{E}$ ее энергия будет равна

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} - \boldsymbol{d}_0\boldsymbol{E} = \varepsilon^{(0)} - d_0 |\boldsymbol{E}| \cos\theta, \qquad (13,18)$$

где θ — угол между направлением приложенного поля и осью молекулы

Из формулы (13,18) следует, что изменение энергии дипольной молекулы в электрическом поле сводится к появлению у нее потенциальной энергии, равной $(-d_0|\boldsymbol{E}|\cos\theta)$. Эта энергия в однородном электрическом поле не зависит от положения молекулы, а определяется исключительно ее ориентацией. Потенциальная энергия имеет минимальное значение у молекулы, ориентированной вдоль поля, и максимальное — у ориентированной в противоположном направлении. В отсутствие поля молекулы ориентированы совершенно беспорядочно, все их ориентации являются равновероятными. Электрическое поле оказывает ориентирующее влияние и стремится установить все молекулярные диполи вдоль поля, когда их потенциальная энергия минимальна. Ориентация молекул вдоль поля становится более вероятной, чем против поля. Как далеко идет эта упорядочивающая тенденция поля и в какой мере полю удается ориентировать все диполи, определяется отношением энергии $\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{E}$, приобретаемой дипольными молекулами в электрическом поле, к их тепловой энергии kT. Если последняя велика, т. е. $kT \gg \boldsymbol{d}_0\boldsymbol{E}$, то ориентирующее действие поля является сравнительно слабым. Напротив, при $kT \ll d_0E$ все диполи вынуждены ориентироваться вдоль поля.

Значения дипольных моментов молекул некоторых газов приведены в табл. 1. По порядку величины они равны произведению заряда электрона на размеры молекул.

Таблица 1

Газ	HCl	HBr	H_2O	SO_2	CO_2	CO	$CHCl_3$	CH_2Cl_2	CH_3Cl
Дипольный момент 10^{-18} эл.-ст. ед. $\times$ *см*	1,03	0,79	1,84	1,61	0,00	0,12	0,95	1,59	1,89

С помощью данных табл. 1 можно оценить порядок величины $\frac{d_0 E}{kT}$. Благодаря малости дипольного момента d_0 оказывается, что эта величина весьма мала при всех температурах, при которых газы еще не конденсируются, и во всех практически достижимых полях. Для того чтобы $d_0 E$ было порядка kT, нужно, чтобы $|E|$ было порядка $\frac{kT}{d_0} \approx 10^4 T \; \frac{в}{см}$. При $T \approx 300°$ K получаем $|E| \approx 3 \cdot 10^6$ *в/см*, что явно нереально. Таким образом, ориентирующее действие поля является слабым. Тем не менее появление преимущественной ориентации у молекулярных диполей приводит к возникновению отличного от нуля среднего дипольного момента всего газа $\mathcal{P}$.

Вычислим средний дипольный момент газа по формуле (13,4). При этом, поскольку отношение $\frac{d_0 E}{kT}$ весьма мало, температуру практически всегда можно считать высокой и заменить суммирование интегрированием. Функция состояний газа дипольных молекул в электрическом поле имеет вид

$$Z = \frac{Z_0}{4\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{\frac{d_0 |E| \cos\theta}{kT}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right)^N . \qquad (13,19)$$

Здесь N — число молекул в газе, а через Z_0 обозначена функция состояний газа в отсутствие поля. Интегрирование ведется по всем состояниям молекулы, которые определяются углами θ, φ. Поскольку $\frac{d_0 |E|}{kT} \ll 1$, имеем

$$\int_0^{\pi} e^{\frac{d_0 |E| \cos\theta}{kT}} \sin\theta \, d\theta \approx$$

$$\approx \int_0^{\pi} \left\{ 1 + \frac{d_0 |E|}{kT} \cos\theta + \left(\frac{d_0 |E|}{kT} \right)^2 \frac{\cos^2\theta}{2} \right\} \sin\theta \, d\theta = 2 + \frac{1}{3} \left(\frac{d_0 |E|}{kT} \right)^2 ,$$

так что

$$Z = Z_0 (4\pi)^N \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{d_0 |E|}{kT} \right)^2 \right]^N .$$

Логарифмируя, имеем

$$\ln Z \approx \ln Z_0 + N \ln 4\pi + \frac{N}{6} \left(\frac{d_0 |E|}{kT} \right)^2 . \qquad (13,20)$$

Подставляя (13,20) в (13,4), находим

$$\mathcal{P} = \frac{N d_0^2 E}{3kT} . \qquad (13,21)$$

Последняя формула имеет очень простой смысл. Если написать ее в виде произведения двух множителей

$$\mathcal{P} = \frac{d_0 |E|}{3kT} (d_0 N),$$

то ясно, что первый множитель характеризует степень ориентации молекулярных диполей, которая тем больше, чем сильнее приложенное поле $|E|$, и тем меньше, чем сильнее дезориентирующее действие теплового движения, характеризуемое значением kT. Второй множитель означает полный дипольный момент молекул в газе. Результирующая поляризация газа была бы равна d_0N, если бы все диполи были ориентированы вдоль приложенного поля.

При наличии теплового движения поляризация составляет только малую часть этой предельной поляризации. Малость ориентационного множителя $\frac{d_0 |E|}{kT}$ можно наглядно представить себе следующим образом. Большая часть дипольных молекул движется и, в частности, вращается в газе с энергией, значительно большей, чем потенциальная энергия в поле $d_0\boldsymbol{E}$. Поэтому приложенное поле не может приостановить их вращения. При вращении происходит усреднение дипольного момента по всем направлениям, и средний вклад вращающейся молекулы в полный дипольный момент газа оказывается равным нулю. Однако в газе имеется небольшой процент молекул, у которых кинетическая энергия вращательного движения меньше $d_0\boldsymbol{E}$. Такие молекулы не могут повернуться против поля, и в поле их вращательное движение заменяется крутильными колебаниями около направления поля. Только эти молекулы вносят долю в средний дипольный момент газа.

Из (13,21) можно найти электрическую воспринмчивость дипольного газа, отнесенную к единице объема:

$$\varkappa = \frac{|\mathcal{P}|}{|E|\,V} = \frac{Nd_0^2}{3VkT}. \tag{13,22}$$

Формула (13,22) носит название формулы Ланжевена, которым она впервые была получена.

Диэлектрическая восприимчивость газа связана с непосредственно измеряемой диэлектрической проницаемостью соотношением (4,14):

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa.$$

Из измерений ε, как функции температуры, может быть найден дипольный момент молекул d_0. Найденные таким образом значения d_0 приведены в таблице 1. Численное значение их мало, так что в газах ε всегда порядка единицы.

Дипольный момент является важной характеристикой молекул. Он, в частности, позволяет судить о структуре и геометрической форме молекул. Чем более асимметричной является молекула, тем больше ее дипольный момент. Это видно, в частности, на примере молекул CCl_4, $CHCl_3$, CH_2Cl_2, CH_3Cl и CH_4, восприимчивости которых изображены на рис. 87. Значение d_0^2 определяется из наклона соответствующей прямой.

Четыреххлористый углерод и метан являются симметричными молекулами, имеющими форму тетраэдра; их дипольный момент равен нулю. У хлорзамещенных метана, являющихся асимметричными молекулами, дипольный момент отличен от нуля. Он имеет наибольшее значение у асимметричной молекулы CH_3Cl.

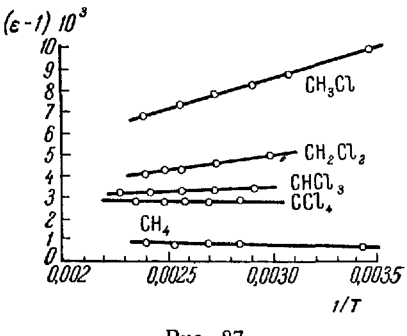


Рис. 87.

Меньший интерес представляет поведение молекул, не обладающих собственным дипольным моментом. Под действием приложенного электрического поля происходит их поляризация. Электронные оболочки атомов или молекул смещаются относительно ядер, и в них возникает индуцированный дипольный момент. Величина индуцированного дипольного момента пропорциональна напряженности приложенного поля, так что

$$\boldsymbol{d} = \alpha \boldsymbol{E}$$

и энергия

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} - \frac{\alpha |\boldsymbol{E}|^2}{2}. \tag{13,23}$$

Поэтому

$$Z = Z_0 e^{\frac{N\alpha |\boldsymbol{E}|^2}{2kT}}$$

и

$$P = N\alpha |\boldsymbol{E}|. \tag{13,24}$$

Поляризация оказывается не зависящей от температуры. Иными словами, тепловое движение не влияет на поляризацию электронных оболочек атомов и молекул.

Изложенная здесь теория справедлива только для сильно разреженных газов. В более плотных газах и особенно жидкостях взаимодействие между молекулами играет весьма существенную роль в их электрических свойствах. В таких системах нельзя уже более рассматривать ориентирующее действие поля на отдельный диполь. Ориентация диполей будет определяться

не только внешним, но и внутренним электрическим полем, созданным всеми дипольными молекулами.

Теория дипольных жидкостей оказывается весьма сложной, и мы не можем здесь ее изложить. Отметим только, что в этой области нет той ясности, которая имеется в случае разреженных газов.

Диэлектрическая поляризация подавляющего числа твердых диэлектриков обусловлена индуцированной поляризацией молекул диэлектрика. Ориентационной поляризации даже в кристаллах, построенных из дипольных молекул, не происходит, поскольку молекулы в кристалле сильно взаимодействуют с соседями и электрическое поле слишком слабо для того, чтобы преодолеть силы взаимодействия и поворачивать молекулы. Одним из немногих типичных исключений является твердый HCl. Измерения И. В. Курчатова показали, что молекулы HCl поворачиваются под действием электрического поля, и в кристалле происходит ориентация поляризации. Значения восприимчивости и диэлектрической проницаемости у твердых диэлектриков гораздо больше, чем у газов. Диэлектрическая проницаемость твердых диэлектриков имеет значение, равное нескольким единицам, а в ряде случаев достигает значений около 100.

Благодаря большой величине диэлектрической проницаемости в плотной среде необходимо учитывать, что на молекулу, находящуюся в среде, действует не внешнее поле E_0, а эффективное внутреннее поле, слагающееся из внешнего поля и поля, возникающего в среде из-за поляризации ее молекул.

Диэлектрическая постоянная твердых диэлектриков сравнительно слабо изменяется с температурой. Это означает, что диэлектрические свойства твердых тел связаны с изменением распределения зарядов внутри молекул и не зависят от их теплового движения.

ГЛАВА III

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 14. Закон Ома

Рассмотрев основные свойства электростатического поля неподвижных зарядов, мы можем перейти к изучению более сложного случая электромагнитного поля, возникающего при стационарном движении свободных зарядов, т. е. при наличии постоянного во времени тока в проводниках. Этот вопрос включает два, в значительной мере независимых, аспекта:

1) нахождение электромагнитного поля постоянных токов;

2) рассмотрение механизма прохождения тока в различных средах — механизма электропроводности.

Не вдаваясь в изучение механизма прохождения тока, мы ограничимся допущением, что плотность тока в однородном проводнике связана с напряженностью поля законом Ома ($j = \sigma E$).

Значение электропроводности σ тесно связано с механизмом прохождения тока и изменяется в весьма широких пределах у различных проводников.

В части VI мы рассмотрим микроскопический смысл электропроводности и оценим ее значение для некоторых важнейших проводников.

Мы будем далее предполагать, что постоянство электрического тока во времени поддерживается некоторыми устройствами, именуемыми источниками тока. Примерами источников тока могут служить машинные генераторы разнообразных устройств, гальванические элементы, аккумуляторы, термопары и т. п. Действительно, физически совершенно очевидно, что никакая комбинация заряженных или нейтральных проводников не может обеспечить прохождение постоянного тока в системе. Приведя в контакт проводники, находящиеся при различных потенциалах, мы вызовем нестационарное движение свободных зарядов, которое будет продолжаться до тех пор, пока не произойдет выравнивание потенциалов всех проводников.

Источники постоянного электрического тока должны всегда иметь неэлектростатический характер. Они могут, хотя и

не обязательно, иметь, например, электрохимический характер. Мы не будем в дальнейшем вдаваться в детали устройства источников тока. Для нас важно лишь то, что источники тока обеспечивают поддержание постоянного тока в проводниках.

Совершенно формально, не входя в рассмотрение механизма действия источников тока, мы можем включить источник тока в состав рассматриваемой системы проводников с постоянным током, видоизменив закон Ома. Именно, замечая, что источники тока создают плотность тока в проводниках вне зависимости от непосредственного действия электрического поля, мы можем записать закон Ома в обобщенном виде

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}\right). \qquad (14,1)$$

Вектор $\boldsymbol{E}^{\text{стор}}$, зависящий от координат, формально характеризует действие источников тока. В тех участках проводника, где действует источник тока, при $\boldsymbol{E} = 0$ $\boldsymbol{j} \neq 0$. Так, например, если система состоит из проводника, соединенного с пластинами гальванического элемента, то в области пространства, занятой элементом, $\boldsymbol{E}^{\text{стор}} \neq 0$. Процессы, происходящие внутри гальванического элемента, позволяют поддерживать при различных потенциалах его пластины, соединенные с проводником. Это, в свою очередь, обеспечивает существование постоянного во времени электрического поля внутри элемента и, в соответствии с законом Ома, постоянного тока в проводнике.

Величина $\boldsymbol{E}^{\text{стор}}$ по историческим причинам носит не совсем удачное наименование сторонней силы ($\boldsymbol{E}^{\text{стор}}$ не имеет размерности силы и не является аналогом силы по существу). Сторонняя сила является количественной характеристикой устройства, поддерживающего прохождение постоянного тока в проводниках. Мы вернемся еще к интерпретации понятия сторонней силы в последующих параграфах.

Система уравнений Максвелла для постоянного тока при наличии сторонних сил имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= 4\pi\rho; \end{aligned}\right\} \qquad (14,2)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14,3)$$

Уравнение непрерывности для стационарного процесса прохождения тока можно написать в виде

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \qquad (14,4)$$

Нетрудно видеть, что написанная система уравнений является полной. Мы видим, прежде всего, что распределение

электрического поля не зависит от распределения магнитного поля. Последнее определяется заданием плотности тока j во всем пространстве.

На границе раздела проводящих сред должны выполняться граничные условия:

$$E_{tg}^{(1)} = E_{tg}^{(2)}, \tag{14,5}$$

или

$$\frac{j_{tg}^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{j_{tg}^{(2)}}{\sigma^{(2)}} \tag{14,6}$$

и

$$j_n^{(1)} = j_n^{(2)}. \tag{14,7}$$

Первое из них совпадает с (5,2), второе получается из уравнения непрерывности так же, как, например, условие (5,5).

Наглядно граничные условия (14,6)—(14,7) можно интерпретировать как преломление линий тока на границе раздела по закону:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma^{(1)}}{\sigma^{(2)}}, \tag{14,8}$$

где α — угол между линией тока и нормалью к поверхности в соответствующих средах.

На границе раздела проводник — диэлектрик выполняется граничное условие

$$j_n = 0. \tag{14,9}$$

Магнитные векторы удовлетворяют граничным условиям, рассмотренным в § 5.

§ 15. Линейный проводник с постоянным током

Рассмотрим прежде всего весьма важный случай линейного проводника с постоянным током. Под линейным мы будем понимать проводник, длина которого весьма велика по сравнению с его поперечными размерами. Линейные проводники часто именуют также проводами. Вектор плотности тока в линейном проводнике можно, в силу граничного условия (14,9) на его поверхности, с большой степенью точности считать параллельным вектору dl, касательному к оси проводника.

Таким образом, в каждой данной точке линейного проводника можно написать

$$j\,dl = j\,dl. \tag{15,1}$$

Введем в рассмотрение полный ток I, проходящий через сечение линейного проводника, нормальное к оси проводника

(или, что то же самое, нормальное к линиям тока). По определению

$$I = \int j\,dS = \int \sigma\left(E + E^{\text{стор}}\right) dS, \tag{15,2}$$

где интегрирование ведется по сечению линейного контура с током

Уравнение непрерывности (14,4) и граничное условие позволяют написать

$$\oint j\,dS = 0$$

или

$$I = \int j\,dS = jS = \text{const}, \tag{15,3}$$

где S — поперечное сечение проводника в данном месте.

Уравнение непрерывности в интегральной форме показывает, что через любое сечение линейного проводника идет одинаковый ток I.

Проинтегрируем формулу обобщенного закона Ома (15,1) вдоль линейного контура с током. Имеем, очевидно,

$$\int_1^2 j\frac{dl}{\sigma} = \int_1^2 E\,dl + \int_1^2 E^{\text{стор}}\,dl.$$

Первый интеграл преобразуем, написав

$$\int_1^2 j\frac{dl}{\sigma} = \int_1^2 j\frac{dlS}{\sigma S} = I\int_1^2 \frac{dl}{\sigma S} = IR_{12}, \tag{15,4}$$

где R_{12} представляет омическое сопротивление проводника на участке (1,2). Тогда имеем

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}^{\text{стор}}, \tag{15,5}$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов между точками 1 и 2 и

$$\mathscr{E}_{12}^{\text{стор}} = \int_1^2 E^{\text{стор}}\,dl \tag{15,6}$$

носит название сторонней электродвижущей силы (э. д. с.) на участке (1,2).

Если на данном участке провода сторонней силы нет, $E^{\text{стор}} = 0$, то (15,5) превращается в простой закон Ома.

Если контур замкнут и точки 1 и 2 совпадают, поскольку в силу (14,2) поле $\boldsymbol{E}$ имеет потенциальный характер, интеграл $\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=0$ и

$$IR=\mathscr{E}^{\text{стор}}, \tag{15,7}$$

где R — сопротивление всего линейного контура и

$$\mathscr{E}^{\text{стор}}=\oint \boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,d\boldsymbol{l}. \tag{15,8}$$

Произведение силы тока на полное сопротивление линейного контура с током равно э. д. с. замкнутой цепи с током.

Рассмотрим теперь энергетические соотношения для линейного контура с током.

Как мы подчеркивали, вся работа тока в цепи постоянного тока переходит в тепло. Поэтому полное тепло, выделившееся в линейном проводнике,

$$Q=\int \frac{j^2}{\sigma}\,dV=\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\text{стор}})\,dV=-\int \boldsymbol{j}\operatorname{grad}\varphi\,dV+\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,dV=$$
$$=\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,dV-\int \operatorname{div}(\boldsymbol{j}\varphi)\,dV+\int \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{j}\,dV=$$
$$=\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,dV-\oint \varphi j_n\,dS=\int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}^{\text{стор}}\,dV$$

в силу (14,2), (14,4) и (14,9).

Полное тепло, выделяющееся в цепи, оказывается равным работе сторонних сил.

§ 16. Постоянный ток в проводящей среде

Другим предельным случаем является прохождение тока в системе, состоящей из хороших проводников (например, металлических электродов), погруженных в проводящую среду. Если считать, что сторонние силы в проводящей среде отсутствуют, уравнения для электрического поля можно написать в виде

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}=\operatorname{div}\sigma\boldsymbol{E}=0.$$

В однородной среде, при $\sigma=\text{const}$, последнее выражение приобретает вид

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0.$$

Вводя потенциал поля φ, находим, что он удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi=0. \tag{16,1}$$

На поверхности проводников выполняются граничные условия (14,5) и (14,7). Их можно записать, введя потенциал φ. Именно, условие (14,5) для непрерывности тангенциальной слагающей поля непосредственно переходит в условие смыкания потенциала на поверхности раздела:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{16,2}$$

Равенство нормальных компонент плотности тока $j_n = \sigma E_n$ дает

$$\sigma^{(1)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 = \sigma^{(2)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2, \tag{16,3}$$

где n — нормаль к поверхности раздела.

Мы видим, что уравнение для потенциала и совокупность граничных условий, определяющие распределение тока в проводящей среде, идентичны с соответствующими выражениями § 8, определяющими распределение электростатического поля в двух диэлектрических средах. Единственное отличие заключается в том, что вместо диэлектрических проницаемостей ε_1 и ε_2 в граничном условии (16,3) стоят электропроводности сред $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$.

Поэтому потенциал в проводящей среде определяется формулами электростатики с заменой ε на σ.

Рассмотрим случай двух электродов в бесконечной среде. Ток, текущий с электрода, напишем в виде

$$I = \oint \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = \oint j_n\, dS = \sigma \oint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_S dS.$$

Вводя электростатическую емкость по формуле (8.13), находим

$$I = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1}{4\pi} \oint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_S dS\right) = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_1} C\varphi_1.$$

Полное сопротивление равно

$$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{\varphi_1}{I} = \frac{\varepsilon_1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{1}{C}. \tag{16,4}$$

Последняя формула позволяет формально выразить сопротивление системы через емкость аналогичной по геометрическим характеристикам электростатической системы проводников.

В виде примера можно рассмотреть систему из двух шаровых электродов, погруженных в бесконечную среду. Мы будем предполагать, что радиусы электродов a и b малы по сравнению с расстояниями между их центрами.

Решение уравнения Лапласа для двух таких сфер имеет вид

$$\varphi = \frac{a}{r_1}\varphi_a - \frac{b}{r_2}\varphi_b,$$

где φ_a и φ_b — потенциалы на поверхностях сфер, а r_1 и r_2 — расстояния до центров сфер.

Полный ток на поверхность первой сферы равен

$$I = \oint \sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} dS \approx 4\pi a\sigma\varphi_a,$$

если пренебречь вторым членом в φ, который при $r=a$ мал по сравнению с первым. Аналогично полный ток на вторую сферу оказывается равным

$$I = -4\pi b\sigma\varphi_b.$$

Сопротивление

$$R = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{I} \approx \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Таким образом, решение задачи о пространственном распределении тока сводится к решению соответствующей электростатической задачи.

Следует, однако, сделать важную оговорку. Если проводник частично граничит с проводящей, а частично с непроводящей средой, формальная аналогия с электростатикой теряет смысл. Действительно, в непроводящей среде $\sigma = 0$, между тем как в электростатике не бывает тел с диэлектрической проницаемостью, равной нулю.

Получим еще одно полезное для дальнейшего соотношения между плотностью тока и полным током в общем случае нелинейного проводника. Пусть по некоторому проводнику течет ток, плотность которого распределена по сечению неравномерно. Разобьем проводник на как угодно тонкие трубки с током. Соленоидальный характер постоянного тока позволяет всегда произвести такое разбиение. Каждую трубку с током можно считать линейным проводником, и мы можем для нее написать

$$dI = j_\alpha dS_\alpha, \tag{16,5}$$

где индекс α означает номер трубки.

Если бы плотность тока была распределена по сечению равномерно, можно было бы написать, очевидно,

$$\frac{dI_\alpha}{I} = \frac{dS_\alpha}{S}, \tag{16,6}$$

где I и S — полный ток и сечение проводника соответственно. При неравномерном распределении тока всегда можно положить

$$\frac{dI_a}{I}=\frac{dS_a}{S}\psi=\text{const}\ \text{(вдоль длины проводника)},\qquad(16,7)$$

где функция ψ характеризует неравномерность в распределении тока по сечению. Поэтому при любом распределении тока имеем

$$\boldsymbol{j}=I\frac{\psi}{S}\boldsymbol{l},\qquad(16,8)$$

где $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор, направленный вдоль линии тока.

Последнее равенство имеет простой смысл: хотя распределение плотности тока определяется физическими свойствами проводника и его геометрией, плотность тока при прочих равных условиях пропорциональна полному току.

§ 17. Магнитное поле постоянных токов. Закон Био — Савара

Зная распределение плотности тока и интегрируя уравнения (14,3), можно найти распределение магнитного поля. Вводя в (14,3) вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$, по формуле (4,19) получаем уравнение

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\right)=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}.\qquad(17,1)$$

Для однородной и изотропной бесконечной среды, характеризуемой постоянной магнитной проницаемостью μ, можно написать

$$\Delta\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}.\qquad(17,2)$$

Решение последнего уравнения

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{c}\int\boldsymbol{j}\frac{dV}{r}\qquad(17,3)$$

лишь множителем μ отличается от решения уравнения (19,13) части I для вектора-потенциала в пустоте.

Поскольку вне проводников плотность тока $\boldsymbol{j}$ равна нулю, фактически интегрирование можно проводить лишь по объему проводников. При этом, однако, мы считаем, что μ имеет одно и то же значение как в веществе проводников, так и в окружающей их среде. Если система не содержит ферромагнитных тел, то фактическое значение μ мало отличается от единицы. Поэтому приближенно можно считать μ имеющим одинаковое значение во всем пространстве. При наличии ферромагнетиков формула (17,3) теряет смысл.

В случае линейных проводников формулу (17,3) можно существенно упростить, написав, в силу постоянства полного тока I по сечению линейного проводника,

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{c}\int \boldsymbol{j}\,\frac{dV}{r}=\frac{\mu}{c}\int\frac{\boldsymbol{j}\,dS\,d\boldsymbol{l}}{r}=\frac{\mu I}{c}\int\frac{d\boldsymbol{l}}{r}. \qquad (17,4)$$

В формуле (17,4) μ означает магнитную проницаемость среды, внешней по отношению к проводнику с током. Мы видим, что из (17,4) выпали все характеристики самого линейного проводника, например распределение плотности тока в нем, и он рассматривается как чисто геометрический объект. Поэтому свойства линейного проводника, в том числе и магнитные свойства вещества провода, не сказываются на величине магнитного поля. Формула (17,4) справедлива для любых, в том числе ферромагнитных, проводников.

Из определения вектора-потенциала следует, что магнитная индукция линейного проводника с током I равна (ср. с (19,15) ч. I)

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\frac{\mu I}{c}\operatorname{rot}\int\frac{d\boldsymbol{l}}{r}=\frac{\mu I}{c}\int\operatorname{rot}\frac{d\boldsymbol{l}}{r}=$$
$$=\frac{I\mu}{c}\int\left[\operatorname{grad}\frac{1}{r},\ d\boldsymbol{l}\right]=\frac{I\mu}{c}\int\frac{[d\boldsymbol{l},\boldsymbol{r}]}{r^3}. \qquad (17,5)$$

Формула (17,5) выражает закон Био и Савара в однородной и изотропной среде. Индукция (среднее поле) $\boldsymbol{B}$ оказывается в μ раз большей, чем поле такого же тока в пустоте. Соответственно напряженность поля в среде $\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$ совпадает с полем в пустоте.

Часто закон Био и Савара пишут в дифференциальной форме, т. е. в виде

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu I}{c}\frac{[d\boldsymbol{l},\boldsymbol{r}]}{r^3}, \qquad (17,6)$$

где $d\boldsymbol{B}$ — вклад, вносимый в индукцию элементом тока $d\boldsymbol{l}$. Нужно иметь в виду, что (17,5) нельзя однозначно разложить на элементы (17,6). К (17,6) всегда можно прибавить векторную функцию, обращающуюся в нуль при интегрировании по замкнутому контуру с постоянным током.

В виде примера применения полученных формул вычислим магнитное поле, создаваемое в окружающем пространстве током, текущим в прямом бесконечном линейном проводнике.

Из соображений симметрии ясно, что это поле направлено по касательным к окружностям, концентричным к проводнику. Пусть угол между проводником и радиусом-вектором равен α

(рис. 88). Закон Био — Савара в применении к рассматриваемому случаю дает

$$B = \frac{\mu I}{c} \int \frac{[dl, n]}{r^2},$$

где $n = \frac{r}{r}$. Вводя кратчайшее расстояние от точки наблюдения до проводника ρ, имеем для компоненты поля B_ψ, направленной по касательной к окружности радиуса ρ, концентрической к проводнику:

$$B_\psi = \frac{\mu I}{c} \int \frac{\cos^2 \alpha}{\rho^2} \sin(90^\circ - \alpha)\, dl = \frac{\mu I}{c\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{2\mu I}{c\rho}, \tag{17,7}$$

где было положено (рис. 88)

$$r \cos\alpha = \rho,$$

$$\sin(90^\circ - \alpha)\, dl = r\, d\alpha = \frac{\rho\, d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Вычислим, далее, магнитное поле плоского кругового контура с током радиуса a на центральной оси z, перпендикуляр-

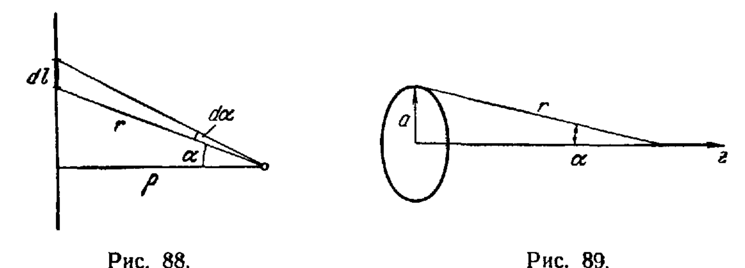


Рис. 88. Рис. 89.

ной к плоскости, в которой лежит проводник с током (рис. 89). В этом случае можно написать для компонент поля

$$B_z = \frac{\mu I}{c} \oint \frac{[dl, r]_z}{r^3} = \frac{\mu I}{c} \int \frac{dl \sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu I \cos^2\alpha \sin\alpha}{cz^2} \cdot 2\pi a.$$

Поскольку (рис. 89)

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}},$$

находим окончательно

$$B_z = \frac{2\mu I}{c} \frac{S}{(z^2 + a^2)^{3/2}}, \tag{17,8}$$

где S — площадь окружности, образуемой током.

В частности, на большом расстоянии от проводника ($z \gg a$)

$$B_z = \frac{2\mu IS}{cz^3} = \frac{2\mu M_z}{z^3}, \tag{17,9}$$

где проекция магнитного момента тока M_z равна $\frac{IS}{c}$ (см. § 22 ч. I).

В центре окружности плоскости $z=0$

$$B_z = \frac{2\mu I}{ca^3}. \tag{17,10}$$

Компонента поля $B_\perp$, перпендикулярная оси z, равна нулю, как это ясно из соображений симметрии — противоположным участкам контура с током будут отвечать значения B_z с противоположными знаками.

Отыскание магнитного поля в нелинейных проводниках с постоянным током представляет сложную в математическом отношении задачу. Вычисление вектора-потенциала по общей формуле (17,3) удается провести до конца лишь для отдельных случаев. Мы ограничимся поэтому некоторыми примерами. Весьма простым является нахождение магнитного поля бесконечного проводника с током цилиндрического сечения радиуса a. В этом случае можно провести интегрирование уравнения (14,3) непосредственно.

Благодаря цилиндрической симметрии магнитное поле как внутри, так и вне проводника имеет только компоненту H_ψ Интегрирование (14,3) по площади окружности радиуса $\rho < a$ дает

$$2\pi\rho H_\psi = \frac{4\pi}{c} jS,$$

где $S = \pi\rho^2$. Последнюю формулу можно представить в виде

$$H_\psi = \frac{2I}{c}\frac{\rho}{a^2} \quad (\rho < a). \tag{17,11}$$

или, в векторном виде,

$$\boldsymbol{H} = \frac{2I}{ca^2}[\boldsymbol{l}\rho] = \frac{2\pi j}{c}[\boldsymbol{l}\rho], \tag{17,12}$$

где $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор вдоль образующей цилиндра. Вне проводника аналогично

$$H_\psi = \frac{2I}{c\rho} \quad (\rho > a). \tag{17,13}$$

Если сечение проводника имеет более сложную форму, то иногда полезным оказывается использование принципа суперпозиции полей.

Напишем еще выражение для вектора Пойнтинга в случае линейного проводника с постоянным током.

По определению вектор Пойнтинга

$$\sigma = \frac{c}{4\pi}[EH]_{r=a},$$

где a — радиус проводника. Пользуясь (16,1), имеем

$$\sigma = \frac{c}{4\pi}\left[\frac{j}{\sigma} - E^{\text{стор}},\ H\right] = \frac{c}{4\pi\sigma}[jH] - \frac{c}{4\pi}\left[E^{\text{стор}},\ H\right].$$

В линейном проводнике вектор j направлен по оси проводника, вектор H — по касательной к концентрическим окружностям. Поэтому мы можем написать

$$\sigma = n\frac{c}{4\pi\sigma}jH_{r=a} - \frac{c}{4\pi}\left[E^{\text{стор}},\ H\right],$$

где n — единичный вектор, направленный внутрь проводника. Пользуясь (17,7), находим

$$\sigma = n\frac{j^2 a}{2\sigma} - \frac{c}{4\pi}\left[E^{\text{стор}},\ H\right].$$

В той части проводника, где сторонние силы отсутствуют, энергия втекает в проводник. При этом полный поток энергии на длине L

$$\int \sigma\, dS = j^2\frac{\pi a^2 L}{\sigma} = \frac{j^2}{\sigma}V,$$

т. е. равен полному джоулевому теплу, выделяющемуся в проводнике.

Таким образом, диссипируемая в проводнике энергия поставляется внешним электромагнитным полем. Напротив, на тех участках проводника, где действуют сторонние силы, вектор Пойнтинга направлен наружу. Поток энергии, создаваемый сторонними силами, вытекает в окружающее пространство. Как мы видели в § 15, полное количество энергии, диссипируемое в проводнике, равно энергии, отдаваемой источниками сторонних сил.

§ 18. Намагничение магнетиков и магнитный момент

Перейдем теперь к рассмотрению магнитных свойств вещества.

Если некоторая система частиц помещена во внешнее магнитное поле, то в ней возникает намагничение. Средний магнитный момент системы может быть определен таким же соотношением, что и средний дипольный момент:

$$M = kT\frac{\partial}{\partial H}\ln Z = -\frac{\partial F}{\partial H}, \qquad (18,1)$$

где H — напряженность внешнего магнитного поля.

Соответственно можно написать выражение для изменения свободной энергии:

$$dF = dF_0 - M\,dH.$$

Можно также ввести термодинамический потенциал Гиббса

$$d\Phi = d\Phi_0 - M\,dH. \qquad (18,2)$$

Их смысл аналогичен соответствующим величинам для электрического поля (см., однако, § 28).

Мы не будем останавливаться на разборе явлений магнитострикции и магнитокалорического эффекта. Они также аналогичны электрическим эффектам, рассмотренным в предыдущем параграфе.

Магнитная восприимчивость может быть вычислена по формуле

$$\chi = \frac{|M|}{|H|} = \frac{kT}{V}\,\frac{1}{|H|}\left|\frac{\partial \ln Z}{\partial H}\right|. \qquad (18,3)$$

В зависимости от знака χ различают диамагнитные ($\chi<0$) и парамагнитные ($\chi>0$) вещества. Кроме диа- и парамагнитных веществ имеется особая группа ферромагнитных тел, у которых магнитная восприимчивость чрезвычайно велика и резко зависит от магнитного поля.

У диамагнитных веществ магнитная восприимчивость обычно очень мала по абсолютной величине ($\chi \sim 10^{-6}$) на грамм-моль и не зависит от температуры. Диамагнитными являются все инертные газы и большая часть газов, молекулы которых представляют насыщенные химические соединения, почти все органические соединения, все простые изоляторы и примерно половина металлов (Cu, Ag, Au, Hg, Zn и др.). Среди последних встречаются так называемые аномальные диамагнетики, у которых восприимчивость в 10—100 раз превышает указанное выше нормальное значение и имеет ряд других аномальных свойств (например, зависит от температуры и от поля, как у Bi и Sb).

У нормальных парамагнетиков магнитная восприимчивость зависит от температуры по закону:

$$\chi = \frac{\text{const}}{T}.$$

По порядку величины χ составляет около 10^{-4}—10^{-6} на грамм-моль. К таким парамагнитным веществам принадлежат некоторые газы (O_2, NO, CO_2 и т. п.), кристаллогидраты солей редких земель (например, $Gd_2SO_4 \cdot 8H_2O$), соли металлов группы платины, железа и т. д. У многих нормальных парамагнетиков

зависимость χ от температуры имеет вид

$$\chi = \frac{\text{const}}{T \pm \Delta},$$

где Δ — постоянная. Другую группу парамагнитных веществ составляют парамагнитные металлы, обладающие небольшой ($\chi = 10^{-6}$—10^{-7} на грамм-моль) парамагнитной восприимчивостью, не зависящей от температуры. Существуют так называемые аномальные парамагнетики, у которых парамагнитная восприимчивость зависит от поля (метамагнетики) или имеет максимальное значение при некоторой температуре (антиферромагнетики).

Наконец, тела с очень большой (по порядку величины достигающей 10^3) положительной восприимчивостью, сложным образом зависящей от напряженности магнитного поля, а также температуры и ряда других факторов, составляют группу ферромагнетиков.

Мы не можем здесь подробно осветить все стороны современного учения о магнитных свойствах вещества. Ограничимся только некоторыми общими замечаниями и изложением теории парамагнетизма нормальных парамагнетиков. Теория диамагнитных свойств атомов будет обоснована в гл. IX, ч. V.

Прежде чем перейти к изложению современной теории магнитных свойств вещества, необходимо кратко остановиться на одном, кажущемся на первый взгляд весьма парадоксальным, утверждении. Именно, можно в самом общем виде доказать, что магнитный момент любого тела, вычисленный с помощью законов классической статистики, тождественно равен нулю. Приведем простейшее доказательство этой теоремы.

Любую систему во внешнем поле можно представить как совокупность движущихся заряженных частиц. Как известно из электродинамики, при движении заряженной частицы в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z, обобщенный импульс частицы имеет вид (§ 41, ч. I)

$$p_x = p_x^{(0)} - \frac{eHy}{2c}, \quad p_y = p_y^{(0)} + \frac{eHx}{2c}, \quad p_z = p_z^{(0)},$$

где $p_x^{(0)}$, $p_y^{(0)}$, $p_z^{(0)}$ — компоненты импульса в отсутствие поля.

Функция Гамильтона дается выражением (41,8) ч. I:

$$H = \frac{\left(p_x + \frac{eHy}{2c}\right)^2 + \left(p_y - \frac{eHx}{2c}\right)^2 + p_z^2}{2m}.$$

Функция состояний системы в магнитном поле имеет вид

$$Z = \left\{ \int e^{-\frac{H}{kT}} \frac{dp\,dV}{h^3} \right\}^N.$$

Вводя вместо p_x новую переменную

$$p'_x = p_x^{(0)} = p_x + \frac{eHy}{2c},$$

мы видим, что после интегрирования по p'_x от минус бесконечности до плюс бесконечности функция состояний оказывается не зависящей от внешнего поля $\boldsymbol{H}$. То же относится и к p_y. В силу (18,3) средний магнитный момент тождественно равен нулю.

Полученный результат кажется особенно парадоксальным потому, что в большинстве книг приводится классическое объяснение диа- и парамагнетизма. Диамагнитные свойства вещества связываются с изменением орбитального движения электронов в атоме, вызванным магнитным полем. Как известно, в замкнутом электрическом контуре магнитное поле индуцирует ток, текущий в таком направлении, что возникающее дополнительное магнитное поле тока ослабляет приложенное поле. Индуцированный магнитный момент тока направлен против поля и пропорционален напряженности последнего, а также площади, охватываемой контуром. Считая электрон, движущийся в атоме, некоторым контуром с током, можно получить следующее чисто электродинамическое выражение для магнитного момента частицы, движущейся по орбите радиуса r_0:

$$\mu = -\frac{e^2}{6mc^2} r_0^2 H.$$

Что же касается парамагнетизма, то он в классической электродинамике связывается с наличием магнитного момента у электрона, движущегося по орбите и имеющего отличный от нуля механический момент. Если L означает механический момент системы, то в классической электродинамике показывается, что система обладает магнитным моментом

$$\mu = \frac{e}{2mc} L. \qquad (18,4)$$

Магнитный момент, определенный формулой (18,4), является аналогом электрического дипольного момента. Каждый атом является как бы маленьким магнитиком. Поэтому к нему полностью применимы рассуждения и формула (18,1). В атомном газе, атомы которого обладают магнитным моментом μ, должен возникать средний магнитный момент вследствие появления преимущественной ориентации магнитных моментов вдоль поля.

Непоследовательность подобных рассуждений состоит в том, что в них заранее принимается существование стабильных электронных орбит. Между тем хорошо известно, что на основе классических представлений невозможно понять самое

существование стабильных орбит. Отсутствие магнитного момента в классической физике является выражением факта отсутствия стабильного движения в системе элементарных зарядов. Предположения о существовании стационарных орбит электронов в атомах или фиксированных моментов у атомов, используемые в «классической» теории магнетизма, представляют по существу предположения о квантовании состояний, которые делаются в неявном виде.

В квантовой механике доказывается, что уровни энергии атомной системы, помещенной в магнитное поле, изменяются. В случае атомов или ионов, у которых среднее значение механического момента L системы равно нулю, для энергии нормального состояния получается следующее выражение (см. гл. IX ч. V):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{e^2 H^2}{12mc^2} \sum \left(r_i^2\right)_{\text{ср}}, \tag{18,5}$$

где ε_0 — значение энергии в нормальном состоянии и $\left(r_i^2\right)_{\text{ср}}$ — квантово-механическое среднее радиуса-вектора i-го электрона в нормальном состоянии. Суммирование ведется по всем электронам в атоме. Этой энергии отвечает средний магнитный момент

$$\mu_{\text{ср}} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial H} = -\frac{e^2 H}{6mc^2} \sum \left(r_i^2\right)_{\text{ср}}. \tag{18,6}$$

Формула (18,6) по форме совпадает с приведенной выше классической формулой, но имеет иной смысл: величина $(r^2)_{\text{ср}}$ представляет квантовомеханическое среднее (см. гл. III ч.V).

В нормальном состоянии атом или ион приобретает диамагнитную восприимчивость

$$\chi_0 = -\frac{e^2}{6mc^2} \sum \left(r_i^2\right)_{\text{ср}}. \tag{18,7}$$

Подчеркнем, что никакого усреднения по различным состояниям в (18,7) не производится и усреднение не имеет ничего общего со статистическим усреднением.

Система, представляющая собрание N независимых атомов или инов, будет обладать в нормальном состоянии индуцированным магнитным моментом

$$M = -\frac{Ne^2 H}{6mc^2} \sum \left(r_i^2\right)_{\text{ср}}$$

и диамагнитной восприимчивостью

$$\chi = -\frac{Ne^2}{6mc^2} \sum \left(r_i^2\right)_{\text{ср}}. \tag{18,8}$$

Если подставить для $(r^2)_{\text{ср}}$ значения, вычисленные различными методами (об этих методах см. ч. V), или средние радиусы атомов, полученные из кинетической теории газов, то для χ получается значение, согласующееся с найденными из измерений.

Если система (атом или ион) в нормальном состоянии обладает отличным от нуля механическим моментом, то энергия в магнитном поле будет иметь иной вид.

Именно, в квантовой механике показывается, что если некоторая молекулярная система обладает орбитальным моментом количества движения L, то энергия ее в некотором состоянии i равна

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{4\pi mc} L_z H + \frac{e^2 H^2}{6mc^2} \sum (r_i^2)_{\text{ср}}, \tag{18,9}$$

где L_z — проекция механического момента на направление магнитного поля (ось z выбрана вдоль поля). Вывод (18,9) см. в гл. IX ч. V.

Простые оценки показывают, что последний член в формуле (18,9) при всех значениях напряженности поля H мал по сравнению со вторым членом. Исключение составляют очень большие органические молекулы, у которых $\sum (r_i^2)_{\text{ср}}$ весьма велико.

В дальнейшем мы будем опускать последний член в (18,9) и писать энергию в виде

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{4\pi mc} L_z H. \tag{18,10}$$

В квантовой механике показывается (см. гл. III ч. V), что проекция механического момента на ось z принимает дискретный ряд значений:

$$L_z = -L, \quad -L+1, \ \ldots, \ 0, \ 1, \ \ldots, \ L-1, \ L$$

(всего $2L+1$ значений). Поэтому в магнитном поле i-й уровень энергии распадается на $(2L+1)$ уровней, обладающих энергиями

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} + \frac{eh}{4\pi mc} LH;$$

$$\varepsilon_i^{(0)} + \frac{eh}{4\pi mc}(L-1)H, \ \ldots; \quad \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{4\pi mc}(L-1)H; \quad \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{4\pi mc} LH.$$

Наличие у системы электронов помимо механического момента, обусловленного орбитальным движением, спинового механического момента приводит к появлению у системы спинового магнитного момента. Если результирующий спин системы S отличен от нуля, а результирующий орбитальный момент L

равен нулю, энергия системы в магнитном поле оказывается равной (см. гл. VIII ч. V)

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{2\pi mc} S_z H, \qquad (18,11)$$

где S_z — проекция спинового момента на направление поля, принимающая дискретный ряд значений:

$$S_z = -S, \ -S+1, \ \ldots, \ (S-1), \ S.$$

У подобной системы i-й уровень распадается на $(2S+1)$ подуровней:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} + \frac{eh}{2\pi mc} SH, \ \ldots, \ \varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{2\pi mc} SH. \qquad (18,12)$$

Общий случай, когда L и S отличны от нуля одновременно, мы рассматривать не будем.

В магнитном поле система, находящаяся в i-м состоянии, будет обладать средним (в квантовомеханическом смысле) магнитным моментом

$$(\mu_i)_{\text{ср}} = -\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial H} = \frac{eh}{4\pi mc} L_z \qquad (18,13)$$

или

$$(\mu_i)_{\text{ср}} = -\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial H} = \frac{eh}{2\pi mc} S_z. \qquad (18,14)$$

Мы видим, что магнитный момент системы имеет положительный знак, т. е. что система, имеющая собственный механический момент, является парамагнитной. Отношение магнитного момента к орбитальному механическому равно $\frac{eh}{4\pi mc}$. Для спинового момента это отношение вдвое больше.

§ 19. Парамагнитная восприимчивость

Рассмотрим теперь поведение системы, содержащей большое число атомов или молекул во внешнем магнитном поле. Магнитное поле оказывает ориентирующее влияние на магнитные моменты атомов, стремясь установить их вдоль поля. Тепловое движение расстраивает правильное расположение моментов. В результате конкуренции этих процессов устанавливается некоторое среднее распределение ориентаций магнитных моментов относительно направления поля. Этому среднему распределению элементарных магнитных моментов отвечает средний магнитный момент всей системы.

Найдем результирующий магнитный момент системы атомов по общей формуле. При этом будем считать, что взаимодей-

ствие между магнитными моментами отсутствует и каждый магнитный момент свободно ориентируется во внешнем поле. Для законности этого предположения необходимо, чтобы среднее расстояние между атомами было достаточно велико. Примеры подобных систем будут даны ниже. Если исходное предположение выполнено, то каждую частицу можно считать отдельной подсистемой, имеющей в поле энергию, даваемую формулой (18,9). Среднее значение магнитного момента частицы может быть найдено с помощью формулы (18,1).

Именно для функции состояний имеем

$$z = \sum e^{-\frac{\varepsilon_i^{(0)} - \frac{eh}{4\pi mc} L_z H}{kT}} \Omega(\varepsilon_i). \tag{19,1}$$

Суммирование ведется по всем значениям энергии подсистемы. Поскольку в магнитном поле вместо одного уровня энергии возникает $(2L+1)$ близких уровней энергии, суммирование в (19,1) ведется по всем уровням энергии i, а также в пределах данного уровня по всем подуровням, определяемым формулой (18,9), отличающимся друг от друга дискретными значениями магнитной энергии $\frac{ehL_zH}{4\pi mc}$, так как L_z принимает дискретный ряд значений. Выражение (19,1) можно существенно упростить, если учесть, что в атомных системах расстояние между уровнями очень велико по сравнению с тепловой энергией kT. Благодаря этому члены суммы будут быстро убывать и в ней можно ограничиться первым членом, относящимся к основному уровню энергии ε_0. В магнитном поле последний уровень распадается на $(2L+1)$ или $(2S+1)$ подуровней в зависимости от того, какая из величин — L или S — в основном состоянии отлична от нуля. В первом случае можно написать

$$z = e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} \sum e^{\frac{eh}{4\pi mc} \frac{L_z H}{kT}} \Omega(\varepsilon_0), \tag{19,2}$$

где сумма берется по указанным подуровням.

В дальнейшем рассмотрим два предельных случая:

$$\frac{eh}{4\pi mc} L_z H \gg kT \tag{19,3}$$

и

$$\frac{eh}{4\pi mc} L_z H \ll kT. \tag{19,4}$$

Благодаря малости магнитного момента, условие (19,4) выполнено в любых достижимых полях при не очень низкой температуре. Если условие (19,4) выполнено, то экспоненту в (19,2)

можно разложить в ряд и ограничиться членами, линейными по полю:

$$z = e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} \Omega(\varepsilon_0) \sum_{L_z=-L}^{L_z=L} \left(1 + \frac{eh}{4\pi mc} \frac{L_z H}{kT} + \frac{1}{2}\left(\frac{eh}{4\pi mc}\right)^2 \left(\frac{L_z H}{kT}\right)^2 + \ldots\right).$$

Выполняя суммирование, имеем

$$\sum 1 = 2L + 1,$$
$$\sum L_z = 0,$$
$$\sum L_z^2 = \frac{1}{3} L(L+1)(2L+1).$$

Тогда получаем

$$z = e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} (2L+1)\Omega(\varepsilon_0)\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{eh}{4\pi mc}\right)^2 \frac{L(L+1)H^2}{(kT)^2}\right]. \quad (19,5)$$

Функция состояний всей системы, состоящей из независимых друг от друга частиц, равна, очевидно, $Z = z^N$.

Согласно (18,1) средний магнитный момент всей системы равен

$$M = kT\frac{\partial \ln Z}{\partial H} = NkT\frac{\partial \ln z}{\partial H} \approx \frac{1}{3}\left(\frac{eh}{4\pi mc}\right)^2 \frac{L(L+1)NH}{kT}. \quad (19,6)$$

Парамагнитная восприимчивость, отнесенная к N молекулам, имеет вид

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{1}{3}\left(\frac{eh}{4\pi mc}\right)^2 \frac{L(L+1)N}{kT}. \quad (19,7)$$

Если магнитный момент обусловлен не орбитальным, а спиновым моментом, вместо (19,6) в силу (18,14) имеем

$$M = \frac{1}{3}\left(\frac{eh}{2\pi mc}\right)^2 \frac{S(S+1)NH}{kT}, \quad (19,8)$$

а вместо (19,7) получим

$$\chi = \frac{1}{3}\left(\frac{eh}{2\pi mc}\right)^2 \frac{S(S+1)N}{kT}. \quad (19,9)$$

Если, наконец, система имеет орбитальный и спиновый моменты, то для χ получается аналогичное выражение, но с коэффициентом в числителе, имеющим промежуточное между (19,7) и (19,9) значение.

Во всех рассмотренных случаях парамагнитная восприимчивость оказывается обратно пропорциональной температуре T. Кроме температуры, магнитная восприимчивость (19,7) и (19,9) содержит только постоянный множитель, состоящий из универ-

сальных постоянных и величины орбитального или спинового моментов соответственно.

Переходя ко второму предельному случаю, когда удовлетворено условие (19,3), мы видим, что из всех членов суммы в (19,1) нужно сохранить только один, отвечающий значению магнитной части энергии $\frac{eh}{4\pi mc} LH$. Остальные члены суммы, содержащие слагаемые $\frac{eh(L-1)H}{4\pi mc}$, $\frac{eh}{4\pi mc}(L-2)H$ и т. д. будут гораздо меньше первого. Причина этого ясна: неравенство (19,3) означает, что энергия ориентации в магнитном поле велика по сравнению с тепловой энергией и все магнитные моменты будут ориентированы по полю, так что их проекция L_z будет равна L, т. е. наступит полное насыщение.

Опуская в сумме (19,2) все члены, кроме первого, находим

$$z = e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} e^{\frac{eh}{4\pi mc}\frac{LH}{kT}}, \tag{19,10}$$

откуда

$$M = NkT\frac{\partial \ln z}{\partial H} = \frac{ehN}{4\pi mc} LH \tag{19,11}$$

или

$$M = \frac{ehN}{2\pi mc} SH \tag{19,12}$$

(в зависимости от природы магнитного момента). Таким образом, наступает полное насыщение, и все моменты устанавливаются вдоль поля. В промежуточном случае можно получить общую формулу для зависимости магнитного момента от поля.

Переходя к вопросу о сравнении с экспериментом, заметим, что все величины в формулах (19,7) и (19,9) известны. Поэтому вычисленные восприимчивости можно непосредственно сравнить с экспериментальными значениями для тех систем, у которых выполняется исходное предположение — отсутствие взаимодействия между частицами, обладающими магнитным моментом. Нужно заметить, что число таких систем очень невелико. Большинство атомов и молекул в нормальном состоянии имеют равные нулю орбитальный и спиновой моменты ($L=S=0$). У тех веществ, которые обладают в нормальном состоянии магнитным моментом и парамагнитной восприимчивостью, имеется также и диамагнитная восприимчивость. Однако последняя составляет сравнительно небольшую (хоть иногда вполне ощутимую) часть парамагнитной восприимчивости. Для получения истинного значения парамагнитной восприимчивости к ее измеренному значению необходимо прибавить величину диамагнитной восприимчивости. Получение атомных парамагнитных веществ в газообразном состоянии и измерение их восприимчивости

является не простой задачей. Тем не менее, были произведены измерения восприимчивости паров К, которые привели к значению парамагнитной восприимчивости, равной $\frac{0{,}38}{T}$, что согласуется с теоретическим значеинем $\frac{0{,}37}{T}$. Точность измерений невелика, и они не могут быть использованы для полной проверки формулы (19,9).

Наиболее удобными объектами для проверки изложенной выше теории парамагнитной восприимчивости являются:

1) Водные растворы или твердые кристаллогидраты солей, содержащих ионы с механическим орбитальным или спиновым моментом, отличным от нуля. Такими ионами являются ионы элементов группы редких земель и переходных элементов группы железа в растворах или кристаллогидратах. В водных растворах и кристаллогидратах парамагнитные ионы отделены друг от друга большим числом молекул воды. Поэтому энергия взаимодействия между ними весьма мала. Согласие теории с экспериментом оказывается превосходным. Это подтверждается на примере гадолиния Cd^{3+}. У этого иона $L=0$ и $S=\frac{7}{2}$. Его магнитный момент и восприимчивость выражаются формулами (19,8) и (19,9). Теоретическая зависимость магнитного момента от величины $\frac{\mu H}{kT}$ представлена на рис. 90 сплошной кривой. Точками обозначены измеренные значения M.

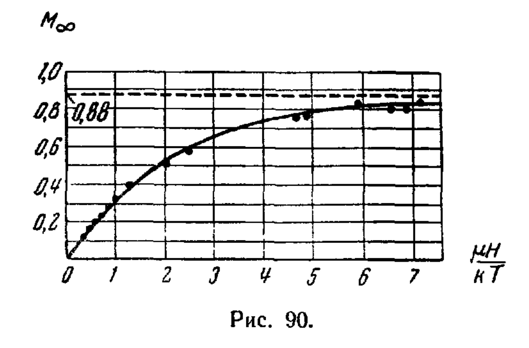


Рис. 90.

2) Молекулы парамагнитных газов (O_2, NO и т. п.). Электрическое поле молекул не обладает сферической симметрией, механический момент их не имеет фиксированного значения и среднее его значение равно нулю. Если, однако, молекула обладает отличным от нуля спином, то она имеет магнитный момент, связанный со спином соотношением (18,14). Число молекул, имеющих спин, отличный от нуля, сравнительно невелико. В качестве примера можно привести молекулу кислорода O_2, спин которой $S=1$. Из формулы (19,9) для магнитной восприимчивости 1 $см^3$ кислорода при нормальных условиях получаем $\chi = 0{,}142 \cdot 10^{-6}$. Измеренное значение равно $\chi = 0{,}143 \cdot 10^{-6}$. Согласие оказывается превосходным.

Мы не можем входить здесь в обсуждение более сложных случаев молекул, имеющих отличную от нуля проекцию механического момента на ось симметрии, а также случаев, когда спин молекулы нельзя считать свободно ориентирующимся в пространстве[1]).

§ 20. Ферромагнетизм — спонтанное намагничение и гистерезис

Ферромагнетизм представляет собой совершенно специфическое явление, которое может иметь место только в твердой фазе и притом у сравнительно ограниченного круга веществ — элементов группы железа и довольно значительного числа сплавов.

Как мы уже подчеркивали ранее, магнитные свойства ферромагнетиков принципиально отличаются от магнитных свойств других тел. Именно, в ферромагнетиках не только не существует пропорциональности между векторами $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$, но индукция является сложной и неоднозначной функцией поля

$$\boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{H}).$$

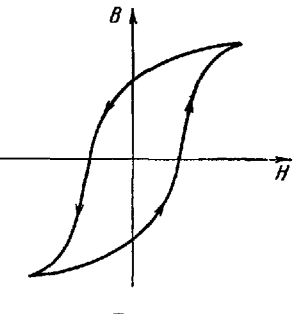


Рис. 91.

Значение $f(\boldsymbol{H})$ зависит от предыстории процесса намагничения.

С ростом внешнего поля $\boldsymbol{H}$ индукция ферромагнитного образца растет по кривой, характерный вид которой показан на рис. 91. При выключении поля индукция снижается, но не доходит до нуля, так что в теле остается некоторая остаточная намагниченность, существующая даже в отсутствие внешнего поля. Эта намагниченность может быть снижена до нуля изменением направления внешнего поля. Повторение процесса происходит по характерному циклу, также изображенному на рис. 91. Этот цикл называется гистерезисом.

Существование подобной связи между $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ означает, что в соотношении

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}$$

средний магнитный момент (намагниченность) тела следует рассматривать как величину, определяющуюся состоянием тела как целого. Это значит, что связь между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{H}$ имеет в ферромагнитном теле сложный характер и задание $\boldsymbol{H}$ само по себе еще не определяет величину намагничения. Ниже мы обсудим

[1]) См., например, Блох, Молекулярная теория магнетизма, ГТТИ, 1936; С. В. Вонсовский, Современное учение о магнетизме, Гостехиздат, 1952.

свойства намагниченности в ферромагнетиках и зависимость ее от поля $\boldsymbol{H}$ и температуры. Однако прежде всего необходимо подчеркнуть, что, в отличие от диа- и парамагнитных веществ, в ферромагнитных веществах намагниченность не определена заданием внешнего поля, но является внутренним параметром системы.

В состоянии статистического равновесия в ферромагнитном теле может существовать спонтанная (самопроизвольная) намагниченность. Состояние тела будет полностью характеризоваться заданием его внутренних параметров, например, температуры, давления и спонтанной намагниченности, причем в равновесии термодинамический потенциал $\Phi(p, T, \boldsymbol{M})$ должен иметь минимум. При наличии внешнего магнитного поля намагниченность тела будет функцией приложенного поля, вид которой определяется при данных свойствах тела выполнением условий равновесия, так чтобы

$$\Phi(p, T, \boldsymbol{M}(\boldsymbol{H})) \to \min. \qquad (20,1)$$

Численное значение намагниченности в ферромагнитных телах весьма велико. Если формально определить магнитную восприимчивость как

$$\varkappa = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{H\to 0}, \qquad (20,2)$$

то оказывается, что ее значения достигают величин порядка 10^5—10^6. Как мы уже подчеркивали, явление ферромагнетизма может иметь место только в твердых телах. При этом оказывается, что в монокристаллах намагничение обладает важным свойством асимметрии. Намагничение в различных направлениях в кристалле имеет разное значение. В так называемых направлениях легкого намагничения намагниченность имеет большее значение, в других — меньшее, при данном значении напряженности намагничивающего поля.

Ферромагнитные свойства вещества существенно зависят от температуры. При повышении температуры спонтанная намагниченность уменьшается и при некоторой характерной для данного вещества температуре обращается в нуль. Эта температура называется температурой точки Кюри θ. В точке Кюри вещество теряет свои ферромагнитные свойства. При температурах, лежащих выше соответствующей температуры θ, все ферромагнетики становятся парамагнетиками. Парамагнитная восприимчивость при $T > \theta$ зависит от температуры по закону:

$$\chi \sim \frac{1}{T-\theta},$$

именуемому законом Кюри — Вейсса.

Наконец, важнейшим свойством ферромагнитных тел является следующее: обычно ферромагнитное тело, даже однородное в макроскопическом отношении, оказывается разбитым на области спонтанного намагничения, или домены. Размеры доменов весьма велики по сравнению с молекулярными, и в состав каждого домена входит очень большое число частиц. В пределах каждого домена существует отличная от нуля намагниченность. Это означает, что магнитные моменты всех атомов в пределах домена спонтанно ориентируются преимущественно в одну сторону, образуя макроскопическую область спонтанного намагничения.

Если тело не подвергалось воздействию поля, то намагниченность отдельных доменов во всем теле в среднем компенсируется и вектор M для тела как целого равен нулю.

Действие внешнего поля сводится к переориентации («переворачиванию») векторов намагниченности отдельных доменов так, чтобы образовалась отличная от нуля намагниченность всего тела. При снятии поля моменты частиц доменов сохраняют преимущественную ориентацию, «запоминают» действие поля и требуется дополнительная работа поля для образования системы доменов с беспорядочной ориентацией магнитных моментов.

Необходимо подчеркнуть, что существование доменов не является гипотезой, но представляет хорошо и весьма детально изученное экспериментальное явление.

Все перечисленные свойства ферромагнитных тел хорошо укладываются в рамки излагаемой ниже термодинамической теории ферромагнетизма. Однако основной вопрос — вопрос о сущности явления спонтанного намагничения, разумеется, не может найти какого-либо объяснения в рамках макроскопической теории.

Изложение микроскопической квантовой теории явления спонтанного намагничения будет дано в ч. VI книги.

Переходя к разбору термодинамической теории[1]), мы должны, прежде всего, написать явное выражение для термодинамического потенциала системы — ферромагнитного монокристалла, находящегося в состоянии статистического равновесия во внешнем магнитном поле $\boldsymbol{H}$.

Мы будем рассматривать поведение ферромагнетика вблизи точки Кюри, когда намагничение сравнительно мало.

Пусть $\Phi_0(p, T, M)$ — термодинамический потенциал тела в отсутствие внешнего поля. Основное равенство для термодина-

[1]) В дальнейшем в этом параграфе мы следуем книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, «Электродинамика сплошных сред», Гостехиздат, 1957. Наш потенциал Φ соответствует величине $\left(\Phi + \frac{H^2}{8\pi}\right)$ в этой книге.

мического потенциала в поле гласит:

$$d\Phi = d\Phi_0 - \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{M}. \qquad (20,3)$$

Отличие последнего соотношения от аналогичного выражения (18,2) заключается в том, что независимой переменной является средний магнитный момент ферромагнетика $\boldsymbol{M}$. Поэтому, интегрируя (20,3) по $\boldsymbol{M}$ при заданном внешнем поле, можно написать

$$\Phi(p,\ T,\ \boldsymbol{M}) = \Phi_0(p,\ T,\ \boldsymbol{M}) - \boldsymbol{M}\boldsymbol{H}. \qquad (20,4)$$

Термодинамический потенциал Φ_0 зависит как от величины, так и от ориентации вектора $\boldsymbol{M}$ относительно осей монокристалла.

Эффект анизотропии сравнительно мал. Поэтому $\Phi_0(p, T, \boldsymbol{M})$ можно представить в виде

$$\Phi_0(p,\ T,\ \boldsymbol{M}) = \Phi_1(p,\ T,\ \boldsymbol{M}) + \Phi_2(p,\ T,\ \boldsymbol{M}), \qquad (20,5)$$

где второй член учитывает эффект анизотропии. Первое, основное слагаемое зависит только от абсолютной величины вектора намагничения.

Мы ограничимся простейшим случаем, когда кристалл имеет только одну ось симметрии, являющуюся осью легкого намагничения. Выберем эту ось за ось z. При намагничении вдоль оси z, т. е. $M_z = M$, термодинамический потенциал Φ_0 должен иметь минимальное значение. В этом случае зависимость Φ_2 от M может быть представлена в виде

$$\Phi_2(p,\ T,\ \boldsymbol{M}) = \mathrm{const}\left(M_x^2 + M_y^2\right) = \beta M^2 \sin^2\theta. \qquad (20.6)$$

При этом в малой величине Φ_2 мы выписали только первые члены разложения по степеням $\boldsymbol{M}$. Здесь β — положительная постоянная, а θ — угол между осью z и вектором $\boldsymbol{M}$. Член, пропорциональный M^2, не зависящий от углов, может быть всегда включен в Φ_1. Линейный член в этом разложении должен выпасть. Действительно, магнитный момент, пропорциональный скорости частиц, изменяет знак при замене $t \to -t$. Термодинамический потенциал системы в состоянии равновесия, очевидно, инвариантен относительно этой замены. Поэтому разложение должно содержать комбинацию квадратичных членов M_x^2, M_y^2 и M_z^2. При этом она должна быть выбрана так, чтобы при намагничении вдоль оси z имел место минимум Φ_2. Поскольку ось z является осью симметрии, компоненты M_x и M_y должны входить в разложение симметрично. Выражение (20,6) удовлетворяет всем этим требованиям. Поскольку $\beta > 0$, ось z действительно является осью легкого намагничения. Потенциал Φ_2

имеет минимальное значение ($\Phi_2=0$), если вектор $\boldsymbol{M}$ направлен по оси z ($\theta=0$).

Полный термодинамический потенциал во внешнем поле имеет вид

$$\Phi(p, T, \boldsymbol{M}) = \Phi_1(p, T, M) - \boldsymbol{MH} + \beta M^2 \sin^2\theta. \qquad (20,7)$$

Последняя формула показывает, что намагничение $\boldsymbol{M}$ будет ориентироваться внешним полем, с одной стороны, и естественным направлением легкого намагничения, с другой стороны. В итоге вектор $\boldsymbol{M}$ будет ориентирован под некоторым углом θ_{min} к оси z, при котором термодинамический потенциал будет иметь минимум. Если выбрать за плоскость xz плоскость, включающую $\boldsymbol{H}$ и ось легкого намагничения, то вектор $\boldsymbol{M}$ будет, очевидно, лежать в этой плоскости.

Распишем (20,7) в компонентах

$$\Phi = \Phi_0 - MH_x \sin\theta - MH_z \cos\theta + \beta M^2 \sin^2\theta.$$

Равновесную ориентацию, определяемую условием минимума Φ, найдем из условия

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 2\beta M^2 \sin\theta\cos\theta - MH_x\cos\theta + MH_z\sin\theta = 0,$$

откуда без труда получаем

$$(2\beta M\sin\theta - H_x)^2(1-\sin^2\theta) = H_z^2\sin^2\theta. \qquad (20,8)$$

Это — уравнение четвертой степени относительно величины $\sin\theta$. Оно имеет либо два, либо четыре вещественных корня, в зависимости от значения H_x и H_z (при заданном M и β).

В первом случае одно значение корня отвечает углу θ_{min}, при котором Φ имеет минимальное значение. Это — равновесная ориентация $\boldsymbol{M}$. Второе значение корня приводит к максимальному значению Φ, т. е. термодинамически неустойчивой ориентации намагничения.

Во втором случае имеется два минимальных и два максимальных значения угла θ.

Один из этих минимумов θ_{min} приводит к наименьшему значению термодинамического потенциала. Соответствующая ориентация вектора $\boldsymbol{M}$ является равновесной. Второй минимум отвечает метастабильному состоянию кристалла. При этой ориентации термодинамический потенциал меньше, чем при любых соседних, но выше, чем при ориентации под углом θ_{min}.

Существование метастабильных состояний позволяет понять качественно происхождение остаточного намагничения и гистерезиса.

Равновесное состояние отвечает суммарному намагничению кристалла, равному нулю в отсутствие внешнего поля. Напротив,

в метастабильном состоянии магнитный момент тела как целого отличен от нуля в отсутствие поля. Если в процессе намагничения кристалл будет переведен в метастабильное состояние с некоторой суммарной намагниченностью $\int M(H)\,dV$, а затем внешнее поле будет снято, то система будет весьма длительное время (практически — как угодно долго) находиться в состоянии с суммарным намагничением $\int M(H \to 0)\,dV$. Из формулы (20,8) следует также принципиальная возможность существования доменов. Предположим, что внешнее поле ориентировано перпендикулярно оси легкого намагничения, т. е. $H_z = 0$. Тогда (20,8) превращается в уравнение

$$2\beta M \sin\theta - H = 0. \qquad (20,9)$$

Если $H < 2\beta M$, то (20,9) имеет два решения:

$$\theta_1 = \arcsin\frac{H}{2\beta M}, \qquad \theta_2 = \pi - \arcsin\frac{H}{2\beta M}.$$

Этим решениям отвечает одно и то же минимальное значение термодинамического потенциала, так что оба они являются равновесными. Однако значения намагничения M будут при этом соответственно

$$M_x^{(1)} = M\sin\theta_1, \qquad M_x^{(2)} = M\sin\theta_2 = -M\sin\theta_1. \qquad (20,10)$$

Таким образом, в равновесном состоянии возможны две противоположные ориентации вектора намагничения.

Если весь кристалл разобьется на чередующиеся области с намагничением $M_x^{(1)}$ и $M_x^{(2)}$, то его термодинамический потенциал будет минимальным и состояние равновесным.

Мы видим, что из формальной термодинамической теории вытекает возможность существования остаточного намагничения (и гистерезиса) и доменной структуры кристалла.

Фактическая реализация, величина и форма доменов зависят от многих факторов.

За деталями мы отсылаем читателя к упомянутой книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица и специальной литературе.

Само собой ясно, что термодинамическая теория не дает и не может дать ответа на основной вопрос — вопрос о природе спонтанного намагничения. Существование энергии анизотропии также постулируется в теории.

Рассмотрим теперь зависимость магнитных свойств ферромагнетика от температуры вблизи точки Кюри. В самой точке Кюри ферромагнитное и парамагнитное состояния вещества соприкасаются друг с другом по некоторой поверхности раздела и находятся в состоянии статистического равновесия. Это равно-

весие является равновесием фаз, а каждое из состояний представляет фазу, соответственно, ферро- и парамагнитную.

Термодинамический потенциал ферромагнитной фазы дается формулой (20,4). Вблизи точки Кюри можно пренебречь малым слагаемым Φ_2 и разложить Φ_1 в ряд по степеням малой величины — намагничения $\boldsymbol{M}$, которое обращается в нуль в точке $T=0$.

Тогда имеем

$$\Phi_{\text{ферро}}(p,\ T,\ \boldsymbol{M}) = \Phi_0(p,\ T) + aM^2 + bM^4 - \boldsymbol{MH} \qquad (20,11)$$

с точностью до членов четвертого порядка малости.

Нечетные степени величины $\boldsymbol{M}$ выпадают из разложения: при замене $(t \to -t)$ $\boldsymbol{M}$ изменяет знак, а знак Φ не изменяется. Если пренебречь магнитной анизотропией ферромагнетика, направления векторов $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{H}$ совпадают, поэтому в (20,11) можно вместо $\boldsymbol{MH}$ написать MH.

В точке Кюри $T=\theta$ коэффициент a обращается в нуль; вблизи точки Кюри можно написать

$$a \sim (T-\theta),$$

причем $a>0$ выше точки Кюри и $a<0$ ниже точки Кюри. Примем, что $b>0$. Как будет видно из дальнейшего, при таком выборе знаков a и b термодинамическая теория хорошо описывает фазовый переход ферро- — парамагнетик.

Условие равновесия гласит:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial M} = 2aM + 4bM^3 - H = 0. \qquad (20,12)$$

Если магнитного поля нет, то либо в равновесии

$$M = 0, \qquad (20,13)$$

либо

$$2a + 4bM^2 = 0. \qquad (20,14)$$

Выше точки Кюри $a>0$ и условием минимума термодинамического потенциала служит равенство (20,14). Ниже точки Кюри равенство (20,14) может выполняться (поскольку здесь $a<0$) и

$$M = \sqrt{\frac{|a|}{2b}} \sim \sqrt{\theta - T}. \qquad (20,15)$$

В самой точке Кюри M обращается в нуль и термодинамические потенциалы ферромагнитного и парамагнитного состояний равны между собой. Энтропия при фазовом переходе, как легко видеть, не изменяется. Действительно, выше точки Кюри

$$S_{\text{пара}} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p. \qquad (20,16)$$

Ниже точки Кюри

$$S_{\text{ферро}} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial T}\right)_p - M^2 \frac{\partial a}{\partial T} = -\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial T}\right)_p - \text{const}\, M^2 =$$
$$= -\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial T}\right)_p - \text{const}(\theta - T) = S_{\text{пара}} - \text{const}(\theta - T). \qquad (20,17)$$

Отсюда видно, что в точке Кюри $T=\theta$ энтропия остается непрерывной. Однако теплоемкость системы испытывает скачок. Действительно,

$$(C_p)_{\text{ферро}} = T\left(\frac{\partial S_{\text{ферро}}}{\partial T}\right)_p = \text{const}\, T + (C_p)_{\text{пара}}. \qquad (20,18)$$

Скачок теплоемкости при $T=\theta$

$$\Delta C_p = \text{const}\cdot\theta, \qquad (20,19)$$

причем теплоемкость ферромагнитной фазы выше, чем парамагнитной (при значении $T=0$), что находится в полном согласии с опытом. Рассмотренный фазовый переход является типичным примером фазового перехода второго рода (ср. § 64 ч. III).

При $H \neq 0$ из условия равновесия (20,12) можно найти магнитную восприимчивость. Дифференцируя (20,12) по H, находим

$$\frac{\partial M}{\partial H}(2a + 12bM^2) - 1 = 0,$$

откуда

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{2a + 12bM^2}.$$

При $T>0$ парамагнитная восприимчивость равна, в соответствии с законом Кюри — Вейсса:

$$\chi = \frac{1}{2a} \sim \frac{1}{T-\theta}.$$

В заключение остановимся кратко на расчете электромагнитных полей в присутствии ферромагнетиков. Расчет таких полей особенно важен в технике, где широко используются ферромагнитные материалы.

На первый взгляд может показаться, что нелинейная связь между $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ делает проблему весьма сложной. В действительности, однако, это не так. Расчет распределения поля вне ферромагнетика, но в его присутствии требует задания граничного условия на его поверхности. Использование точных граничных условий связало бы внешнюю задачу с распределением поля внутри ферромагнетика, т. е. сделало бы проблему весьма сложной. Однако, если формально ввести ферромагнетик с магнитной восприимчивостью (20,2) и с магнитной проницае-

мостью $\mu=1+4\pi\chi$, то для μ получаются значения на пять-шесть порядков выше, чем в наружной среде. Поэтому можно с большой степенью точности положить $\mu\rightarrow\infty$ и граничное условие на поверхности ферромагнетика приобретает простой вид:

$$\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}=0,$$

т. е. линии магнитного поля подходят нормально к поверхности. Ферромагнетик в постоянном магнитном поле оказывается подобным проводнику в постоянном электростатическом поле. Расчет магнитного поля внутри ферромагнитных тел оказывается, как правило, весьма трудной задачей.

§ 21. Сверхпроводимость

Еще в 1911 г. Камерлинг-Оннес установил, что температурный ход сопротивления ртути существенно отличается от описанного в § 48 для нормальных металлов.

Именно, как и у нормальных металлов, при понижении температуры, сопротивление перестает зависеть от температуры, и величина его определяется примесями, имеющимися в образце.

Однако при дальнейшем понижении температуры до $T=4{,}1°$ К сопротивление металла скачком (рис. 92) падает до нуля: это явление — скачкообразное исчезновение сопротивления — получило название перехода металла в сверхпроводящее состояние, или, кратко, возникновения сверхпроводимости. Температуру перехода в сверхпроводящее состояние называют критической температурой.

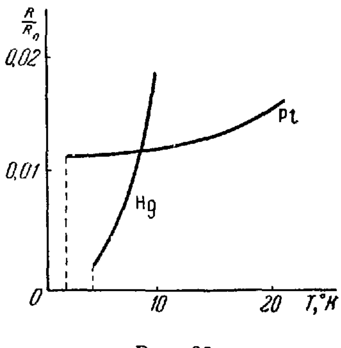


Рис. 92.

В настоящее время установлено, что сверхпроводимость является сравнительно широко распространенным явлением. Известно 23 металла, переходящих в сверхпроводящее состояние. Сверхпроводимость наблюдается также у большого числа сплавов.

Несомненно, что обращение сопротивления в нуль отвечает переходу металла в новое состояние. Сопротивление всех металлов в сверхпроводящем состоянии составляет не больше чем 10^{-10} процента сопротивления непосредственно перед переходом. В кольце из сверхпроводящего материала происходит циркуляция тока в течение неопределенно долгого времени без каких-либо признаков ослабления.

Поэтому следует признать, что сопротивление сверхпроводников не просто очень мало, но точно равно нулю. Электроны в сверхпроводнике могут двигаться совершенно беспрепятственно.

Первоначально предполагалось, что металл в сверхпроводящем состоянии является идеальным проводником, т. е. телом с бесконечно большой проводимостью.

В идеальном сверхпроводнике (т. е. в теле с $\sigma \to \infty$) конечному значению плотности тока j по закону Ома отвечает напряженность поля внутри проводника, равная нулю:

$$\boldsymbol{E} = 0. \tag{21,1}$$

Отсутствию внутри сверхпроводника электрического поля отвечают определенные магнитные свойства.

Именно, из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t},$$

и равенства нулю поля $\boldsymbol{E}$ вытекает, что в сверхпроводнике магнитная индукция имеет постоянное значение

$$\boldsymbol{B} = \text{const}. \tag{21,2}$$

Значение этой постоянной равно величине индукции в сверхпроводнике в момент перехода в сверхпроводящее состояние.

Оказалось, однако, что этот вывод находится в противоречии с опытом. Если поместить металлический цилиндр в магнитное поле, перпендикулярное оси цилиндра, и охладить его до температуры ниже критической, то можно судить о характере поля внутри сверхпроводника по его распределению вблизи сверхпроводящего образца. Оказалось, что линии магнитной индукции выталкиваются из сверхпроводника (рис. 93). Индукция внутри сверхпроводника равна нулю:

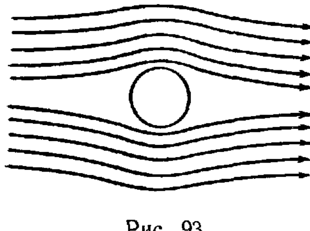


Рис. 93.

$$\boldsymbol{B} = 0. \tag{21,3}$$

В силу граничного условия (5,5) нормальная слагающая внешнего магнитного поля $(H_e)_n$ (равная индукции $(H_e)_n = (B_e)_n$) также равна нулю у поверхности сверхпроводника. Иными словами, внешнее магнитное поле является касательным к телу, находящемуся в сверхпроводящем состоянии.

Уравнение (1,16) показывает, что если в теле отсутствует магнитная индукция, то в отсутствие переменного электрического поля равен нулю полный средний ток в объеме тела

$$\overline{\rho \boldsymbol{v}} = 0. \tag{21,4}$$

Таким образом, внутри сверхпроводника полная плотность тока равна нулю. Это означает, что в поверхностном слое сверхпроводника циркулирует поверхностный ток такой величины, что магнитная индукция в теле обращается в нуль. Иными словами, среднее поле поверхностных токов компенсирует приложенное к сверхпроводнику внешнее магнитное поле.

Из условия $\boldsymbol{B}=0$ следует, что внутри сверхпроводника имеют место равенства

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0,$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0,$$

так что электрическое поле внутри сверхпроводника равно нулю. Поверхностный ток в сверхпроводнике не связан с действием электрического поля. Для определения плотности поверхностного тока можно воспользоваться граничным условием (5,3). Именно, поскольку магнитное поле в сверхпроводнике отсутствует, то (5,3) дает непосредственно (при $\boldsymbol{H}^{(e)} = \boldsymbol{B}^{(e)}$)

$$j_S = \frac{c}{4\pi}\left[\boldsymbol{n}\boldsymbol{B}^{(e)}\right],$$

где $\boldsymbol{B}^{(e)}$ — вектор индукции вне сверхпроводника. Если тело является односвязным, то сумма поверхностных токов равна нулю. Напротив, в случае многосвязного тела, например сверхпроводящего кольца, полный ток может быть отличным от нуля. При этом появление тока в сверхпроводнике может быть не связано с действием сторонних э. д. с., но может создаваться действием магнитного поля. Возбужденный в сверхпроводнике поверхностный ток может циркулировать неопределенно долго без какого-либо ослабления.

Опыт показал, что если напряженность магнитного поля в пространстве, окружающем сверхпроводник, превышает некоторое критическое значение $H_{\text{кр}}$, сверхпроводимость в образце исчезает. Разрушение сверхпроводящего состояния и появление сопротивления происходит скачком.

Критическое значение напряженности магнитного поля оказывается функцией температуры, которая приближенно дается эмпирической формулой

$$H_{\text{кр}} = \text{const}\,(T_{\text{кр}} - T).$$

При $T = T_{\text{кр}}$, $H_{\text{кр}} = 0$, т. е. всякое поле при $T = T_{\text{кр}}$ разрушает сверхпроводимость.

Рассмотрение сверхпроводника как металла, находящегося в особом сверхпроводящем состоянии, позволяет сделать некоторые заключения о характере перехода в это состояние. Именно, сверхпроводящее состояние следует рассматривать как особую

фазу вещества, а переход металла из нормального в сверхпроводящее состояние — как фазовый переход.

Рассмотрим фазовый переход нормальное состояние → сверхпроводящее состояние, происходящий во внешнем магнитном поле. В сверхпроводящем состоянии средний полный ток $\overline{\rho v}$ равен нулю и выделить из него часть, отвечающую магнитному моменту (как это было сделано в § 3), не представляется возможным. Тем не менее введем формально напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}_i$ и магнитный момент сверхпроводника $\boldsymbol{M}$ соотношением

$$\boldsymbol{B}_i = 0 = \boldsymbol{H}_i + 4\pi\boldsymbol{M}.$$

Поле $\boldsymbol{H}_i$ можно легко связать с внешним магнитным полем $\boldsymbol{H}_e$, если рассмотреть длинный цилиндрический сверхпроводник, ось которого ориентирована вдоль поля. Тогда в силу непрерывности тангенциальной слагающей поля (в данном случае совпадающей с полным полем)

$$\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{H}_e$$

и

$$\boldsymbol{M} = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}_e. \qquad (21,5)$$

Заметим, что равенству (21,5) отвечает значение $\chi = -\frac{1}{4\pi}$.

Таким образом, сверхпроводящему состоянию отвечает формально магнитная проницаемость $\mu = 1 + 4\pi\chi = 0$ и оно является идеально диамагнитным.

Согласно (18,2), термодинамический потенциал тела в сверхпроводящем состоянии может быть представлен в виде

$$\Phi_s(p, T, H) = \Phi_s(p, T) - V\int_0^H \boldsymbol{M}(H)\,d\boldsymbol{H}, \qquad (21,6)$$

где $\Phi_s(p, T)$ — потенциал тела в сверхпроводящем состоянии в отсутствие внешнего магнитного поля.

Подставляя в (21,6) значение $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{H})$ по формуле (21,5), получаем

$$\Phi_s(p, T, H) = \Phi_s(p, T) + \frac{V}{8\pi}\boldsymbol{H}_e^2. \qquad (21,7)$$

Когда внешнее поле достигает критического значения $H_{\text{кр}}$, наступает разрушение сверхпроводящего состояния. При этом термодинамический потенциал сверхпроводящего состояния настолько увеличивается за счет второго слагаемого в (21,7), что термодинамический потенциал сверхпроводящего состояния оказывается равным термодинамическому потенциалу нормального

состояния $\Phi_n(p, T)$. В точке перехода выполняется соотношение

$$\Phi_s(p, T)+\frac{VH_{\text{кр}}^2}{8\pi}=\Phi_n(p, T). \tag{21,8}$$

В выражении для термодинамического потенциала Φ_n мы опустим добавочный член, связанный с магнитным полем, поскольку у обычных диа- или парамагнитных металлов он весьма мал.

Дифференцируя равенство (21,8) по температуре и пользуясь определением энтропии (29,10) ч. III, находим

$$S_s-S_n=-\frac{\partial\Phi_s}{\partial T}+\frac{\partial\Phi_n}{\partial T}=\frac{VH_{\text{кр}}}{4\pi}\frac{dH_{\text{кр}}}{dT}, \tag{21,9}$$

где S_n и S_s — энтропии нормального и сверхпроводящего состояний при температуре T.

Мы видим, что если $H_{\text{кр}}\neq 0$, т. е. переход происходит при $T>T_{\text{кр}}$, энтропия системы меняется скачком. Фазовый переход сопровождается выделением скрытого тепла

$$Q=T\,\Delta S=\frac{TVH_{\text{кр}}}{4\pi}\frac{dH_{\text{кр}}}{dT}. \tag{21,10}$$

Опыт показывает, что при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние тепло всегда выделяется.

Если фазовый переход в сверхпроводящее состояние происходит без поля (т. е. $H_{\text{кр}}=0$), то

$$S_s=S_n,$$

и скрытое тепло перехода отсутствует.

Скачок теплоемкости легко найдем, если продифференцируем (20,9) по температуре. Тогда имеем

$$\left(\frac{\partial S_s}{\partial T}\right)_V-\left(\frac{\partial S_n}{\partial T}\right)=\frac{V}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{\text{кр}}}{\partial T}\right)^2+\frac{V}{4\pi}H_{\text{кр}}\left(\frac{\partial^2 H_{\text{кр}}}{\partial T^2}\right). \tag{21,11}$$

В отсутствие внешнего поля находим простое выражение для скачка теплоемкости при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние:

$$\Delta C_V=T\left[\left(\frac{\partial S_s}{\partial T}\right)_V-\left(\frac{\partial S_n}{\partial T}\right)_V\right]=\frac{VT}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{\text{кр}}}{\partial T}\right)^2. \tag{21,12}$$

Таким образом, рассматриваемый фазовый переход представляет фазовый переход второго рода. Выведенные макроскопические (термодинамические) соотношения и ряд других, которых мы не могли коснуться [1]), находятся в хорошем согласии

---

[1]) См. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, 1959.

с опытными фактами. Однако, хотя термодинамическая теория сверхпроводимости успешно описывает ряд свойств сверхпроводников, но оставляет открытым основной вопрос — вопрос о физической природе сверхпроводимости.

До самого последнего времени все попытки создания микроскопической теории сверхпроводимости, в которой сверхпроводимость была бы связана со свойствами электронного газа в металле, оставались безуспешными. Лишь в 1958 г. они увенчались полным успехом. Современная теория сверхпроводимости будет изложена в ч. VI.

В построении теории сверхпроводимости важную роль сыграли опытные данные, показавшие, что существует связь между явлением сверхпроводимости и характером взаимодействия электронов сверхпроводника с его кристаллической решеткой. Речь идет об открытом в 1950 г. Максвеллом, Рейнольсом и др. так называемом изотопическом эффекте. Именно, было обнаружено, что критическая температура $T_{кр}$ зависит от того, из каких изотопов данного элемента построена решетка, т. е. в конечном итоге от массы ионов решетки. Связь между массой ионов решетки M и критической температурой перехода дается эмпирической формулой

$$M^{1/2}T_{кр} = \text{const}, \qquad (21,13)$$

где const имеет определенное значение для каждого элемента.

В заключение следует указать на аналогию, существующую между сверхпроводящим состоянием металла и сверхтекучим состоянием жидкого гелия II. Сверхпроводимость можно сравнить со сверхтекучестью электронного газа или жидкости, могущей беспрепятственно двигаться в кристаллической решетке металла (см. ч. VI).

ГЛАВА IV

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

§ 22. Условия квазистационарности

Мы перейдем теперь к изучению электромагнитных полей переменных во времени. Оказывается, что при этом существует широкий интервал частот изменения полей, в котором уравнения Максвелла допускают существенное упрощение.

В § 19 ч. I мы рассмотрели случай медленного движения зарядов, когда можно было полностью пренебречь запаздыванием в системе и считать электромагнитное поле распространяющимся с бесконечно большой скоростью.

В основании результатов § 26 ч. I условие пренебрежения запаздыванием сводится к требованию

$$T \gg \tau = \frac{L}{c}, \qquad (22,1)$$

где T — период движения в системе, а τ — время запаздывания, L — геометрическая протяженность той области, в которой рассматриваются электромагнитные возмущения.

В макроскопической электродинамике существует ряд важнейших проблем, при рассмотрении которых можно считать условие (22,1) выполненным. В приближении (22,1) в пределах рассматриваемой системы можно считать скорость распространения электромагнитных возмущений бесконечно большой. Значения полей в данной точке будут при этом находиться в одной фазе с их значениями в любой другой точке внутри системы. Ясно, что возможность пренебрегать запаздыванием в системе существенно упрощает изучение соответствующих электромагнитных полей.

Электромагнитные поля, в которых можно пренебрегать явлением запаздывания, мы называли в ч. I квазистационарными. При изучении электромагнитных явлений в веществе квазистационарные поля, помимо требования (22,1), которое мы будем называть первым условием квазистационарности, должны

удовлетворять еще двум ограничениям, к выводу которых мы и перейдем.

Условие (22,1) накладывает, очевидно, некоторое ограничение на период изменения электромагнитного поля T (или частоту $\omega=\frac{2\pi}{T}\Big)$. Именно, периоды T должны быть достаточно велики (а частоты — низки) при данном размере системы.

При сравнительно малых частотах изменения электромагнитного поля в проводниках всегда выполняется условие

$$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \gg \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \qquad (22,2)$$

Действительно, его можно переписать в виде

$$\sigma \boldsymbol{E} \gg \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \approx \varepsilon\omega \boldsymbol{E},$$

или

$$T \gg \frac{\varepsilon}{\sigma}. \qquad (22,3)$$

При выполнении неравенства (22,2), которое следует называть вторым условием квазистационарности, в области пространства, занятой проводниками, можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости.

Третьим условием квазистационарности является требование, чтобы величины, характеризующие свойства вещества — σ, ε и μ, имели такое же значение, что и в постоянных полях. Мы увидим в части VI, что первое требование сводится к тому, что период T должен быть существенно больше, чем время свободного пробега электронов в металле:

$$T \gg \frac{\lambda}{\bar{v}}, \qquad (22,4)$$

где λ — средняя линия свободного пробега и $\bar{v}$ — средняя скорость электронов в металле. При меньших значениях T за время свободного пробега электрона поле успеет изменить свое значение, что отразится, очевидно, на величине пробега, и, в конечном счете, на значении σ.

Зависимость ε от частоты внешнего поля будет рассмотрена нами ниже.

Числовые оценки показывают, что условия квазистационарности для обычных макроскопических систем, содержащих в качестве проводников металлы, выполняются вплоть до частот, лежащих в инфракрасной части спектра. Совокупность условий, определяющих квазистационарные поля, оказывается выполненной в широкой области явлений, объединяемых названием «переменные токи». Переменные токи или токи низкой частоты

находят широчайшее применение в технике и лабораторной практике. Это определяет практическую важность теории квазистационарных процессов.

Уравнения квазистационарного электромагнитного поля имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{22,5}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= 4\pi\rho. \end{aligned}\right\} \tag{22,6}$$

В уравнении для ротора магнитного поля на основании (22,2) нами опущено слагаемое, выражающее ток смещения. При этом выполнены условия связи:

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}; \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \qquad \boldsymbol{j} = \sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}). \tag{22,7}$$

Уравнение непрерывности в случае квазистационарных полей можно представить в виде

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{D}}{4\pi} = \operatorname{div} \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \approx \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{22,8}$$

Таким образом, отличие уравнений квазистационарного поля от поля стационарных токов сводится лишь к учету явлений электромагнитной индукции. Ниже будет показано, что возможность пренебрежения запаздыванием в системе позволяет получить уравнения электромагнитного поля для случая системы линейных проводников в виде уравнений в полных, а не в частных, производных и притом с постоянными коэффициентами.

Для этой цели необходимо перейти к уравнениям Максвелла в интегральной форме.

§ 23. Закон индукции в движущихся проводниках и средах

Прежде всего необходимо найти поток индукции, входящий в уравнения Максвелла, записанные в интегральной форме. При этом мы должны обобщить понятие потока индукции на случай движущихся контуров с током.

Пусть некоторый контур с током движется в магнитном поле. Скорость движения будем считать постоянной в пространстве и малой по сравнению со скоростью света c. Найдем изменение потока индукции через контур с проводником.

Имеем, очевидно,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}.$$

По определению

$$\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{S} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\int\limits_{S_2} \boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S} - \int\limits_{S_1} \boldsymbol{B}(t)\,d\boldsymbol{S}}{\Delta t}, \qquad (23,1)$$

где $\boldsymbol{B}(t+\Delta t)$ — вектор индукции, взятый в момент времени $t+\Delta t$ и S_2 — поверхность, в которую переходит поверхность S_1 в момент $t+\Delta t$. При этом векторы нормали к обеим поверхностям считаются ориентированными в одну сторону.

Применим теорему Гаусса — Остроградского к замкнутой поверхности, состоящей из (рис. 94) поверхностей S_2 и S_1 и боковой поверхности Σ, образовавшейся при смещении контура из положения S_1 в положение S_2. Поскольку $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$, т. е. $\boldsymbol{B}$ — вектор, не имеющий источников, можно написать

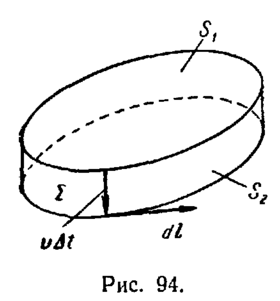


Рис. 94.

$$\oint \boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S} = \int\limits_{S_2} \boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S} + \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{\Sigma} - \int\limits_{S_1} \boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S} = 0. \qquad (23,2)$$

Здесь знак минус связан с нашим выбором ориентации вектора нормали. Для боковой поверхности Σ можно, очевидно, написать (см. рис. 94)

$$d\boldsymbol{\Sigma} = [d\boldsymbol{l}\boldsymbol{v}]\,\Delta t,$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость движения контура с током и dl — элемент его длины. Поэтому

$$\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{\Sigma} = \int \boldsymbol{B}\,[d\boldsymbol{l}\boldsymbol{v}]\,\Delta t = \Delta t \oint [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\,d\boldsymbol{l}, \qquad (23,3)$$

где интеграл берется по кривой, ограничивающей поверхность S_1 (т. е. по контуру с током). Далее, с точностью до бесконечно малых второго порядка можно написать

$$\int\limits_{S_1} \boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S} \approx \int\limits_{S_1} \boldsymbol{B}(t)\,d\boldsymbol{S} + \Delta t \int\limits_{S_1} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,d\boldsymbol{S}. \qquad (23,4)$$

Из (23,3), (23,4) и (23,2) находим

$$\int\limits_{S_2} \boldsymbol{B}(t+\Delta t)\,d\boldsymbol{S} \approx \int\limits_{S_1} \boldsymbol{B}(t)\,d\boldsymbol{S} + \Delta t \int\limits_{S_1} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,d\boldsymbol{S} - \Delta t \oint [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\,d\boldsymbol{l}.$$

Подставляя это выражение в (23,1) и переходя к пределу, находим

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{S}=\int\limits_{S_1}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,d\boldsymbol{S}-\oint[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\,d\boldsymbol{l}. \tag{23,5}$$

Формула (23,5) показывает, что изменение потока индукции через контур тока во времени может происходить либо вследствие изменения вектора индукции, либо при движении контура с током в заданном поле под углом к линиям поля не равным нулю (так что вектор скорости не параллелен $\boldsymbol{B}$). Иными словами, если контур с током при своем движении пересекает линии вектора индукции $\boldsymbol{B}$, то возникает изменение потока индукции Φ во времени.

Переходя во втором интеграле к интегрированию по поверхности, можем написать

$$\frac{d\Phi}{dt}=\int\left\{\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\right\}d\boldsymbol{S}. \tag{23,6}$$

Напишем теперь закон индукции Фарадея для движущегося контура с током в виде

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{23,7}$$

где $\boldsymbol{E}$ — напряженность поля в линейном проводнике. Ясно, что в правой части (23,7) должно стоять полное изменение потока индукции, независимо от причины, вызывающей это изменение.

Непрерывность тангенциальной слагающей $\boldsymbol{E}$ позволяет перейти от линейного проводника к соседнему с ним контуру, лежащему в среде вне проводника. При этом можно уже говорить не о движении контура с током, а о движении среды. Скорость $\boldsymbol{v}$ означает при этом скорость движения данной точки среды. От (23,7) можно перейти к дифференциальному уравнению Максвелла в движущейся среде.

Именно, написав с помощью (23,5)

$$\oint \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=\int\operatorname{rot}\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{S}=-\frac{1}{c}\int\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,d\boldsymbol{S}+\frac{1}{c}\int\operatorname{rot}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\,d\boldsymbol{S},$$

имеем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\right). \tag{23,8}$$

Преобразуем выражение в скобках, написав на основании (I,45)

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]=\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}-(\boldsymbol{B}\operatorname{grad})\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{B}-\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\operatorname{div}\boldsymbol{v}=$$
$$=\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{B}=\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

в силу (22,5) и постоянства $\boldsymbol{v}$.

Тогда находим окончательно значение $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ в движущейся среде:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}. \tag{23,9}$$

Важность полученных результатов. и в частности закона индукции Фарадея в форме (23,7), связана с тем, что движение проводников в магнитном поле является на практике одним из основных методов возбуждения э. д. с. (например, в динамомашинах).

§ 24. Уравнения Максвелла для квазистационарных полей в интегральной форме и их интегрирование для случая линейных проводников

Мы можем теперь рассмотреть систему уравнений Максвелла для квазистационарных полей в интегральной форме, рассматривая общий случай движущихся сред:

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{24,1}$$

$$\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} = 0, \tag{24,2}$$

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi I}{c}, \tag{24,3}$$

$$\oint \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S} = 4\pi \int \rho\, dV. \tag{24,4}$$

Уравнение непрерывности запишется согласно (22,8) в виде

$$\oint \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S} = 0. \tag{24,5}$$

Рассмотрим случай линейных проводников с током. Для простоты мы ограничимся сперва одним проводником. Мы будем считать заданными сторонние э. д. с. в контуре; при этом величина э. д. с. может зависеть от времени. Напишем обобщенный закон Ома в интегральной форме в виде

$$\oint \boldsymbol{j}\, \frac{d\boldsymbol{l}}{\sigma} = \oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} + \oint \boldsymbol{E}^{\text{стор}}\, d\boldsymbol{l}. \tag{24,6}$$

Поскольку мы рассматриваем линейный контур и справедливо уравнение непрерывности, мы можем представить его с помощью (24,1), (15,4) и (15,6) в виде

$$IR = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} + \mathscr{E}(t). \tag{24,7}$$

Уравнение (24,7), связывающее ток в контуре с заданной сторонней э. д. с. $\mathscr{E}(t)$, называют обычно законом Ома для цепи переменного тока.

Если перейти теперь к системе, состоящей из произвольного числа N контуров с переменным током, то для каждого из них можно написать

$$I_i R_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_i}{dt} + \mathscr{E}_i(t). \qquad (24,8)$$

где Φ_i — поток индукции через i-й контур с проводником.

Магнитное поле определится из уравнений (24,2) и (24,3), не отличающихся от уравнений для постоянного тока. Поэтому для всех магнитных величин остаются в силе соотношения, полученные для постоянного тока. Однако уравнения для распределения магнитного поля и тока в цепи оказываются связанными между собой: поток магнитной индукции через i-й контур с током определяется распределением магнитного поля; распределение магнитного поля определяется токами во всех контурах.

Рис. 95.

Легко показать, однако, что в квазистационарных полях потоки индукции оказываются связанными с плотностями токов линейными соотношениями с постоянными коэффициентами типа

$$\Phi_i = c\sum_{k=1}^{N} L_{ik} I_k \qquad (L_{ik} = L_{ki}). \qquad (24,9)$$

Для доказательства рассмотрим простейший случай двух линейных контуров в среде с постоянной магнитной проницаемостью μ.

Ток во втором контуре (рис. 95) создает в первом контуре поток индукции

$$\Phi_1(2) = \mu\int \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{S}_1 = \int \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_2\, d\boldsymbol{S}_1 = \oint \boldsymbol{A}_2\, d\boldsymbol{l}_1, \qquad (24,10)$$

где индекс 1 относится к первому контуру.

Вектор-потенциал магнитного поля линейного проводника с током I_2 дается формулой (17,4). Поэтому

$$\Phi_1(2) = \frac{\mu I_2}{c}\oint\oint\frac{d\boldsymbol{l}_1\, d\boldsymbol{l}_2}{r_{12}} = cL_{12}I_2, \qquad (24,11)$$

т. е. поток индукции в первом контуре, создаваемый током во втором контуре, пропорционален току I_2 в последнем. Коэффициент пропорциональности L_{12} оказывается постоянной, зависящей только от свойств среды и взаимного расположения контуров:

$$L_{12} = \frac{\mu}{c^2}\oint\oint\frac{d\boldsymbol{l}_1\, d\boldsymbol{l}_2}{r_{12}}, \qquad (24,12)$$

где r_{12} — расстояние между элементами длины dl_1 и dl_2. Величина L_{12} носит название коэффициента взаимоиндукции.

Наряду с потоком магнитной индукции $\Phi_1(2)$ через первый контур с током проходит поток индукции, создаваемый током в самом контуре:

$$\Phi_1(1) = cL_{11}I_1. \qquad (24,13)$$

Коэффициент пропорциональности L_{11} носит название коэффициента самоиндукции. В принципе происхождение коэффициента самоиндукции таково: поток магнитной индукции через некоторый участок провода получается суммированием потоков создаваемых другими его участками. При этом во всех участках провода течет ток I_1.

Ясно, однако, что для вычисления коэффициента самоиндукции нельзя пользоваться формулой (24,12). При приближении участка dl_2 к участку dl_1 в том же проводнике $r_{12} \to 0$, и интеграл (24,12) расходится. Причина этой расходимости заключается в том, что если участок dl_2 близок к dl_1, поперечные размеры проводника становятся сравнимыми с расстоянием r_{12} между этими участками. Это, в свою очередь, делает недопустимым использование формулы (19,4), найденной в приближении линейных проводников. Иными словами, при рассмотрении взаимоотношения между близкими участками одного проводника заведомо неверно приближение линейного проводника. В следующих параграфах мы увидим, как можно найти коэффициент самоиндукции, не прибегая к представлению о линейном характере проводника. Пока же мы можем написать полный поток магнитной индукции через первый проводник в виде

$$\Phi_1 = cL_{11}I_1 + cL_{12}I_2, \qquad (24,14)$$

аналогично поток магнитной индукции через второй проводник

$$\Phi_2 = cL_{22}I_2 + cL_{21}I_1.$$

Легко показать, что имеет место равенство $L_{21} = L_{12}$. Действительно,

$$L_{21} = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{dl_2\, dl_1}{r_{21}} = \frac{\mu}{c^2} \oint \oint \frac{dl_1\, dl_2}{r_{12}} = L_{12}. \qquad (24,15)$$

Уравнение (24,7) обобщенного закона Ома в первом контуре приобретает вид

$$I_1R_1 = -L_{11}\frac{dI_1}{dt} - L_{12}\frac{dI_2}{dt} + \mathscr{E}_1(t). \qquad (24,16)$$

Аналогичное выражение может быть написано для второго контура.

В общем случае произвольного числа контуров поток магнитной индукции через проводник i выражается по формуле (24,9) через токи во всех контурах, коэффициент самоиндукции L_{ii} и коэффициенты взаимной индукции L_{ik}. Подставляя (24,9) в закон Ома для цепи переменного тока, находим совокупность уравнений, определяющих ток I_i в каждом из N контуров:

$$I_i R_i = -\sum_k L_{ik}\frac{dI_k}{dt} + \mathscr{E}_i(t) \qquad (i = 1,\ 2\ \ldots\ N). \qquad (24,17)$$

Если заданы сторонние э. д. с. $\mathscr{E}_i$ и геометрические свойства системы линейных контуров, определяющих совокупность коэффициентов L_{ik}, интегрирование системы линейных дифференциальных уравнений (24,17) с постоянными коэффициентами позволяет определить токи I_i в контурах. Магнитные поля будут при этом определяться по формулам (24,2) и (24,3).

Таким образом, в соответствии со сказанным в конце § 22, уравнения квазистационарного электромагнитного поля в случае системы линейных проводников сводятся к уравнениям в полных производных с постоянными коэффициентами. Последние, однако, как это известно из общей теории дифференциальных уравнений, сводятся к системе алгебраических уравнений.

Плотности объемных зарядов, возникающих в некоторых случаях в проводниках, вычисляются обычно с помощью формулы (24,4) по заданному распределению электрического поля.

В качестве примера применений формул (24,11) и (24,12) вычислим коэффициент взаимной индукции двух прямых параллельных линейных проводников длины l. Для определенности будем считать токи в проводниках направленными в одну сторону. Обозначим расстояние между проводниками через h.

Тогда по формуле (24,12) имеем

$$L_{12} = \frac{\mu}{c^2}\int\frac{dl_1\,dl_2}{r_{12}} = \frac{\mu}{c^2}\int_0^l\int_0^l\frac{dx_1\,dx_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+h^2}} =$$

$$= \frac{\mu}{c^2}\int_0^l dx_1 \ln\left\{\frac{(l-x_1)+\sqrt{(l-x_1)^2+h^2}}{-x_1+\sqrt{x_1^2+h^2}}\right\}.$$

Вычисление второго интеграла несколько громоздко. Интегрируя по частям, получаем

$$L_{12} = \frac{\mu}{c^2}\left\{l\cdot\ln\left[\frac{h}{-l+\sqrt{l^2+h^2}}\right] - 2\left(\sqrt{l^2+h^2}-h\right) + \right.$$

$$\left. + l\cdot\ln\left[\frac{l}{-l+\sqrt{l^2+h^2}}\right]\right\}.$$

Упростим найденное выражение для двух предельных случаев: когда провода находятся на расстоянии, удовлетворяющем неравенствам $h \ll l$ и $h \gg l$. В первом случае без труда находим с точностью до величин порядка $\left(\frac{h}{l}\right)^2$

$$L_{12} \approx \frac{2\mu l}{c^2}\left\{\ln\frac{2l}{h} - 1 + \frac{h}{l}\right\}.$$

В обратном предельном случае с точностью до величин порядка $\frac{l^2}{h^2}$

$$L_{12} \approx \frac{\mu}{c^2}\frac{l^2}{h}.$$

Для сравнения разных методов вычисления L_{12} найдем коэффициент взаимоиндукции двух кольцевых соленоидов, навитых на общий сердечник.

Диаметр кольца D (длину соленоида) будем считать большим по сравнению с диаметром витков. Магнитное поле внутри кольцевого соленоида можно считать однородными и написать

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 2\pi DH = \frac{4\pi}{c} n_1 I_1,$$

где n_1 — число витков в первом соленоиде и I_1 — ток в нем. Отсюда

$$H = \frac{2n_1 I_1}{cD}. \qquad (24,18)$$

Поток индукции через n_2 витков второго соленоида (в предположении, что утечки нет и все линии индукции магнитного поля, создаваемого первым соленоидом, пронизывают второй) будет равен

$$\Phi_{21} = \mu H n_2 S = \frac{2\mu n_1 n_2 S}{cD} I_1,$$

где S — сечение соленоида.

Из (24,11) находим

$$L_{21} = \frac{2\mu n_1 n_2 S}{c^2 D}.$$

§ 25. Энергия магнитного поля системы квазистационарных токов

Найдем энергию магнитного поля системы токов в приближении квазистационарных полей.

Как мы видели в § 7, полная энергия (точнее — свободная энергия) магнитного поля равна

$$T_{\text{магн}} = \int \frac{BH}{8\pi} dV.$$

Интегрирование ведется по всему пространству. При этом предполагалось, что в объеме V нет ферромагнетиков.

Выражая $\boldsymbol{B}$ через вектор-потенциал и пользуясь первым из уравнений (22,5), имеем

$$\boldsymbol{BH} = \boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \operatorname{div}[\boldsymbol{AH}] = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{Aj} + \operatorname{div}[\boldsymbol{AH}].$$

Поэтому

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{Aj}\,dV + \int \frac{\operatorname{div}[\boldsymbol{AH}]}{8\pi}\,dV. \qquad (25{,}1)$$

Последний интеграл при интегрировании по всему пространству обращается в нуль, и мы находим окончательно

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{Aj}\,dV. \qquad (25{,}2)$$

В формуле (25,2) $\boldsymbol{A}$ представляет вектор-потенциал, создаваемый в некоторой точке всеми токами, $\boldsymbol{j}$ — плотность тока в той же точке.

Интегрирование по всему пространству можно теперь заменить на интегрирование по объемам, занятым проводниками с током. Вне этих объемом $\boldsymbol{j} = 0$ и интеграл (25,2) исчезает. Поэтому

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{Aj}\,dv, \qquad (25{,}3)$$

где dv — элемент объема проводника.

Пусть во всей системе имеется N проводников. Разобьем интеграл (25,3) на две части, написав

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2c}\sum_i \int \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{j}_i\,dv_i + \frac{1}{c}\sum_{k>i}\int \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{j}_i\,dv_i. \qquad (25{,}4)$$

В интеграле, входящем в первую сумму, $\boldsymbol{A}_i$ означает вектор-потенциал магнитного поля, создаваемого в элементе объема dv_i данного проводника токами, имеющимися в других элементах того же самого проводника.

В интеграле во второй сумме $\boldsymbol{A}_k$ представляет вектор-потенциал поля, создаваемого в элементе объема dv_i токами во всех остальных проводниках. Следовательно, первая сумма представляет сумму собственных энергий всех N проводников. Вторая сумма дает взаимную энергию этих проводников.

Фактическое вычисление энергии $T_{\text{магн}}$ сталкивается с большими трудностями в случае проводников, находящихся в намагничивающейся среде. Поскольку магнитная проницаемость проводников, вообще говоря, отлична от проницаемости среды, для вычисления энергии токов по формуле (25,4) необходимо

знать распределение вектора-потенциала в неоднородной среде. Нахождение последнего представляет большие трудности. Мы ограничимся поэтому случаем, когда $\mu \approx \mu_0 \approx 1$ как в веществе проводников, так и в окружающей их среде. Иными словами, проводники вместе с окружающей их средой будем считать квазиоднородной системой. При этом вектор-потенциал в любой точке пространства дается формулой (17,4).

Подставляя (17,4) в (25,4), находим

$$T_{\text{магн}} = \frac{\mu}{2c^2}\sum_i \int\int \frac{j'_i j_i \, dv_i \, dv'_i}{r} + \frac{\mu}{c^2}\sum_{k>i}\int\int \frac{j_k j_i \, dv_i \, dv_k}{r}, \qquad (25,5)$$

где j' — плотность тока в элементе объема dv'_i, создающего поле в объеме dv_i, r — расстояние между dv_i и dv'_i.

Подобно тому, как энергия электростатического поля в случае системы проводников сводится к совокупности энергий последних, энергия магнитного поля, даваемая формулой (25,5), может рассматриваться как энергия квазистационарных токов.

Определим коэффициенты самоиндукции L_{ii} и коэффициенты взаимной индукции L_{ik} так, чтобы имело место равенство

$$T_{\text{магн}} = \frac{\mu}{2c^2}\sum_i \int\int \frac{j_i j'_i \, dv_i \, dv'_i}{r} + \frac{\mu}{c^2}\sum_{k>i}\int\int \frac{j_k j_i \, dv_i \, dv_k}{r} \equiv$$

$$\equiv \sum_i L_{ii}\frac{I_i^2}{2} + 2\sum_{k>i} L_{ik}\frac{I_i I_k}{2}. \qquad (25,6)$$

Первая сумма представляет совокупность собственных энергий токов во всех проводниках, вторая — совокупность взаимных энергий.

Формула (25,6) справедлива в равной мере для линейных и нелинейных проводников.

В случае линейных проводников определение коэффициентов взаимной индукции совпадает с (24,12). Действительно, в этом случае

$$\frac{\mu}{c^2}\sum_{k>i}\int\int \frac{j_k j_i \, dv_i \, dv_k}{r} = \frac{\mu}{c^2}\sum_{k>i} I_i I_k \oint\oint \frac{dl_i \, dl_k}{r} = \sum_{k>i} I_i I_k L_{ik},$$

где определение L_{ik} совпадает с (24,12).

Новое определение коэффициентов самоиндукции имеет существенное значение для нелинейных проводников. Оно свободно от трудностей, связанных с неограниченным возрастанием интеграла при $r \to 0$ (см. § 24). Элементы объема $dv \, dv'$ убывают при $r \to 0$ быстрее, чем $\frac{1}{r}$, и интеграл стремится к нулю.

По этой причине, как мы увидим ниже на конкретном примере, формула (25,6) служит для определения коэффициентов самоиндукции.

Энергия $T_{\text{магн}}$ совокупности линейных проводников может быть представлена в другом виде. Именно, в случае линейных токов первое слагаемое в (25,4) можно переписать в виде

$$T_{\text{магн}} = \frac{1}{2c} \sum_i \int A_i j_i \, dS_i \, dl_i = \frac{1}{2c} \sum_i I_i \oint A_i \, dl_i =$$
$$= \frac{1}{2c} \sum_i I_i \int \operatorname{rot} A_i \, dS_i = \frac{1}{2c} \sum_i I_i \int B_i \, dS_i = \frac{1}{2c} \sum_i I_i \Phi_i,$$

где $\Phi_i = \int B_i dS_i$ — поток магнитной индукции через i-й проводник.

Найдем коэффициент самоиндукции для некоторых простейших систем. В качестве первого примера рассмотрим коэффициент самоиндукции кругового соленоида. Поле внутри соленоида дается формулой (24,18). Энергия поля равна

$$\frac{\mu H^2 V}{8\pi} = \frac{\mu n^2 I^2 S \cdot 2\pi D}{2\pi c^2 D^2} = \frac{LI^2}{2},$$

откуда

$$L = \frac{2\mu n^2 S}{c^2 D}.$$

Рассмотрим теперь коэффициент самоиндукции двух концентрических цилиндров, по которым текут одинаковые и противоположно направленные токи силой I. Пусть радиусы цилиндров будут R_1 и R_2, их высота l, толщина стенок — пренебрежимо мала. Очевидно, что магнитное поле внутри малого цилиндра и вне большого цилиндра равно нулю.

Поле в зазоре между цилиндрами имеет напряженность

$$H = \frac{2I}{cr}.$$

Энергия поля равна

$$\int \frac{\mu H^2}{8\pi} \, dV = \frac{\mu I^2 l}{c^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r \, dr}{r^2} = \frac{\mu I^2 l}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Отсюда

$$L = \frac{2\mu l}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

§ 26. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции для нелинейных проводников.

При вычислении коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции в нелинейных проводниках мы ограничимся случаем, когда магнитная проницаемость вещества проводников и среды близка к единице (т. е. когда в системе нет ферромагнетиков). При этом можно приближенно считать, что μ имеет одинаковое значение μ_0 во всем пространстве. Иными словами, мы будем считать всю систему однородной по ее магнитным свойствам.

Для краткости записи мы будем полагать, что система состоит из двух нелинейных проводников. Геометрическую форму и распределение плотностей токов внутри проводников мы будем считать неизменными во времени, проводники — неподвижными и недеформируемыми.

Разобьем оба нелинейных проводника на совокупность трубок тока. Возможность такого разбиения вытекает из соленоидального характера токов в квазистационарных полях. Для каждой трубки dS_α можно написать соотношение (24,6), т. е.

$$\oint j_\alpha \frac{dl_\alpha}{\sigma_\alpha} = \oint E_\alpha dl_\alpha + \oint E_\alpha^{\text{стор}} dl_\alpha. \tag{26,1}$$

Для квазистационарных токов справедливы соотношения (16,5)—(16,7), полученные для любого соленоидального тока. Умножая обе части равенства (26,1) на $\frac{dI_\alpha}{I}$ — величину, постоянную вдоль проводника, и интегрируя по всему сечению проводника, имеем

$$\int_S \frac{dI_\alpha}{I} \oint j_\alpha \frac{dl_\alpha}{\sigma_\alpha} = \int_S \frac{dI_\alpha}{I} \oint E_\alpha dl_\alpha + \int_S \frac{dI_\alpha}{I} \int E_\alpha^{\text{стор}} dl_\alpha. \tag{26,2}$$

Преобразуем входящие в (26,2) интегралы для некоторого, например первого, проводника следующим образом:

$$\int_{S_1} \frac{dI_\alpha^{(1)}}{I_1} \oint j_1 \frac{dl_1}{\sigma_1} = \int \oint \frac{dI_\alpha^{(1)}}{I_1} j_1 \frac{dl_1}{\sigma_1} = \int_{S_1} \oint \psi_1 \frac{dS_\alpha^{(1)}}{S_1} j_1 \frac{dl_1}{\sigma_1} =$$

$$= \int \oint \frac{I_1 \psi_1^2 dS_\alpha^{(1)} dl_1}{\sigma_1 S_1^2} = I_1 \int_{S_1} \oint \frac{\psi_1^2 dS_\alpha^{(1)} dl_1}{\sigma_1 S_1^2} = I_1 R_1, \tag{26,3}$$

где R_1 — полное омическое сопротивление первого проводника. При этом мы воспользовались (16,7) и (16,8). Для линейного

проводника $\psi = 1$ и выражение для R совпадает с (15,4). Далее, имеем на основании (23,7) и (24,10)

$$\int\limits_{S_1} \frac{dI_\alpha^{(1)}}{I} \oint \boldsymbol{E}_1\, d\boldsymbol{l}_1 = -\frac{1}{c} \int\limits_{S_1} \frac{dI_\alpha^{(1)}}{I} \frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \int\limits_{S} \oint \frac{dI_\alpha}{I} A_1\, d\boldsymbol{l}_1 =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \int\limits_{S} \oint \boldsymbol{j}_1 \frac{A_1\, dl_\alpha\, dS_\alpha}{I} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\frac{1}{I} \int \boldsymbol{j}_1 \boldsymbol{A}_1\, dv, \qquad (26,4)$$

здесь $\boldsymbol{A}_1$ — вектор-потенциал магнитного поля в той точке, в которой берется элемент объема dv.

Будем рассматривать теперь один из проводников, для определенности — первый. Поскольку по предположению проводники и среда однородны в магнитном отношении, мы можем воспользоваться для $\boldsymbol{A}_1$ выражением (17,3), которое для наших целей удобно записать в виде

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0}{c} \int \boldsymbol{j}' \frac{dV'}{r} = \frac{\mu_0}{c} \int \boldsymbol{j}_1' \frac{dv_1'}{r_{11}'} + \frac{\mu_0}{c} \int \boldsymbol{j}_2 \frac{dv_2}{r_{12}}. \qquad (26,5)$$

Первое слагаемое дает вектор-потенциал, создаваемый токами в объеме первого проводника, второе — токами в объеме второго проводника, r_{11}' означает расстояние между точками, к которым отнесены соответственно элемент dv_1' и элемент dl_1, r_{12} имеет аналогичный смысл.

Подставляя значение $\boldsymbol{A}_1$ в (26,4), имеем

$$\int\limits_{S_1} \frac{dI_\alpha^{(1)}}{I_1} \oint \boldsymbol{E}_1\, d\boldsymbol{l}_1 = -\frac{\mu_0}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{1}{I_1} \int\int \frac{\boldsymbol{j}_1 \boldsymbol{j}_1'\, dv_1\, dv_1'}{r_{11}'} -$$

$$-\frac{\mu_0}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{1}{I_1} \int\int \frac{\boldsymbol{j}_1 \boldsymbol{j}_2\, dv_1\, dv_2}{r_{12}}. \qquad (26,6)$$

Введем теперь коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции, определив их по формулам:

$$L_{11} = \frac{1}{I_1^2}\frac{\mu_0}{c^2} \int\int \frac{\boldsymbol{j}_1' \boldsymbol{j}_1\, dv_1'\, dv_1}{r_{11}'}, \qquad (26,7)$$

$$L_{12} = \frac{1}{I_1 I_2}\frac{\mu_0}{c^2} \int\int \frac{\boldsymbol{j}_1 \boldsymbol{j}_2\, dv_1\, dv_2}{r_{12}}, \qquad (26,8)$$

$$L_{21} = L_{12}. \qquad (26,9)$$

Нетрудно заметить, что L_{11} и L_{12} не зависят от сил токов I_1 и I_2. Действительно, с помощью (16,8) имеем

$$L_{11}=\frac{\mu_0}{c^2}\int\int\frac{\psi_1\psi_1'}{S_1S_1'}\frac{(l_1l_1')\,dv_1'\,dv_1}{r_{11}'},\tag{26,10}$$

$$L_{12}=\frac{\mu_0}{c^2}\int\int\frac{\psi_1\psi_2\,(l_1l_2)}{S_1S_2}\,\frac{dv_1\,dv_2}{r_{12}}.\tag{26,11}$$

Тогда окончательно

$$\int\limits_{S_1}\frac{dI_\alpha}{I_1}\oint \boldsymbol{E}_1\,d\boldsymbol{l}_1=-L_{11}\frac{dI_1}{dt}-L_{12}\frac{dI_2}{dt}\tag{26,12}$$

и аналогично для второго проводника.

Наконец, в интеграле $\int\frac{dI_\alpha}{I}\oint E^{\text{стор}}\,dl$ можно допустить, что сторонняя э. д. с. одинакова по всему сечению проводника, и написать

$$\int\frac{dI_\alpha'}{I_1}\oint E_1^{\text{стор}}\,dl_1=\mathscr{E}_1.\tag{26,13}$$

Подставляя (26,3), (26,12) и (26,13) в (26,2), находим окончательно

$$I_1R_1=-L_{11}\frac{dI_1}{dt}-L_{12}\frac{dI_2}{dt}+\mathscr{E}_1\tag{26,14}$$

и аналогично

$$I_2R_2=-L_{22}\frac{dI_2}{dt}-L_{21}\frac{dI_1}{dt}+\mathscr{E}_2.\tag{26,15}$$

Уравнения (26,14)—(26,15) совпадают с уравнениями (24,17) для линейных токов. Различие между ними заключается в том, что для нелинейных проводников нахождение сопротивлений и коэффициентов магнитной индукции является весьма сложной задачей. Во все эти величины входят распределения токов по сечению проводников. Поэтому практическая важность полученных уравнений невелика. Зато нами получено определение коэффициентов индукции (26,7)—(26,9), не основанное (в отличие от (24,12) и (24,13)) на предположении о линейности проводников.

В заключение подчеркнем, что, как это легко видеть, коэффициент взаимной индукции, определенный формулой (26,8) для линейного проводника ($\psi_1=\psi_2=1$), совпадает с (24,12),

§ 27. Уравнения Лагранжа для системы квазистационарных токов

До сих пор мы считали, что взаимное расположение проводников с током является заданным. На практике часто приходится рассматривать более общий случай подвижных проводников или проводников, изменяющих свою форму, взаимное расположение и т. п., находящихся в электромагнитном поле. Емкости, само- и взаимоиндукции и другие величины, которые мы ранее считали постоянными, при этом оказываются функциями некоторых параметров q_i, характеризующих конфигурацию системы. При рассмотрении таких систем весьма удобным является метод Лагранжа, в котором, как будет ясно из дальнейшего, электромагнитные и механические величины, характеризующие систему, фигурируют как формально равноправные. Оказывается, что упомянутые параметры q_i, а также величины зарядов Q_i в проводниках можно выбрать за некоторые обобщенные координаты.

Составим уравнения Лагранжа, характеризующие систему в обобщенных координатах q_i и Q_i. Обобщенными скоростями, отвечающими зарядам Q_i, являются величины $\dot{Q}_i = I_i$, т. е. токи, текущие в проводниках. Если включить энергию магнитного поля в кинетическую энергию системы, то полная кинетическая энергия равна

$$T = T_{\text{мех}} + T_{\text{магн}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik}(q_i, t) I_i(t) I_k(t) + T_{\text{мех}} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} \dot{Q}_i \dot{Q}_k + T_{\text{мех}}, \quad (27,1)$$

где $T_{\text{мех}}$ — кинетическая энергия механического движения проводников.

Аналогично потенциальную энергию системы будем считать слагающейся из энергии электрического поля (т. е. энергии емкостей, имеющихся в системе) и механической потенциальной энергии:

$$U = \sum \frac{Q_i^2(t)}{2C_i(q_i, t)} + U_{\text{мех}}. \quad (27,2)$$

Тогда функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} \sum L_{ik} \dot{Q}_i \dot{Q}_k - \frac{1}{2} \sum \frac{Q_i^2}{C_i} + (T_{\text{мех}} - U_{\text{мех}}). \quad (27,3)$$

Введем также диссипативную функцию

$$F = \frac{1}{2} \sum R_i(q_i, t) \dot{Q}_i^2 \quad (27,4)$$

и произвольные «внешние» силы, действующие на систему, не допускающие, вообще говоря, потенциала — сторонние э. д. с. $\mathscr{E}_i$. Напомним, что внешние силы $F_{\text{внешн}}$ в уравнениях Лагранжа представляют силы, зависящие не только от обобщенных координат, но также и от других, не имеющих отношения к данной системе, параметров. Эти силы определяются обычным соотношением $\delta A = F_{\text{внешн}}\delta q$, где δA — виртуальная работа на перемещении δq.

Тогда уравнения Лагранжа для обобщенных координат Q_i приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{Q}_i} + F_{\text{внешн}}. \tag{27,5}$$

После подстановки L в (27,5) и в предположении о неподвижности и недеформируемости контуров с током (постоянство индуктивностей и емкостей) получаем

$$\sum L_{ik}\ddot{Q}_k + \frac{Q_i}{C_i} = -R_i\dot{Q}_i + \mathscr{E}_i, \tag{27,6}$$

что совпадает с (24,17) и свидетельствует о правильном выборе выражений для кинетической и потенциальной энергии.

Из уравнения Лагранжа (27,6) следуют законы сохранения импульса и энергии. Для системы, на которую не действуют внешние силы (т. е. $F_{\text{внешн}}=0$) и в которой не происходит диссипация энергии (т. е. $F=0$), уравнение (27,6) приобретает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0.$$

Если в i-м контуре с током нет емкости, то соответствующая координата является циклической и для нее имеет место равенство

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0.$$

При этом соответствующий обобщенный импульс сохраняется:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L}{\partial I_i} = \sum L_{ik}I_k = \text{const}.$$

Напишем теперь закон сохранения энергии для системы неподвижных проводников. По общим правилам, энергия системы

$$E = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\dot{Q}_i - L = \frac{1}{2}\sum L_{ik}\dot{Q}_i\dot{Q}_k + \frac{1}{2}\sum \frac{Q_i^2}{C_i}. \tag{27,7}$$

При наличии диссипативных процессов

$$\frac{dE}{dt} = -2F + \sum F_{\text{внешн}}\dot{Q}_i.$$

Здесь $2F$ — диссипируемая энергия, а $\sum F_{\text{внешн}}\dot{Q}_i$ — работа внешних сил в единицу времени.

Подставляя значение E и F, записываем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum L_{ik}\dot{Q}_i\dot{Q}_k+\frac{1}{2}\sum\frac{Q_i^2}{C_i}\right)=-\sum R_i\dot{Q}_i^2+\sum\mathscr{E}_i\dot{Q}_i. \quad (27{,}8)$$

Переписав его в форме

$$\frac{d}{dt}(T_{\text{магн}}+U_{\text{эл}})=\sum(\mathscr{E}_iI_i-R_iI_i^2), \quad (27{,}9)$$

мы видим, что в замкнутой системе, не подверженной действию внешних сил ($\mathscr{E}_i=0$) и в которой нет диссипативных сил ($R_i=0$), энергия системы сохраняется:

$$T_{\text{магн}}+U_{\text{эл}}=0. \quad (27{,}10)$$

В случае, когда $\mathscr{E}_i\neq 0$, $R_i\neq 0$, формула (27,9) показывает, что разность между работой, производимой в единицу времени сторонними э. д. с. и выделяемым джоулевым теплом, идет на увеличение энергии магнитного и электрического полей, а также на увеличение механической энергии системы в случае подвижной системы контуров.

В частном случае одного неподвижного контура с током (27,9) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2}+\frac{Q^2}{2C}\right)=\mathscr{E}I-RI^2.$$

Применим полученные результаты к одиночному контуру с переменным током, в который включена некоторая емкость (конденсатор), к так называемой RLC-цепочке.

Уравнение (27,6) приобретает вид

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{Q}{C}=-R\dot{Q}+\mathscr{E}(t). \quad (27{,}11)$$

Если источник переменного тока — сторонняя э. д. с. представляет гармоническую функцию времени

$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_0e^{i\omega t},$$

то частное решение (27,11) имеет вид

$$Q=Q_0e^{i\omega t}.$$

Нас будет интересовать зависимость тока от времени, которую также можно представить в виде

$$I=I_0e^{i\omega t}.$$

Подставляя это в (27,11), получаем, что

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{Z^*},$$

где величина Z^*, именуемая комплексным сопротивлением или импедансом, равна

$$Z^* = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{27,12}$$

Переходя от комплексного к вещественному выражению для тока, находим

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{\mathscr{E}_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \end{aligned} \right\} \tag{27,13}$$

Мы видим, что в контуре возникают вынужденные колебания тока с частотой ω, сдвинутые по фазе на угол φ относительно сторонней э. д. с.

Наряду с вынужденными колебаниями в контуре могут существовать свободные или собственные колебания. Если сторонняя э. д. с. $\mathscr{E} = 0$, то из (27,11) легко находим

$$I = I_0 e^{i\omega_0 t},$$

где частота собственных колебаний

$$\omega_0 = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \tag{27,14}$$

При $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{CL}}$ имеют место затухающие колебания, причем затухание характеризуется временем $\tau = \frac{2L}{R}$. При $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{CL}}$ разряд имеет апериодический характер. Если система содержит несколько контуров, связанных между собой соответствующими коэффициентами взаимной индукции, то уравнения (27,6) могут быть решены по общим правилам решения систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. За детальным разбором подобного рода задач, представляющих особый интерес для электротехники, мы отсылаем читателя к специальной литературе[1]).

Найденные соотношения справедливы как для системы контуров, связанных между собой индуктивно (т. е. при наличии

---

[1]) См., например, В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954.

отличных от нуля коэффициентов L_{ik}), так и для системы разветвленных контуров. В последнем случае закон Кирхгофа позволяет уменьшить число независимых токов I_i или координат Q_i.

В заключение заметим, что результаты этого параграфа до известной степени оправдывают термин «сторонняя» э.д.с., поскольку эта величина действительно играет роль обобщенной силы, действующей на систему.

§ 28. Обобщенные пондеромоторные силы в системе с подвижными контурами

В предыдущем параграфе мы ограничились случаем неподвижных контуров. Рассмотрим теперь подвижные контуры с током.

Найдем, прежде всего, выражение для обобщенной силы, отвечающей механической обобщенной координате q_i, характеризующей пространственную конфигурацию i-го контура с током. По определению

$$F_{q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Обычно можно считать, что емкости, имеющиеся в системе, не изменяются при движении проводников. Тогда, подставляя L из (27,3), находим

$$F_{q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} T_{\text{магн}} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{2} \sum L_{ik}(q_i, q_k) I_i I_k. \qquad (28,1)$$

Мы видим, что энергия магнитного поля играет двоякую роль: по отношению к координатам электромагнитного характера Q_i она является кинетической энергией; по отношению к пространственным координатам q_i она представляет взятую с обратным знаком потенциальную энергию. Пондеромоторные силы действуют в таком направлении, которое отвечает увеличению магнитной энергии поля. Применим формулу (28,1) к некоторым конкретным случаям.

Рассмотрим, прежде всего, механические силы, действующие на уединенный контур с током. Пусть q — обобщенная координата, характеризующая размеры контура. Сила, действующая на контур со стороны его собственного магнитного поля,

$$F_q = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L_{ii}}{\partial q}. \qquad (28,1')$$

Сила, действующая на проводник с током, возрастает с увеличением $\frac{\partial L_{ii}}{\partial q}$. Поскольку самоиндукция растет с увеличением размеров проводника, это означает, что собственное магнитное

поле стремится деформировать проводник так, чтобы его размеры увеличились.

В случае системы проводников рассмотрим сначала один подвижный контур, положение которого характеризуется координатой q_α. Конфигурацию и токи во всех остальных контурах, имеющихся в системе, будем считать заданными. Тогда сила, действующая на подвижный контур, равна

$$F_{q_\alpha}=\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\frac{1}{2}\sum_{i,k}L_{ik}(q_i, q_k)I_iI_k=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_k\frac{\partial L_{\alpha k}}{\partial q_\alpha}I_\alpha I_k+\frac{1}{2}\sum_i\frac{\partial L_{i\alpha}}{\partial q_\alpha}I_iI_\alpha=I_\alpha\sum\frac{\partial L_{\alpha k}}{\partial q_\alpha}I_k=\frac{I_\alpha}{c}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial q_\alpha}. \quad (28,2)$$

Неизменность положений всех, кроме α-го, контуров в пространстве отвечает заданному значению внешнего поля. При этом выводе мы воспользовались равенством (24,9) — определением потока индукции.

Если, в частности, обобщенная координата q_α представляет угол θ, характеризующий положение плоского контура с током во внешнем поле, то обобщенная сила F_θ является механическим моментом, действующим на контур:

$$M=\frac{I}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}.$$

Поток индукции через недеформируемый плоский контур, находящийся во внешнем поле $\boldsymbol{B}_0$, равен

$$\Phi=B_0S\cos\theta,$$

где S — площадь контура и θ — угол между $\boldsymbol{B}_0$ и нормалью к плоскости. Поэтому

$$M=-\frac{IS}{c}B_0\sin\theta. \quad (28,3)$$

Заметим, что обобщенная сила (28,2) в случае одного линейного проводника с током во внешнем магнитном поле сводится к силе Лоренца. Действительно, поскольку

$$\delta\Phi=\boldsymbol{B}[\delta\boldsymbol{q}\,\delta\boldsymbol{l}]=[\delta\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}]\,\delta\boldsymbol{q},$$

где $\delta\boldsymbol{q}$ — пространственное перемещение недеформируемого контура,

$$d\boldsymbol{F}=\frac{1}{c}I\,[d\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}]=\frac{1}{c}[d\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}]\,\boldsymbol{j}\,dS=\frac{1}{c}[\boldsymbol{j}\boldsymbol{B}]\,dV, \quad (28,4)$$

где $dV=dS\,dl$ — элемент объема проводника с током. Сила (28,4) является усредненной лоренцевой силой, в которой вместо поля в пустоте $\boldsymbol{H}$ стоит среднее магнитное поле в среде $\boldsymbol{B}$.

Рассмотрим теперь систему из двух проводников с током и найдем силу взаимодействия между ними. В этом случае в качестве обобщенной координаты q следует выбрать расстояние r_{12} между элементами обоих проводников dl_1 и dl_2.

Из определения коэффициента взаимной индукции (24,12) и (28,2) имеем

$$F = I_1 I_2 \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial r_{12}} \oint \oint \frac{dl_1\, dl_2}{r_{12}} = -\frac{\mu I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{r_{12}(dl_1\, dl_2)}{r_{12}^3}. \tag{28,5}$$

Пусть, в частности, оба тока текут в одном направлении в параллельных линейных проводниках. Тогда $dl_1 \| dl_2$ и сила F отвечает притяжению между проводниками.

Напротив, в случае токов, текущих в противоположном направлении, между проводниками возникает отталкивание.

Мы видим, что два «одноименных» тока стремятся сблизиться и усилить общее магнитное поле. В этом их отличие от одноименных статических зарядов, которые стремятся разойтись, ослабив электростатическое поле.

Рассмотрим еще вопрос о работе, которая совершается силой, смещающей контур с током. Согласно (28,2) эта работа равна

$$\delta W = F_{q_\alpha} \delta q_\alpha = \frac{I_\alpha}{c} \delta \Phi_\alpha. \tag{28,6}$$

На первый взгляд мы приходим к парадоксальному результату: работа δW выполнена силой, действующей на заряды со стороны магнитного поля. Последняя, однако, перпендикулярна скорости зарядов и не может производить над ними работы. В действительности, однако, написав формулу для работы, мы не учли явлений индукции, имеющих место в проводнике, движущемся в магнитном поле. При смещении проводника в нем индуцируется э. д. с. $E^{\text{инд}}$ и производится работа $\delta W'$ над зарядами:

$$\delta W' = \delta t \int jE^{\text{инд}}\, dV = I_\alpha \delta t \oint E^{\text{инд}}\, dl = -\frac{I_\alpha}{c} \delta \Phi_\alpha. \tag{28,7}$$

Полная работа, совершаемая магнитным полем над контуром с током,

$$\delta W + \delta W' = 0, \tag{28,8}$$

как этого и следовало ожидать.

Этот результат имеет вполне общий характер и может быть перенесен и на нелинейные проводники.

В заключение рассмотрим пример, наглядно иллюстрирующий достоинства метода Лагранжа,

Пусть имеются два контура: первый с заданным током I_1, вращающийся внутри другого под действием заданной силы F, второй — неподвижный. В последнем индуцируется ток, поступающий в цепь с большой нагрузкой. Емкостей в обоих контурах нет. Ясно, что такое устройство представляет динамомашину переменного тока. Первый контур именуется ротором, второй — статором.

Функция Лагранжа системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - U_{\text{мех}},$$

где α — угол поворота и I_0 — момент инерции ротора. Коэффициент взаимной индукции зависит от ориентации ротора и статора, т. е. от угла α.

Уравнение движения для обобщенной координаты—угла α — имеет вид

$$I_0 \ddot{\alpha} - I_1 I_2 \frac{dL_{12}}{d\alpha} = M_0, \tag{28,9}$$

где $M_0 = -\frac{\partial U_{\text{мех}}}{\partial \alpha}$ — момент вращающей силы.

Уравнение движения для обобщенной координаты — заряда Q_2 — уравнение тока в статоре, согласно (27,5) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial I_2} = -R_2 I_2,$$

или

$$\frac{d}{dt}(L_{22} I_2 + L_{12} I_1) = -R_2 I_2,$$

откуда

$$L_{22} \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + L_{12} \frac{dI_1}{dt} + I_1 \frac{dL_{12}}{dt} = 0. \tag{28,10}$$

Состояние системы должно быть найдено из совместного решения уравнений (28,9) и (28,10).

Считая сопротивление R_2 весьма большим (большая нагрузка в цепи статора), с точностью до членов порядка $\frac{1}{R_2}$, можно приближенно написать

$$I_2 \approx -\frac{I_1}{R_2} \frac{dL_{12}}{dt} = -\frac{I_1}{R_2} \frac{dL_{12}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt}. \tag{28,11}$$

При этом мы пренебрегли в (28,10) малыми слагаемыми, не содержащими R_2. Подставляя (28,11) в (28,9), получаем

$$I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{I_1^2}{R_2} \left(\frac{dL_{12}}{d\alpha}\right)^2 \frac{d\alpha}{dt} = M_0.$$

В квазистационарном состоянии можно пренебречь, как малым, членом с угловым ускорением $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, поскольку последнее мало. Тогда для угловой скорости вращения находим

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{M_0 R_2}{I_1^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dL_{12}}{d\alpha}\right)^2} = \text{const}. \tag{28,12}$$

Выражения (28,11) и (28,12) дают решение поставленной задачи На практике обычно применяются более сложные схемы, например машины с самовозбуждением, в которых индуцированный ток I_2 вводится в первый контур, и т. п

Мы оставили также без рассмотрения важные особенности реальных машин, связанные с существованием в них намагничивающихся сердечников. Разобранный пример иллюстрирует лишь достоинства метода Лагранжа в случае систем, в которых механическое движение и текущие токи непосредственно связаны между собой.

§ 29. Флуктуации в проводниках и формула Найквиста

В результате флуктуационных процессов в электрической цепи возникают флуктуации тока, которые в технике именуют шумами Физически появление флуктуационных токов в проводнике (в отсутствие сторонней э. д. с.) связано с флуктуациями числа электронов, движущихся в одном направлении. В присутствии сторонней э. д. с. флуктуационные токи накладываются на стационарный или квазистационарный ток.

Флуктуации тока в радиоаппаратуре имеют огромное значение в современной радиотехнике Шумовой фон определяет предельную чувствительность сигнала при однократном приеме. Дальнейшее повышение точности может быть достигнуто лишь применением многократных измерений,

Мы рассмотрим теорию флуктуаций в электрической цепи с индуктивностью L и омическим сопротивлением R. Флуктуационные процессы можно характеризовать случайной флуктуационной э. д. с. $\mathscr{E}(t)$. Изменения э. д. с. $\mathscr{E}(t)$ происходят за время, которое весьма мало по сравнению со временем релаксации контура $T = L/R$.

Естественно пытаться описать процессы, происходящие в цепи с помощью обобщенного закона Ома:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathscr{E}(t). \tag{29,1}$$

В основу уравнения (29,1) положено довольно естественное допущение: между случайным током в цепи и создающей его

случайной э. д. с. существует такая же связь, как между обычным током и обычной э. д. с. Релаксация тока характеризуется постоянным сопротивлением R. Следует подчеркнуть, что фактически при высоких частотах R (или $\sigma = 1/R$) оказывается функцией частоты. Это обстоятельство не отражается, однако, на общих результатах теории.

Случайная э. д. с. $\mathscr{E}(t)$ имеет, очевидно, следующие свойства:

$$\overline{\mathscr{E}(t)} = 0, \qquad \overline{[\mathscr{E}(t)]^2} \neq 0. \tag{29,2}$$

Проинтегрируем формально линейное уравнение (29,1) по времени. Тогда для случайного тока

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{T}} + e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\frac{t'}{T}} \mathscr{E}(t')\, dt. \tag{29,3}$$

Следует заметить, что интегрирование уравнения (29,1) со случайной функцией в правой части нуждается в известном оправдании с чисто математической точки зрения. За деталями этого вопроса мы отсылаем читателя к специальной литературе [1]).

С помощью формулы (29,3) можно составить коррелятивную функцию

$$\langle i(t)\, i(t+\tau)\rangle = \left\langle \left[i_0 e^{-\frac{t}{T}} + e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\frac{t'}{T}} \mathscr{E}(t')\, dt' \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[i_0 e^{-\frac{t+\tau}{T}} + e^{-\frac{t+\tau}{T}} \int_0^{t+\tau} \exp\left\{\frac{t''}{T}\right\} \mathscr{E}(t'')\, dt'' \right] \right\rangle =$$

$$= i_0^2 \exp\left\{-\frac{2t+\tau}{T}\right\} + \exp\left\{-\frac{2t+\tau}{T}\right\} \times$$

$$\times \int_0^t \int_0^{t+\tau} \exp\left\{\frac{t'+t''}{T}\right\} \cdot \langle \mathscr{E}(t')\, \mathscr{E}(t'')\rangle\, dt'\, dt''. \tag{29,4}$$

Члены, содержащие случайную функцию $\mathscr{E}(t)$ в первой степени, обращаются в нуль при усреднении.

Двойной интеграл в (29,4) можно вычислить следующим образом: вводя новые переменные

$$x = t' + t''; \qquad y = t' - t'',$$

---

[1]) См., например, Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, Гостехиздат, 1948; Д. Мак-Доналд, Введение в физику шумов и флуктуаций, «Мир», 1964.

имеем

$$I(t,\ \tau)=\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{2t+\tau}{T}\right\}\int\limits_0^{2t}e^{\frac{x}{T}}\,dx\int\limits_{-t}^{t}\left\langle\mathscr{E}\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathscr{E}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\rangle dy.$$

Коррелятивная функция $\left\langle\mathscr{E}\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathscr{E}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\rangle$, согласно (29,4), не может зависеть от выбора переменной x. Полагая $x=y$, имеем

$$\left\langle\mathscr{E}\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathscr{E}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\rangle\equiv\langle\mathscr{E}(0)\,\mathscr{E}(y)\rangle.$$

Поскольку коррелятивная функция быстро убывает с ростом y, можно распространить пределы интегрирования до бесконечности, так что

$$I(t,\ \tau)=\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{2t+\tau}{T}\right\}\cdot\int\limits_0^{2t}e^{\frac{x}{T}}\,dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\mathscr{E}(0)\,\mathscr{E}(y)\rangle\,dy=$$
$$=\frac{T}{2}e^{-\frac{\tau}{T}}\left(1-e^{-\frac{2t}{T}}\right)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\mathscr{E}(0)\,\mathscr{E}(y)\rangle\,dy.$$

Окончательно находим

$$\langle i(t)\,i(t+\tau)\rangle=i_0^2\exp\left\{-\frac{2t+\tau}{T}\right\}+$$
$$+\frac{T}{2}e^{-\frac{\tau}{T}}\left(1-e^{-\frac{2t}{T}}\right)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle\mathscr{E}(0)\,\mathscr{E}(y)\rangle\,dy. \qquad (29{,}5)$$

Полагая $t=0$, из (29,5) получаем коррелятивную функцию для тока

$$\langle i(0)\,i(\tau)\rangle=i_0^2e^{-\frac{\tau}{T}}. \qquad (29{,}6)$$

Пользуясь законом равнораспределения, можно написать среднее значение флуктуационного тока энергии в цепи:

$$\frac{Li_0^2}{2}=\frac{kT}{2}=\frac{\theta}{2},$$

так что окончательно автокорреляционная функция для тока приобретает вид

$$\langle i(0)\,i(\tau)\rangle=\frac{\theta}{L}e^{-\frac{\tau}{T}}. \qquad (29{,}7)$$

С другой стороны, полагая $\tau = 0$, находим

$$\langle i(t)^2 \rangle = i_0^2 e^{-\frac{2t}{T}} + \frac{T}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{T}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y) \rangle \, dy.$$

При значениях $t \gg T$ в системе должно установиться статистическое равновесие. Опуская, как малые, величины $e^{-\frac{2t}{T}}$, находим

$$\langle i(t)^2 \rangle = \frac{\theta}{L} = \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y) \rangle \, dy,$$

откуда находим, подставляя $T = \frac{L}{R}$:

$$R = \frac{L^2}{2\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y) \rangle \, dy. \tag{29,8}$$

Формула (29,8) связывает между собой автокоррелятивную функцию случайной э. д. с. с сопротивлением линии. Это соотношение имеет глубокий смысл: оно связывает характеристику обратимых случайных процессов — коррелятивную функцию $\langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y) \rangle$ с характеристикой необратимого диссипативного процесса — сопротивлением R или временем релаксации T

$$\frac{1}{T} = \frac{L}{2\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y) \rangle \, dy. \tag{29,9}$$

Если воспользоваться формулой Винера—Хинчина (5,16) ч. III, то можно выразить коррелятивную функцию через спектральную плотность:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathscr{E}(0)\mathscr{E}(y) \rangle \, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int e^{-i\omega y} g(\omega) \, d\omega \, dy = g(0) \tag{29,10}$$

и, следовательно,

$$R = \frac{L^2}{2\theta} g(0). \tag{29,11}$$

Эта формула является частным случаем важной флуктуационно-диссипативной теоремы, устанавливающей связь между характеристиками флуктуационных и диссипативных процессов (см. ч. VI).

В формуле (29,1) мы ограничились случаем, когда сопротивление можно считать не зависящим от частоты. Вопрос о связи флуктуационных и необратимых процессов будет по-

дробно разобран в гл. VII ч. VI, посвященной физической кинетике. Вернемся к автокоррелятивной функции для тока и, воспользовавшись теоремой Винера — Хинчина, найдем с ее помощью спектральную плотность случайных токов в цепи.

Именно, согласно (5,15) ч. III и (29,11), можем написать

$$g_i(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle i(0)\,i(\tau)\rangle\, e^{-i\omega\tau}\,d\tau, \qquad (29,12)$$

где спектральная плотность тока $g_i(\omega)$ определена формулой

$$\overline{i^2}=\int_0^{\infty} g_i(\omega)\,d\omega. \qquad (29,13)$$

Подставляя в (29,12) выражение для $\langle i(0)i(\tau)\rangle$ из (29,7), находим

$$g_i(\omega)=\frac{\theta}{\pi L}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T}}\cos\omega\tau\,d\tau=\frac{\theta}{\pi R}\,\frac{1}{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}. \qquad (29,14)$$

В металлах обычно $T=\frac{R}{L}\sim 10^{-13}$ *сек* и можно написать в хорошем приближении

$$g_i(\omega)\sim\frac{\theta}{\pi R}. \qquad (29,15)$$

Таким образом, значение среднеквадратичное тока в замкнутой цепи, генерируемого случайной э. д. с. в интервале частот ω, $\omega+d\omega$, можно написать в виде

$$\overline{i^2}\,d\omega=\frac{\theta}{\pi R}\,d\omega. \qquad (29,16)$$

В случае незамкнутой цепи вместо (29,16) можно написать для самопроизвольных флуктуаций э. д. с. соотношение

$$\overline{\mathscr{E}^2}\,d\omega=\frac{\theta R}{\pi}\,d\omega. \qquad (29,17)$$

Формулы (29,17) и (29,16) называют формулами Найквиста. Они позволяют при расчете квазистационарных линий учитывать флуктуационные явления (например, флуктуационную э. д. с.) наряду с другими макроскопическими характеристиками.

Согласно (29,16) флуктуационный ток пропорционален $\sqrt{\theta}$ и обратно пропорционален $1/\sqrt{R}$. Последнее имеет простой смысл. Сопротивление $R=1/\sigma\sim 1/n$, где n — число электронов в 1 $см^3$. В соответствии с общей формулой (3,7) ч. III среднее значение $\sqrt{\overline{i^2}}\sim\sqrt{n}$.

Приведенный выше вывод содержал существенное ограничение: сопротивление считалось не зависящим от частоты. В части VI мы вернемся к обсуждению формулы Найквиста в области высоких частот. Будут учтены, в частности, квантовые эффекты, проявляющиеся при частотах $\omega > \frac{kT}{h} \equiv \frac{\theta}{h}$.

В полупроводниковых устройствах имеются дополнительные специфические механизмы возникновения шумов, которые также будут обсуждены в ч. VI.

§ 30. Скин-эффект

Мы изучали до сих пор квазистационарный ток в линейных цепях, считая проводники бесконечно тонкими. Теперь мы рассмотрим распределение переменного тока по сечению проводника. Предполагая по-прежнему выполненными условия квазистационарности, запишем уравнения Максвелла в однородной проводящей среде:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0.$$

Легко получить раздельные уравнения для электрического и магнитного полей. Взяв повторно ротор от $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$, находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E} = -\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \boldsymbol{H},$$

или

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (30,1)$$

Такое же уравнение получается и для магнитного поля.

Уравнение (30,1) и аналогичное уравнение для вектора $\boldsymbol{H}$ определяют зависимость полей от времени и координат в пространстве, занятом проводником. На границе этого пространства, т. е. на поверхности проводника, векторы поля удовлетворяют обычным граничным условиям.

Мы ограничимся решением уравнений поля в простейшем случае переменного тока, текущего в проводнике, заполняющем полупространство $z > 0$. Направление тока вдоль оси x и его зависимость от времени считаются заданными:

$$j_x = j(z)\, e^{i\omega t}; \quad j_y = j_z = 0.$$

Заметим, что j_x не может зависеть от координаты x в силу уравнения непрерывности, которое дает

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = 0.$$

В соответствии с законом Ома ищем электрическое поле, удовлетворяющее уравнению (30,1), в виде

$$E_x = E(z)\, e^{i\omega t}; \quad E_y = E_z = 0. \qquad (30,2)$$

Подстановка (30,2) в (30,1) дает

$$\frac{d^2E(z)}{dz^2} = i\,\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}\,E(z). \qquad (30,3)$$

Общим решением последнего уравнения служит

$$E(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz},$$

где

$$k = \sqrt{i\,\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}}.$$

Введем обозначение

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}. \qquad (30,4)$$

Тогда

$$E(z) = Ae^{-i\frac{z}{\delta}}e^{-\frac{z}{\delta}} + Be^{i\frac{z}{\delta}}e^{\frac{z}{\delta}}.$$

Величина B должна быть, очевидно, положена равной нулю, чтобы поле имело всюду конечное значение.

Таким образом, окончательно

$$E_x = Ae^{-\frac{z}{\delta}}e^{-i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t\right)}. \qquad (30,5)$$

Формула (30,5) показывает, что напряженность электрического поля убывает экспоненциально в глубь проводника.

Эффективное уменьшение напряженности поля (уменьшение в «e» раз) происходит на расстоянии δ от поверхности.

Зная распределение электрического поля в проводнике, можно найти распределение магнитного поля.

Имеем, очевидно:

$$-i\,\frac{\mu\omega}{c}\,H_y = \mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\,\frac{(i+1)}{\delta}\,E_x,$$

$$H_x = H_z = 0.$$

Отсюда

$$H_y = (1-i)\,\frac{c}{\mu\omega\delta}\,Ae^{-i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t\right)}e^{-\frac{z}{\delta}}. \qquad (30,6)$$

Магнитное поле оказывается перпендикулярным электрическому. Оно убывает в глубь проводника по тому же закону, что и электрическое; по абсолютной величине $|H_y| \approx \frac{c}{\omega\delta}|E_x|$, т. е. больше электрического в $\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)$ раз.

Таким образом, электромагнитное поле и соответственно весь ток в проводнике оказываются локализованными в тонком поверхностном слое толщиной порядка δ. Локализация поля в тонком поверхностном слое проводника называется скин-эффектом (от англ. skin — кожа), а величина δ — толщиной скин-слоя или глубиной проникновения.

Нетрудно видеть, что все джоулево тепло $\frac{j^2}{\sigma}$ выделяется в области скин-слоя.

Из определения δ ясно, что ее числовое значение может изменяться в широких пределах для различных частот ω и проводимостей σ. Чтобы представить порядок величин, укажем, что для меди $\delta \approx 1$ *см* при частоте 50 *гц* и $\delta \approx 3 \cdot 10^{-3}$ *см* для частот $\sim 10^5$ *гц*.

При $\omega \to 0$, т. е. при переходе к постоянному току, $\delta \to \infty$ и скин-эффект исчезает. Ток равномерно распределяется по сечению проводника. Напротив, при формальном переходе к пределу $\sigma \to \infty$ толщина скин-слоя стремится к нулю. Это — идеальный проводник, в который переменное поле не проникает в такой же мере, как и постоянное.

Результат, полученный нами для случая упрощенной модели проводника, имеет совершенно общий характер. При любой геометрической конфигурации проводников поле в них оказывается локализованным в скин-слое.

Если распределение обусловлено геометрическими свойствами проводника, то задача о нахождении поля в проводнике лишь незначительно усложняется по сравнению с разобранным примером. Так, в случае тока, текущего по длинному кабелю кругового сечения, сплошному или полому, вектор плотности тока направлен параллельно образующей кабеля. Поэтому общий ход решения задачи о нахождении распределения поля в кабеле совпадает с разобранным нами примером. Для глубины проникновения получается то же числовое значение. Геометрическое распределение поля сравнительно мало отличается от экспоненциального спадания, особенно при больших частотах, когда радиус кабеля велик по сравнению с глубиной проникновения. В общем случае массивного проводника произвольной формы нахождение распределения переменного поля представляет задачу, сложную в математическом отношении[1]).

[1]) См. В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, 1954, гл. XI.

Однако независимо от формы проводника и даже механизма возбуждения в нем поля (с помощью сторонней э. д. с., внешним переменным магнитным полем и т. п.) общий вывод остается в силе: переменное электромагнитное поле проникает в проводник на глубину скин-слоя δ. При этом магнитное поле больше электрического в отношении $\frac{\lambda}{\delta}$.

Аналогичные результаты можно получить при рассмотрении другой проблемы. Пусть на металл действует — переменное электромагнитное поле, зависящее от времени по закону $e^{i\omega t}$.

Если магнитное поле у поверхности проводника $z = 0$ имеет значение H_0 граничное условие (5,4) позволяет сформулировать краевую задачу

$$\frac{\partial^2 H(z, t)}{\partial z^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial H(z, t)}{\partial t}$$

$$H = H_0 \quad \text{при} \quad z = 0$$

$$H \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Решение краевой задачи может быть написано аналогично (30,5)

$$H(z, t) = H_0 e^{i\omega t} e^{-\frac{z}{\delta}},$$

где толщина скин-слоя δ дается формулой (30,4).

Следует подчеркнуть, что скин-эффект становится все более резко выраженным при переходе к высоким частотам. Мы увидим в следующей главе, что в полях высокой частоты, когда поля нельзя более считать квазистационарными, по-прежнему имеет место скин-эффект, хотя глубина проникновения оказывается, вообще говоря, иной (см. § 33). Скин-эффект играет большую роль в технике переменных токов. Он позволяет применять полые кабели или кабели, покрытые слоем металла с особенно высокой проводимостью, что снижает расход материалов и мощностей.

§ 31. Электромагнитные волны в однородной изотропной среде

Рассмотрим распространение электромагнитного поля в пространственно однородной и изотропной среде, характеризуемой материальными постоянными ε_0, μ_0 и σ в среде без пространственной дисперсии. Индекс нуль означает, что материальные постоянные имеют статическое значение и отнесены к частоте $\omega = 0$. Ниже мы обсудим условия применимости этого допущения.

Среду мы будем считать неферромагнитной ($\mu_0 = 1$). Мы видели выше, что у металлов глубина проникновения поля весьма мала даже при сравнительно невысоких частотах. Поэтому не имеет смысла рассматривать распространение электромагнитного поля внутри металла. Однако такое рассмотрение уместно в средах с меньшими, чем у металлов, значениями проводимости: в полупроводниках или растворах электролитов. В предельном случае $\sigma \to 0$ мы перейдем к случаю идеальных диэлектриков. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{31,1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{31,2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \tag{31,3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{31,4}$$

Взяв ротор от первого уравнения и учитывая последнее, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -\Delta \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{E},$$

или, пользуясь (31,2),

$$\Delta \boldsymbol{H} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{31,5}$$

Поступая аналогично с (31,2), легко прийти к уравнению

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{31,6}$$

Будем пытаться искать решения уравнения (31,5), (31,6) в виде плоских монохроматических волн, распространяющихся вдоль оси абсцисс. Положим, что решения (31,5), (31,6) имеют вид

$$\boldsymbol{H}(x, t) = \boldsymbol{H}_0(x)\, e^{i\omega t}, \tag{31,7}$$

$$\boldsymbol{E}(x, t) = \boldsymbol{E}_0(x)\, e^{i\omega t}. \tag{31,8}$$

Подставляя (31,7) в (31,5), находим

$$\frac{d^2 \boldsymbol{H}_0(x)}{dx^2} + k^2 \boldsymbol{H}_0(x) = 0, \tag{31,9}$$

где через k обозначена комплексная величина

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0 - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}}. \tag{31,10}$$

Введем важное понятие комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ в проводящей среде, определив ее соотношением

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)} = k_0\sqrt{\varepsilon(\omega)}, \tag{31,11}$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$ — волновое число в вакууме. Из (31,10) следует, что

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{31,12}$$

Эта важная формула устанавливает связь между диэлектрической проницаемостью и проводимостью. Представим, далее, комплексную величину $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ в виде

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n - i\varkappa. \tag{31,13}$$

Величины n и $\varkappa$ называются, соответственно, коэффициентами преломления и поглощения. Знак перед $\varkappa$ выбирается так, чтобы мнимая часть k была существенно отрицательна (при $\varkappa > 0$). Причина такого выбора очевидна из дальнейшего.

Решение (31,7) имеет вид

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}_1 e^{-k_0\varkappa x} e^{i(\omega t - k_0 n x)}, \tag{31,14}$$

где вектор $\boldsymbol{A}_1$ — комплексная амплитуда. Аналогично для электрического поля можно написать

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_2 e^{-k_0\varkappa x} e^{i(\omega t - k_0 n x)}. \tag{31,15}$$

В случае произвольного направления распространения векторы поля можно представить в виде

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}_1 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \tag{31,16}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_2 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \tag{31,17}$$

где $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор, $\boldsymbol{k} = k\cdot\boldsymbol{k}_0$, $\boldsymbol{k}_0$ — единичный вектор в направлении распространения волны. Связь между векторами $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$ можно определить, подставляя их выражения в (31,2):

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -i[\boldsymbol{kE}] = -ik[\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{E}] = -i\frac{\omega}{c}\sqrt{n^2-\varkappa^2}[\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{E}]\,e^{-i\,\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{n}},$$

откуда находим

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{n^2+\varkappa^2}[\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{E}]\,e^{-i\,\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{n}}. \tag{31,18}$$

В отличие от случая распространения электромагнитных волн в вакууме, амплитуды электрического и магнитного полей оказываются различными. Однако, как и в вакууме, электромагнитные волны в однородной и изотропной среде являются

поперечными. Действительно, подставляя (31,16) и (31,17) в (31,3) и (31,4), находим

$$(\boldsymbol{kE}) = (\boldsymbol{kH}) = 0. \qquad (31,1)$$

Формулы (31,16)—(31,19) показывают, что уравнения Максвелла в однородной и изотропной среде, как и в вакууме, допускают решения в виде плоских поперечных волн с волновым числом k и произвольной частотой ω. Однако в среде происходит затухание волн по экспоненциальному закону. Эффективность затухания определяется величиной $\varkappa$. Найдем значения n и $\varkappa$ из (31,12), (31,13). Возводя (31,13) в квадрат, приравнивая (31,12) и разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\left.\begin{aligned} n^2 - \varkappa^2 &= \varepsilon_0, \\ \varkappa n &= \frac{2\pi\sigma}{\omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (31,20)$$

Решение (31,20) дает

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_0^2 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} + \varepsilon_0\right)}, \qquad (31,21)$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_0^2 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} - \varepsilon_0\right)}. \qquad (31,22)$$

Знаки корней выбираются так, чтобы n и $\varkappa$ имели вещественные значения и, кроме того, $\varkappa$ было положительным.

Формулы (31,21), (31,22) определяют закон дисперсии в среде с проводимостью. Следует заметить, что при достаточно высоких частотах проводимость σ также оказывается зависящей от частоты.

Рассмотрим предельные случаи формул (31,21) и (31,22). Если имеет место неравенство

$$\sigma \ll \frac{\varepsilon_0\omega}{4\pi}, \qquad (31,23)$$

то это означает, что ток проводимости $\sigma \boldsymbol{E}$ мал по сравнению с током смещения $\frac{\varepsilon_0}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \sim \frac{\varepsilon_0\omega}{4\pi}\boldsymbol{E}$. Это имеет место как в идеальных диэлектриках (у которых $\sigma \to 0$), так и у реальных диэлектриков, обладающих весьма низкой проводимостью, а также у проводников неметаллического типа (полупроводники, электролиты) при достаточно высоких частотах.

В этом случае формулы (31,21) и (31,22) можно упростить, представив их в виде

$$n \simeq \sqrt{\varepsilon_0}, \qquad (31,24)$$

$$\varkappa \simeq \frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}}. \qquad (31,25)$$

При этом, в силу неравенства (31,23), имеет место также неравенство

$$n \gg \varkappa.$$

Если полностью пренебречь величиной $\varkappa$, которая, строго говоря, равна нулю только в идеальном диэлектрике, то среду называют прозрачной. В прозрачной среде формулы для векторов поля упрощаются и приобретают вид

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \tag{31,26}$$

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{\varepsilon_0}\, \boldsymbol{A} e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}, \tag{31,27}$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{v} \boldsymbol{k}_0, \tag{31,28}$$

где v — фазовая скорость распространения волн,

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{31,29}$$

Последняя формула оправдывает название величины n. Действительно, как известно (см. § 37), показателем преломления именуют отношение скоростей распространения электромагнитных волн в вакууме и в среде

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_0}. \tag{31,30}$$

Электромагнитные волны в непроводящей среде отличаются от волн в вакууме только скоростью распространения, которая меньше скорости света c в пустоте в $\sqrt{\varepsilon_0}$ раз. Кроме того, амплитуды электрического и магнитного полей относятся друг к другу как

$$\frac{|\boldsymbol{H}|}{|\boldsymbol{E}|} = \sqrt{\varepsilon_0} = n. \tag{31,31}$$

Полученные соотношения, установленные Максвеллом, играли важную историческую роль в теории электромагнитного поля. В частности, формула (31,30) установила связь между электромагнитными и оптическими явлениями, которые до работ Фарадея и Максвелла считались совершенно независимыми.

Формула (31,30) была подвергнута широкой экспериментальной проверке для большого числа жидкостей и газов. Было обнаружено хорошее согласие с опытом для ряда жидкостей и газов в видимой и инфракрасной частях спектра. Однако соотношение (31,30) совершенно не выполняется для жидкостей (например, воды) и газов, молекулы которых имеют значительный собственный дипольный момент. Другие ограничения

применимости (31,30) связаны с существенным поглощением и дисперсией.

В случае слабого поглощения удобно представить $\sqrt{\varepsilon}$ в виде

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = \sqrt{n^2+\varkappa^2}\, e^{-i \operatorname{arctg} \frac{\varkappa}{n}} \tag{31,32}$$

и записать формулы для векторов поля в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} e^{-\varkappa \boldsymbol{k}_0 \boldsymbol{r}} e^{i(\omega t - n \boldsymbol{k}_0 \boldsymbol{r})}, \tag{31,33}$$

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{n^2+\varkappa^2}\, [\boldsymbol{k}_0 \boldsymbol{E}]\, e^{-i \operatorname{arctg} \frac{\varkappa}{n}}. \tag{31,34}$$

Напряженность магнитного поля отстает от напряженности электрического поля по фазе на величину $\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{n}$.

Найдем еще среднюю (по времени) плотность энергии электромагнитного поля в слабопоглощающей среде. Имеем, очевидно,

$$\overline{\frac{\varepsilon_0}{8\pi} E^2} = \frac{\varepsilon_0 A^2}{16\pi} e^{-2\varkappa x},$$

$$\frac{\overline{H^2}}{8\pi} = \frac{n^2+\varkappa^2}{16\pi} A^2 e^{-2\varkappa x} \simeq \frac{\varepsilon_0 A^2}{16\pi} e^{-2\varkappa x},$$

поскольку $n^2+\varkappa^2 \simeq n^2 = \sqrt{\varepsilon_0}$. Как и в вакууме, энергия электрического и магнитного полей в волне близки друг к другу.

Рассмотрим теперь обратный предельный случай, когда ток проводимости велик по сравнению с током смещения. Формально этот случай сразу получается из формул для дисперсии при низких частотах и большой проводимости. Имеем, очевидно,

$$\varkappa \cong \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \tag{31,35}$$

$$n \simeq \varkappa \simeq \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}. \tag{31,36}$$

Как показывает сравнение (31,35) с (31,4), затухание поля в среде происходит на толщине скин-слоя. Это — случай большого поглощения.

Ясно, однако, что последние формулы имеют несколько условный характер, поскольку трудно говорить о распространении волн, если они затухают на толщине скин-слоя.

В заключение напишем закон сохранения энергии в среде с частотной дисперсией. Считая среду находящейся в состоянии термодинамического равновесия при постоянной температуре,

можно написать для изменения внутренней энергии в единице объема

$$\frac{dU_0}{dt}=\frac{dQ}{dt}+\frac{dW}{dt}=\frac{dQ}{dt}+\frac{E}{8\pi}\frac{dD}{dt}. \qquad (31,37)$$

Усредним равенство (31,37) по времени, считая, что температура поддерживается постоянной. При этом в среднем энергия среды в периодическом внешнем поле остается постоянной, так что для выделения тепла получаем

$$\overline{\frac{dQ}{dt}}=-\overline{\frac{E}{8\pi}\frac{dD}{dt}}.$$

Полагая

$$D=[\varepsilon_1(\omega)+i\varepsilon_2(\omega)](E_0\cos\omega t+iE_0\sin\omega t),$$

имеем

$$\overline{\frac{dQ}{dt}}=\frac{\varepsilon_2\omega E_0^2}{8\pi}. \qquad (31,38)$$

Таким образом, в среде происходит выделение тепла, определяемое величиной $\varepsilon_2(\omega)$. Формула (31,38) имеет смысл, если это выделение тепла происходит так, чтобы оно успевало отводиться и температура среды поддерживалась постоянной. Поскольку тепло только выделяется, $Q\geqslant 0$ всегда и, соответственно,

$$\varepsilon_2\geqslant 0. \qquad (31,39)$$

Знак $\varepsilon_1(\omega)$ может быть как положительным, так и отрицательным.

ГЛАВА V

ПОЛЯ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

§ 32. Дисперсионные соотношения

Мы указывали уже в § 6, что при высоких частотах, когда частота излучения сравнима с его характерными атомными частотами, а его длина волны сравнимой с размерами пространственных неоднородностей в среде, наступает явление дисперсии.

В случае однородной и изотропной среды общую формулу (6,5) можно представить в виде

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)=\int_{-\infty}^{t} dt' \int \varepsilon(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, t-t')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}', t')\,dV'. \tag{32,1}$$

Функция $\varepsilon(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, t-t')$ зависит только от модуля разности координат, поскольку в однородной среде нет выделенных точек. Вклад в ε дает изменение поляризации, которое за время $t-t'$ передается на расстояние $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$. Интеграл берется только по прошедшему, чтобы удовлетворить принципу причинности. Очевидно, что $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|<c(t-t')$, но для простоты мы не будем учитывать это ограничение[1]).

Разложим электрическое поле и индукцию в интеграл Фурье:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)\,e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}\,d\boldsymbol{k}\,d\omega, \tag{32,2}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega)\,e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}\,d\boldsymbol{k}\,d\omega. \tag{32,3}$$

Тогда, подставляя в (32,1), находим

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega)=\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{32,4}$$

---

[1]) См. М. А. Леонтович, ЖЭТФ, 907 (1961).

где обозначено

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{t} dt \int \varepsilon(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, t-t') e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} e^{+i\omega(t-t')} dV' =$$

$$= \int_{0}^{\infty} d\tau \int \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, \tau) e^{-i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}-\omega\tau)} d\boldsymbol{R}. \quad (32,5)$$

При этом введены новые переменные $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ и $\tau=t-t'$. Введенная нами функция $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ не является фурье-образом $\varepsilon(k, \tau)$, поскольку интеграл по τ берется в пределах от нуля до бесконечности. Именно функция $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ (а не $\varepsilon(|\boldsymbol{R}|, \tau)$ имеет основное значение, поскольку согласно (32,4) она связывает между собой векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$; она называется диэлектрической проницаемостью, зависящей от частоты и волнового вектора.

Заметим, что зависимость $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ от волнового вектора $\boldsymbol{k}$ связана с зависимостью $\varepsilon(|\boldsymbol{R}|, \tau)$ от пространственных координат $\boldsymbol{R}$, т. е. с учетом пространственной дисперсии.

Если длина волны мала по сравнению с пространственными неоднородностями, то можно считать диэлектрическую проницаемость функцией только от $(t-t')$ и вместо (32,5) написать более простое соотношение:

$$\varepsilon(\omega) = \int_{0}^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (32,6)$$

в котором диэлектрическая проницаемость зависит только от частоты. При этом соотношение (32,4) упрощается и превращается в

$$\boldsymbol{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \boldsymbol{E}(\omega). \quad (32,7)$$

Подчеркнем, что если диэлектрическая проницаемость зависит от частоты, то именно уравнение (32,7) является правильной формой записи уравнения связи. Часто приводимое в старых руководствах соотношение

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon(\omega) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t),$$

где $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ — сами векторы, а не их фурье-амплитуды, как в (32,7), не имеет никакого смысла. Если ε является функцией частоты, то в равенстве (32,7) должны стоять величины, относящиеся к той же частоте.

Функция $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ является, вообще говоря, комплексной и может быть записана в виде

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon^{\text{re}}(\boldsymbol{k}, \omega) + i\varepsilon^{\text{im}}(\boldsymbol{k}, \omega). \tag{32,8}$$

Очевидно, что вещественная и мнимая части

$$\varepsilon^{\text{re}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) + \varepsilon^*(\boldsymbol{k}, \omega)}{2}, \tag{32,9}$$

$$\varepsilon^{\text{im}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) - \varepsilon^*(\boldsymbol{k}, \omega)}{2i}. \tag{32,10}$$

Кроме того, из определения (32,5) следует, что

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon^*(-\boldsymbol{k}, -\omega). \tag{32,11}$$

Подставляя в (32,9) выражение (23,5), с учетом (32,11) находим

$$\varepsilon^{\text{re}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)\, e^{-i(\boldsymbol{kR}-\omega\tau)}\, d\boldsymbol{R}. \tag{32,12}$$

Аналогично

$$\varepsilon^{\text{im}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{2i}\int\limits_{0}^{\infty} d\tau \int \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)\, e^{-i(\boldsymbol{kR}-\omega\tau)}\, d\boldsymbol{R} -$$

$$- \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \int \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)\, e^{-i(\boldsymbol{kR}-\omega\tau)}\, d\boldsymbol{R} =$$

$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)\, e^{-i(\boldsymbol{kR}-\omega\tau)} \operatorname{sgn}(\tau)\, d\boldsymbol{R}, \tag{32,13}$$

где знаковая функция $\operatorname{sgn}\tau$ определена по формуле (III, 16). Мы видим, что как вещественная, так и мнимая части $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ выражаются через $\varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)$ по формулам (32,12) и (32,13), поэтому их можно связать между собой.

Именно, поскольку формула (32,13) представляет фурье-преобразование $\varepsilon(|\boldsymbol{R}|, \tau)$, обращая это преобразование, находим

$$\operatorname{sgn}(\tau)\, \varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|) = \frac{2i}{(2\pi)^4}\int\int \varepsilon^{\text{im}}(\boldsymbol{k}', \omega)\, e^{i(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{R}-\omega'\tau)}\, d\boldsymbol{k}'\, d\omega'. \tag{32,14}$$

Подставляя значение $\varepsilon(|\boldsymbol{R}|, |\tau|)$ из (32,14) в (32,13), находим

$$\varepsilon^{\text{re}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d\omega' \int d\boldsymbol{k}' \int d\boldsymbol{R} \varepsilon^{\text{im}}(\boldsymbol{k}', \omega') \operatorname{sgn}(\tau) \times$$

$$\times e^{i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\boldsymbol{R}} e^{-i(\omega-\omega')\tau} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\omega' \, d\boldsymbol{k}' \times$$

$$\times \varepsilon^{\text{im}}(\boldsymbol{k}', \omega') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')\tau} \operatorname{sgn}\tau \, d\tau \int e^{i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\boldsymbol{R}} d\boldsymbol{R} =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')\tau} \operatorname{sgn}\tau \, d\tau \int e^{\text{im}}(\boldsymbol{k}', \omega') \delta(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}) \, d\boldsymbol{k} =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int d\omega' \varepsilon^{\text{im}}(\boldsymbol{k}, \omega') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')\tau} \operatorname{sgn}(\tau) \, d\tau.$$

Внутренний интеграл можно вычислить, воспользовавшись формулой (III, 17) для $\operatorname{sgn}(\tau)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\tau) e^{-i(\omega-\omega')\tau} d\tau = \frac{i}{\pi} \frac{1}{\omega-\omega'},$$

откуда

$$\varepsilon^{\text{re}}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\varepsilon^{\text{im}}(\boldsymbol{k}, \omega')}{(\omega-\omega')} d\omega'. \tag{32,15}$$

Интеграл в формуле (32,15) берется в смысле главного значения. Совершенно аналогичные вычисления — обращение формулы (32,12) и подстановка в (32,13) — дает

$$\varepsilon^{\text{im}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\varepsilon^{\text{re}}(\boldsymbol{k}, \omega')}{(\omega-\omega')} d\omega'. \tag{32,16}$$

Формулы (32,15) и (32,16) носят название формул Крамерса — Кронига, или дисперсионных соотношений. Они связывают между собой вещественную и мнимую части диэлектрической проницаемости, иными словами, характеристики процесса рассеяния и поглощения. Все сделанные выкладки могут быть перенесены на уравнение связи $\mu(\boldsymbol{k}, \omega)$, и точно такие же соотношения могут быть написаны для вещественной и мнимой частей магнитной проницаемости. Таким образом, оказывается установленным общий принцип, согласно которому вещественная и мнимые части основных величин характеризующих свойств среды — $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ и $\mu(\boldsymbol{k}, \omega)$ — не являются независимыми, но

связаны между собой Поскольку, согласно (32,12), электропроводность связана с диэлектрической проницаемостью, полученный результат в равной мере относится и к электропроводности.

Формулы Крамерса — Кронига являются одним из самых общих соотношений электродинамики Действительно, при их выводе было сделано только два предположения: 1) существование причинной связи: значение функции D в момент t может определяться процессами поляризации только в предшествующие моменты времени; 2) допустимость разложения всех функций в интеграл Фурье Последнее выполнено практически для всех функций, описывающих физические процессы Таким образом, формулы Крамерса — Кронига устанавливают, в самом общем виде, связь между величинами, характеризующими процессы типа рассеяния (вещественная часть ε, μ или σ) и поглощения (мнимая часть этих величин) Процессы рассеяния и поглощения оказываются связанными между собой Иллюстрации этого общего положения встречаются в самых различных разделах физики, в частности, в квантовой механике и теории элементарных частиц (см. т II) Наряду с принципиальной важностью, формулы Крамерса — Кронига имеют важное практическое значение. Мнимая часть диэлектрической проницаемости связана с поглощением энергии в среде (см. § 31) и может быть сравнительно просто найдена экспериментально При этом вещественную часть ε^{re} находят по формуле Крамерса — Кронига

§ 33. Электромагнитное поле в среде с пространственной и временно́й дисперсией

Полученные ранее решения уравнений Максвелла в виде поперечных электромагнитных волн оказываются не только количественно, но и качественно неприменимыми в случае распространения электромагнитных волн в среде с пространственной дисперсией

Как мы подчеркивали в § 6, явление пространственной дисперсии становится существенным в том случае, когда длина волны становится сравнимой с размерами пространственных неоднородностей среды При этом значение индукции в данной точке $\boldsymbol{r}$ пространства, согласно (6,5), оказывается зависящим от значения вектора поля и свойств среды в окружающей ее области пространства (совокупности точек $\boldsymbol{r}'$)

Обычно говорят о «нелокальной связи» между соответствующими величинами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$

До самых последних лет считалось, что в макроскопически неоднородных средах можно не учитывать явления пространственной дисперсии Однако оказалось, что в весьма широком

классе макроскопически однородных сред, именуемых плазмоподобными, пространственная дисперсия играет важную роль. К таким средам относят как саму плазму (свойства которой будут разобраны в гл. VI), так и проводники — металлы и полупроводники с высокой электропроводностью, когда приходится изучать их взаимодействие с высокочастотными полями.

В таких средах существуют характерные неоднородности сравнительно большого масштаба. В виде примера можно привести длину свободного пробега электронов в металлах, которая будет вычислена в ч VI. Длина свободного пробега составляет около 10^{-6}—10^{-5} *см*

Другой пример пространственной неоднородности, относящийся к плазме, будет приведен в § 46

Важная роль, которую играют плазмоподобные среды в современной физике, сделала весьма актуальным изучение свойств сред с пространственной дисперсией.

Рассмотрим макроскопически однородную и изотропную ненамагничивающуюся ($\mu \sim 1$) среду, без токов и свободных зарядов. Будем пытаться искать решение уравнений Максвелла в виде разложений в интеграл Фурье. Этот метод в настоящее время стал одним из самых популярных и часто применяемых. Напишем разложения в виде

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega)\, d\boldsymbol{k}\, d\omega, \tag{33,1}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)\, d\boldsymbol{k}\, d\omega, \tag{33,2}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega)\, d\boldsymbol{k}\, d\omega, \tag{33,3}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}, \omega)\, d\boldsymbol{k}\, d\omega. \tag{33,4}$$

Подставляя в уравнения Максвелла эти разложения, находим

$$i[\boldsymbol{kH}(\boldsymbol{k}, \omega)] = -i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{33,5}$$

$$i[\boldsymbol{kE}(\boldsymbol{k}, \omega)] = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{33,6}$$

$$(\boldsymbol{kD}) = 0, \tag{33,7}$$

$$(\boldsymbol{kB}) = 0. \tag{33,8}$$

Таким образом, задача об интегрировании системы уравнений в частных производных свелась к задаче о решении системы алгебраических уравнений и последующего обращения формул преобразования Фурье.

Для того чтобы эти соотношения приобрели конкретный смысл, следует написать уравнения связи для $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ соответственно.

Введем диэлектрическую проницаемость, связывающую $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\ \omega)$ и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\ \omega)$. Заметим при этом, что, поскольку проницаемость зависит от $\boldsymbol{k}$, даже в изотропной среде она является не скалярной, но тензорной величиной.

Именно, поскольку она может зависеть от вектора $\boldsymbol{k}$, а направление вектора $\boldsymbol{k}$ является единственным выделенным направлением в изотропной среде, для определения проницаемости мы должны составить симметричный тензор второго ранга, содержащий только единичный тензор δ_{ij} и компоненты вектора $\boldsymbol{k}$.

Единственный симметричный тензор второго ранга ε_{ij}, который можно составить из этих величин, имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k},\ \omega) = \varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k},\ \omega)\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) + \varepsilon_{\parallel}\frac{k_i k_j}{k^2}. \tag{33,9}$$

Если выбрать направление волнового вектора за ось z, то можно написать для ε_{ij} явное выражение

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{vmatrix}. \tag{33,10}$$

Изотропная среда при наличии пространственной дисперсии характеризуется двумя диэлектрическими проницаемостями: продольной $\varepsilon_{\parallel}$ и перпендикулярной $\varepsilon_{\perp}$. Причина такого наименования будет ясна из дальнейшего. Разумеется, что $\varepsilon_{\parallel}$ и $\varepsilon_{\perp}$ являются функциями $\boldsymbol{k}$ и ω.

Если пространственная дисперсия отсутствует, то диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(t-t')$ зависит только от времени. Соответственно ε_{ij} в (33,9) должно зависеть только от ω, но не от $\boldsymbol{k}$. При этом следует положить

$$\varepsilon_{\perp}(\omega) = \varepsilon_{\parallel}(\omega) = \varepsilon(\omega), \tag{33,11}$$

тогда

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon(\omega)\,\delta_{ij}. \tag{33,12}$$

Уравнения связи для фурье-компонент в среде с пространственной дисперсией будет иметь вид

$$D_i(\boldsymbol{k},\ \omega) = \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k},\ \omega)\,E_j(\boldsymbol{k},\ \omega). \tag{33,13}$$

Умножая (33,6) векторно на $\boldsymbol{k}$, имеем

$$-[\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}]] = k^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}) = -\frac{\omega}{c}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{B}].$$

Подставляя в правую сторону значение векторного произведения из (33,5) и учитывая, что $\mu=1$, находим

$$k^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E})=\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{D}, \tag{33,14}$$

или

$$\{k^2\delta_{ij}-k_ik_j\}E_j=\frac{\omega^2}{c^2}D_i.$$

Пользуясь уравнением связи (33,13), получаем окончательно

$$\left\{k^2\delta_{ij}-k_ik_j-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right\}E_j=0. \tag{33,15}$$

Для того чтобы система линейных алгебраических уравнений (33,15) имела нетривиальное решение, необходимо выполнение условия

$$k^2\delta_{ij}-k_ik_j-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}=0. \tag{33,16}$$

Последнее выражение определяет зависимость ε_{ij} от $\boldsymbol{k}$ и ω, т. е. представляет дисперсионное уравнение. Заметим, прежде всего, что, учитывая определение (33,9) и выбирая направление вектора $\boldsymbol{k}$ за ось z ($k_x=k_y=0$; $k_z=k$), можно записать уравнение (33,16) в виде системы алгебраических уравнений

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k},\ \omega)-k^2=0, \tag{33,17}$$

$$\varepsilon_{\parallel}\equiv\varepsilon_{zz}=0. \tag{33,18}$$

Уравнения (33,18) и (33,17) являются независимыми дисперсионными уравнениями для электромагнитных волн, могущих распространяться в среде с пространственной дисперсией. Мы видим, что в такой среде возможно существование системы двух независимых волновых процессов: поперечных волн, для которых справедлив закон дисперсии (33,17), и продольных, для которых закон дисперсии дается формулой (33,18). У поперечных волн вектор электрического поля $\boldsymbol{E}_{\perp}$ имеет отличные от нуля компоненты E_x и E_y; у продольных волн поле имеет одну компоненту E_z Во избежание недоразумений укажем, что для продольных волн выполнено условие (33,7), так что вектор $\boldsymbol{D}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{k}$ (направлению распространения). Однако векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$, в силу (33,14), не параллельны друг другу. Появление продольных электромагнитных волн, именуемых часто волнами поляризации, является специфическим эффектом, связанным с пространственной дисперсией среды Продольные электромагнитные волны в среде с пространственной дисперсией имеют простой смысл. рассмотрим среду с равновесным, но неоднородным распределением заряда и допустим,

что на такую среду действует электромагнитное поле с длиной волны, сравнимой с размерами неоднородности. Поле вызывает смещение зарядов (создает поляризацию), нарушая равновесное распределение. В результате в среде возникают колебания зарядов, весьма сходные с упругими звуковыми волнами в изотропных средах.

Более конкретная количественная картина распространения продольных волн будет развита в § 46 для случая плазмы. Там же мы получим явные выражения для $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$ и, с помощью уравнений (33,17) и (33,18), закон дисперсии в плазме $\omega_\perp(k)$ и $\omega_\parallel(k)$ для поперечных и продольных волн.

В случае пространственно однородной среды уравнение дисперсии превращается в уравнение

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) = 0, \tag{33,19}$$

совпадающее с (31,11) и определяющее однозначно частоту волн $\omega(k)$.

Поскольку, в силу (33,11), в такой среде $\varepsilon_\parallel = \varepsilon(\omega) \neq 0$, единственное возможное решение уравнения (33,15) гласит:

$$E_\parallel \equiv E_z = 0.$$

Таким образом, в соответствии с результатами § 31, в среде без пространственной дисперсии могут распространяться только поперечные волны.

Заметим, что дисперсионные уравнения и остальные основные свойства волн были получены нами без нахождения векторов поля как функций координат и времени. Последнее требует обращения интеграла Фурье, которое, согласно (33,1)—(33,4) и (33,13), может быть фактически выполнено, если известен в явном виде закон дисперсии. На практике часто основной интерес представляет именно закон дисперсии. Вычисление векторов поля по формулам (33,1)—(33,4), представляющее основную трудность, часто вообще можно не проводить. В этом — главное преимущество использования метода интеграла Фурье.

В заключение найдем связь между тензором ε_{ij} и тензором электропроводности σ_{ij} в среде с пространственной дисперсией.

Поскольку соотношение

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j$$

имеет универсальный характер, то, подставляя в него разложения соответствующих векторов в интеграл Фурье и используя

выражения (33,13) и определение тензора электропроводности $j_i=\sigma_{ij}E_j$, получим:

$$\varepsilon_{ij}=\delta_{ij}-i\frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}. \qquad (33,20)$$

Эта формула является непосредственным обобщением формулы (31,12), полученной в отсутствие пространственной дисперсии.

§ 34. Дисперсия света

Мы разбирали в §§ 36 и 37 ч. I эффект рассеяния электромагнитных волн свободными и связанными электронами. Сейчас мы рассмотрим тот же эффект с несколько иной точки зрения. Именно, вычислим диэлектрическую проницаемость среды, содержащей связанные электроны, рассеивающие излучение.

В качестве простейшей среды будет рассматриваться разреженный газ, в котором поляризация $\boldsymbol{P}$ равна

$$\boldsymbol{P}=N\boldsymbol{d},$$

где N — число рассеивающих зарядов и $\boldsymbol{d}$ — приобретаемый каждым из них дипольный момент. Согласно (37,2) ч. I для $\boldsymbol{d}$ имеем

$$\boldsymbol{d}=\frac{e^2}{m}\frac{\boldsymbol{E}}{\omega_0^2-\omega^2+i\omega\gamma},$$

где ω_0 — собственная частота осциллятора.

Поле $\boldsymbol{E}$ в разреженном газе равно внешнему полю. Поэтому

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}\left(1+4\pi N\frac{e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}\right) \qquad (34,1)$$

и, следовательно, для диэлектрической проницаемости можно написать, пользуясь определением (31,13):

$$\varepsilon=(n-i\varkappa)^2=1+\frac{4\pi e^2}{m}\frac{N}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}. \qquad (34,2)$$

В достаточно разреженном газе второе слагаемое в (34,2), пропорциональное числу электронов в единице объема, по модулю мало по сравнению с единицей при всех частотах. Поэтому можно написать приближенно

$$n-i\varkappa\approx 1+\frac{2\pi e^2}{m}\frac{N}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, находим

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \tag{34,3}$$

$$\varkappa = \frac{2\pi e^2 N}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \tag{34,4}$$

Полученные формулы определяют хорошо измеряемые величины — показатель преломления и коэффициент поглощения излучения. Если бы газ моделировался системой осцилляторов

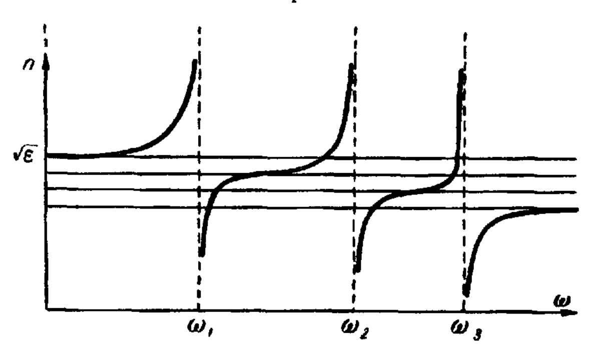


Рис. 96.

с собственными частотами $\omega_{01}, \omega_{02}, \ldots, \omega_{0i}, \ldots$, то в формулах (34,3) и (34,4) пришлось бы провести суммирование по различным сортам осцилляторов.

Разберем более детально зависимость n и $\varkappa$ от частоты излучения. Предположим прежде всего, что ω достаточно сильно отличается от собственных частот ω_{0i}. Тогда, пренебрегая $\gamma^2\omega^2$ в знаменателе, получаем

$$n^2 - \varkappa^2 = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}, \tag{34,5}$$

$$2n\varkappa = \frac{4\pi e^2}{m} \sum_i \frac{N_i \omega\gamma}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2}. \tag{34,6}$$

Мы видим, что коэффициент поглощения $\varkappa$ в области $\omega \neq \omega_0$ весьма мал и для n можно написать

$$n \approx 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}. \tag{34,7}$$

Формула (34,7) выражает закон дисперсии в разреженном газе. Зависимость показателя преломления от частоты изображена на рис. 96. При приближении ω к ω_0, n резко возрастает.

При ω, больших ω_0, показатель преломления принимает весьма малое значение (см. ниже) и вновь возрастает с частотой. У каждого вещества имеется свой набор характерных частот ω_{0i}. В виде примера на рис. 12 мы ограничились тремя частотами.

Мы указывали уже в ч. I, что реальные микроскопические излучатели — атомы и молекулы — не подчиняются законам классической электродинамики Тем не менее, гармонический осциллятор, как классическая модель излучающих систем, хорошо передает ряд основных свойств реальных излучателей. Это особенно ясно видно на примере дисперсии. В квантовой механике (см. § 108, ч. V) будет показано, что закон дисперсии выражается формулой

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m} \sum_r \frac{f_r}{\omega_r^2 - \omega^2}, \tag{34,8}$$

где ω_r — частоты переходов, связанные соотношением $\omega_r = \frac{E_r - E_0}{\hbar}$ с r-м и нижним уровнями энергии излучателя, а f_r — коэффициенты, удовлетворяющие условию $\sum f_r = 1$.

Сходство точной формулы (34,8) с классической модельной формулой (34,7) очевидно, хотя входящие в последнюю величины приобретают совершенно другой смысл.

В случае высоких частот, удовлетворяющих условию $\omega \gg \omega_r$, как квантовая, так и классическая формула для показателя преломления приобретают вид

$$n = 1 - \frac{2\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega^2}. \tag{34,9}$$

Коэффициент преломления оказывается меньшим единицы и не зависящим от свойств вещества, за исключением лишь числа электронов в единице объема. Смысл полученного результата весьма прост: при рассеянии достаточно жесткого излучения связь электронов в атомах перестает играть заметную роль. Атомные электроны рассеивают излучение, как свободные. Показатель преломления n, определенный формулой (34,9), является показателем преломления среды, представляющей газ свободных электронов с плотностью N. Формула (34,9) применима в ультрафиолетовой области для элементов, находящихся в начале периодической системы, имеющих малую энергию связи электронов в атомах и в области рентгеновых лучей для элементов средней части и конца периодической системы.

Среда с $n < 1$ является оптически менее плотной, чем вакуум. Фазовая скорость электромагнитных волн в ней $v = \frac{c}{n} > c$ (ср. § 7, ч. II).

При падении на поверхность тела достаточно коротких электромагнитных волн может иметь место описанное ниже, в § 35, явление полного внутреннего отражения.

Интересно вычислить групповую скорость электромагнитных волн в рассматриваемой среде

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\dfrac{dk}{d\omega}}.$$

Вычислим $\frac{dk}{d\omega}$, пользуясь (34,9):

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\frac{\omega}{v} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\omega}(\omega n) = \frac{1}{c}\left(n + \omega\frac{dn}{d\omega}\right) = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{2\pi e^2}{m}\frac{N}{\omega^2}\right).$$

Отсюда

$$v_g = \frac{c}{1 + \dfrac{2\pi e^2 N}{m\omega^2}} \approx c\left(1 - \frac{2\pi e^2 N}{m\omega^2}\right) = cn.$$

Групповая скорость, как это и должно быть, оказывается меньше скорости света.

Вернемся теперь к общему случаю дисперсии и рассмотрим область частот $\omega \approx \omega_0$. В этом случае формула (34,5) теряет смысл, и следует вернуться к выражениям (34,3)—(34,4).

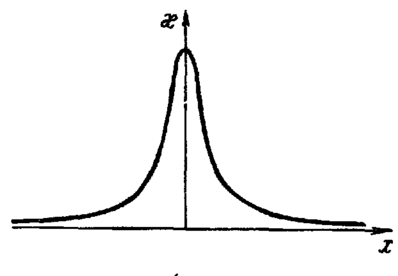


Рис. 97.

При $\omega \approx \omega_0$ можно написать

$$\omega_0^2 - \omega^2 \approx (\omega_0 - \omega)\, 2\omega_0.$$

Введем новую переменную

$$x = \frac{\omega - \omega_0}{\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)},$$

тогда

$$n = 1 - \frac{2\pi e^2 N}{m\gamma\omega_0}\frac{x}{1 + x^2},$$

$$\varkappa = \frac{2\pi e^2 N}{m\gamma\omega_0}\frac{1}{1 + x^2}.$$

Кривые $\varkappa(x)$ и $(n(x) - 1)$ изображены на рис. 97. Мы видим, что при $x = 0$ (т. е. $\omega = \omega_0$) имеет место максимальное поглощение. Это поглощение, или, точнее, экстинкция, связано с большой величиной эффективного сечения рассеяния (ср. § 37 ч. I). Оно резко снижается с ростом x, достигая $1/2$ своего максимального значения при $x = \pm 1$. Показатель преломления в области $-1 < x < 1$ обнаруживает ход с x, совершенно отличный от

его хода при $|x|>1$, изображенного на рис. 97. Если при $|x|>1$ n растет с увеличением x, то при $x=\mp 1$ он достигает соответственно максимального и минимального значений. В интервале $-1<x<1$, $n(x)$ — не растущая, а падающая функция x, достигающая при $x=0$ значения $n=1$. Эта область, в которой показатель преломления падает с ростом частоты, носит название области аномальной дисперсии. В области аномальной дисперсии разреженный газ обладает наибольшей экстинкцией (минимумом прозрачности).

Мы вернемся еще к вопросам дисперсии в квантовой механике, где будет показано, что, кроме рассеяния без изменения частоты, возможно рассеяние света с изменением частоты (так называемое комбинационное рассеяние).

§ 35. Геометрическая оптика

Выше мы нашли закон распространения плоских электромагнитных волн в однородных прозрачных средах.

Непременным признаком плоской волны служит то обстоятельство, что поверхностью равной фазы является плоскость бесконечной протяженности.

Плоские электромагнитные волны особенно просты, так как их амплитуда и волновой вектор остаются постоянными в пространстве и во времени. Оказывается, что аналогичными свойствами при известных обстоятельствах и с некоторой степенью точности обладают произвольные электромагнитные волны.

Как будет показано ниже, для этого необходимо, чтобы кривизна волновой поверхности была достаточна мала в таких областях пространства, которые еще велики по сравнению с длиной волны.

Приближенная замена волновой поверхности плоскостью имеет очень большое практическое значение, поскольку в случае произвольной формы поверхности законы распространения волн оказываются весьма сложными.

Из сказанного ясно, что подобная замена оказывается во всяком случае допустимой, если длина волны весьма мала. Поэтому заслуживает особого рассмотрения предельный случай электромагнитных волн, длина которых $\lambda \to 0$.

Практически этому случаю отвечает уже область видимого света.

Действительно, длина волны видимого света составляет около $5 \cdot 10^{-5}$ *см*. Она всегда весьма мала по сравнению с размерами макроскопических тел и оптических приборов. По этой причине изучение законов распространения электромагнитных волн в предельном случае $\lambda \to 0$ получило название геометрической оптики.

Ниже мы по той же причине будем иногда называть электромагнитную волну — световой и говорить о распространении света. Это не должно повести к недоразумениям. В прозрачной среде каждая из компонент векторов поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta F - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь через F обозначена произвольная компонента поля.

В ограниченной среде, помимо волнового уравнения, компоненты векторов поля должны еще удовлетворять граничным условиям. Поэтому компоненты векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ связаны между собой некоторыми соотношениями и не являются совершенно независимыми. Однако достаточно далеко от границы раздела сред это обстоятельство можно не учитывать и считать все компоненты $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ независимыми. Тогда волновое поле можно характеризовать скалярной величиной F.

Рассматривая монохроматическую волну, можем написать

$$F = f(x,\ y,\ z)\, e^{-i\omega t}.$$

Функция f удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\Delta f + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} f = 0.$$

Вводя волновое число $k = \dfrac{\omega}{c}$ и показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$, можно переписать последнее уравнение в виде

$$\Delta f + n^2 k^2 f = 0. \tag{35,1}$$

Плоской волне отвечает решение уравнения (35,1)

$$f = a e^{ikn\boldsymbol{r}} = a e^{ik(n\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})} = a e^{ikl}, \tag{35,2}$$

где a — постоянная амплитуда и $l = n(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})$ — величина, именуемая обычно оптической длиной пути и являющаяся линейной функцией координат. Она отличается от геометрического пути множителем n.

Мы должны найти решения уравнения (35,1) в общем виде, не ограничиваясь плоской волной. При этом, однако, мы будем рассматривать предельный случай $\lambda \to 0$ или $k \to \infty$. Будем пытаться представить решение уравнения (35,1) в предельном случае весьма больших k, как

$$f = a e^{i\psi(x,\ y,\ z)}. \tag{35,3}$$

При этом величина ψ, именуемая эйконалом, представляется в виде, максимально приближающемся к виду фазы плоской волны

$$\psi = k\mathscr{L}(x,\ y,\ z),$$

где $\mathscr{L}(x, y, z)$ — функция координат, достаточно близкая к линейной.

Таким образом, будем пытаться искать решение (35,1) в виде

$$f = ae^{ik\mathscr{L}(x, y, z)}. \tag{35,4}$$

Вычислим производные от функции f:

$$\operatorname{grad} f = a \operatorname{grad} e^{ik\mathscr{L}} = ikae^{ik\mathscr{L}} \operatorname{grad} \mathscr{L};$$
$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} e^{ik\mathscr{L}} = ikae^{ik\mathscr{L}} \Delta\mathscr{L} - k^2ae^{ik\mathscr{L}} (\operatorname{grad} \mathscr{L})^2.$$

Поэтому уравнение (35,1) приобретает вид

$$ikae^{ik\mathscr{L}} \Delta\mathscr{L} - k^2ae^{ik\mathscr{L}} (\operatorname{grad} \mathscr{L})^2 + n^2k^2ae^{ik\mathscr{L}} = 0,$$

или

$$(\operatorname{grad} \mathscr{L})^2 - \frac{i}{k} \Delta\mathscr{L} = n^2. \tag{35,5}$$

Величина $\mathscr{L}$ не зависит от k. Поэтому, если при $k \to \infty$ выполнено неравенство

$$|\operatorname{grad} \mathscr{L}|^2 \gg \frac{\Delta\mathscr{L}}{k}, \tag{35,6}$$

то в уравнении (35,5) можно перейти к пределу $k \to \infty$ и опустить второе слагаемое. При этом уравнение (35,5) приобретет вид

$$|\operatorname{grad} \mathscr{L}|^2 = n^2$$

или

$$(\operatorname{grad} \psi)^2 = n^2k^2. \tag{35,7}$$

В координатном представлении последнее уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = n^2k^2. \tag{35,7'}$$

Уравнение (35,7) носит название уравнения эйконала. При его выводе мы не делали каких-либо предположений о значениях показателя преломления n, который может быть произвольной функцией координат.

Зная решения уравнения (35,7), мы тем самым находим приближенное решение волнового уравнения (35,1), в предположении, что k достаточно большое число. В пределе $k \to \infty$ это решение совпадает с плоской волной, распространяющейся на направлении $\mathbf{n}$. Условием применимости уравнения (35,7) служит (35,6). Позднее мы обсудим, каким физическим условиям отвечает это неравенство и когда оно может не выполняться.

Если ψ — решение уравнения эйконала, то

$$\psi = k\mathscr{L}(x, y, z) = \text{const}$$

является уравнением поверхности равной фазы. Распространение электромагнитных волн происходит в направлении нормали к поверхности постоянного эйконала, т. е. в направлении вектора grad$\mathscr{L}$. Направление распространения волн именуется направлением светового луча.

На малом участке пространства эйконал ψ можно разложить в ряд, написав

$$\psi \approx \frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} = k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{r} = k(\operatorname{grad}\mathscr{L})\,\boldsymbol{r}. \qquad (35{,}8)$$

При этом для f, согласно (35,3), имеем

$$f = ae^{ik(\operatorname{grad}\mathscr{L})\boldsymbol{r}} = ae^{ikl}. \qquad (35{,}9)$$

Оптический путь l оказывается равным $(\operatorname{grad}\mathscr{L})\boldsymbol{r}$.

Сравнивая (35,9) с (35,2), мы видим, что в рамках применимости геометрической оптики всякую волну можно на достаточно малом участке пространства рассматривать, как плоскую волну с волновым вектором, направленным по нормали к поверхности постоянного эйконала. В частности, в однородной среде с постоянным коэффициентом преломления $n = \text{const}$ из (35,7) следует, что

$$\operatorname{grad}\psi = \text{const}.$$

Это значит, что смежные поверхности равных значений эйконала находятся на равных расстояниях друг от друга. Нормали к этим поверхностям являются прямыми. Последнее утверждение имеет простой смысл: в однородной среде лучи света распространяются прямолинейно.

Мы не будем останавливаться на применении геометрической оптики к оптическим и электроннооптическим системам [1]). Обсудим лишь вопрос о смысле неравенства (35,6), служащего условием применимости приближения геометрической оптики.

Как известно из геометрии, величина $\Delta\psi$ определяет средний радиус кривизны слабо изогнутой поверхности $\psi = \text{const}$. Таким образом, неравенство (35,6) имеет простой геометрический смысл: оно означает, что средний радиус кривизны поверхности постоянного эйконала должен быть велик по сравнению с длиной волны λ. Иными словами, световое возмущение должно плавно изменяться от точки к точке. Условия применимости приближения геометрической оптики заведомо нарушаются в непосредственной близости к излучателю. Здесь изменение волнового поля от точки к точке происходит весьма быстро. Величина $\Delta\psi$ может иметь тот же порядок величины, что и длина волны.

---

[1]) См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, 1960, §§ 55—57; А. Рустергольц, Электронная оптика, ИЛ, 1952; М. Борн, Оптика, ОНТИ, 1937.

Рассмотрим второй важнейший случай, когда оказывается невозможным пользоваться представлениями геометрической оптики.

Пусть на пути световых лучей помещено совершенно непрозрачное тело, именуемое экраном. В приближении геометрической оптики световые лучи не проникают за экран (рис. 98). За непрозрачным экраном находится область тени.

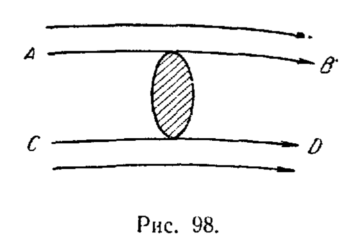


Рис. 98.

Рассмотрим границу, разделяющую освещенную область и область тени (прямые AB и CD на рис. 98). Здесь происходит скачкообразное изменение амплитуды от значения a до нуля. Поэтому производные от f по координатам на границе свет — тень обращаются в бесконечность. Здесь снова нарушаются условия применимости геометрической оптики. В следующем параграфе будут разобраны возникающие при этом физические явления.

§ 36. Дифракция

Как мы только что показали, на границе раздела освещенной и теневой областей использование приближения геометрической оптики и понятия прямолинейных световых лучей становится недопустимым.

Резкой границы этих областей, естественно, не может быть. В действительности, вблизи края непрозрачного экрана распространение света описывается неупрощенным волновым уравнением. Его решение с учетом граничных условий на поверхности экрана приводит к некоторому распределению интенсивности, отвечающему постепенному переходу от полной освещенности к тени. У границы раздела освещенной и теневой областей происходит отклонение от прямолинейного распространения света, как бы загибание лучей, получившее название дифракции.

Решение краевой задачи о дифракции оказывается весьма сложным. Поэтому были развиты специальные методы упрощенного расчета дифракционных явлений. Мы ограничимся обсуждением наиболее важного и вместе с тем простого случая.

Именно, пусть на некоторый экран с отверстием произвольной формы падает плоско-параллельный пучок лучей, т. е. пучок лучей от достаточно удаленного от экрана источника с интенсивностью I_0. У края экрана происходит дифракция света. Нас будет интересовать распределение интенсивности света на большом расстоянии от отверстия (большом по сравнению с его

размером). Такая дифракция, при которой источник света и точка наблюдения находятся на бесконечно больших расстояниях от дифрагирующего отверстия или экрана называется дифракцией Фраунгофера.

При дифракции Фраунгофера как падающие на экран с отверстием волны, так и прошедшие через отверстие волны на большом от него расстоянии можно считать плоскими. Волну, падающую на экран, мы будем называть первичной волной. Первичная волна, падающая на непрозрачный экран, полностью поглощается. Однако она проходит через отверстие в экране. Отверстие в экране становится излучателем электромагнитных волн в полупространство за экраном.

Каждая точка в сечении отверстия является источником вторичных сферических волн, достигающих точки наблюдения с некоторым запаздыванием.

Если $f_0 = \text{const}\, e^{-i\omega t}$ — значение какой-либо компоненты поля в некоторой точке $\boldsymbol{r}_0$, находящейся в сечении отверстия, то возмущение, приходящее из этой точки в точку наблюдения N, будет порядка $\frac{1}{R} f_0(\tau) = \text{const}\, e^{-i\omega\tau}$, где $\tau = t - \frac{R}{c}$ — время запаздывания (см. § 23 ч. I).

Полное поле в точке наблюдения получится на основании принципа суперпозиции суммированием по всем излучателям, т. е. по всему отверстию в экране.

Таким образом, в точке наблюдения N имеем

$$f_N = \text{const} \cdot \int \frac{e^{-i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R}\, dS = \text{const}\, e^{-i\omega t} \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}\, dS =$$

$$= \text{const} \cdot e^{-i\omega t} \int \frac{e^{ikR}}{R}\, dS. \qquad (36,1)$$

При этом f означает любую из компонент электрического или магнитного полей. В том же приближении, что и в предыдущем параграфе, мы отвлекаемся от явлений поляризации, а также считаем все компоненты поля независимыми.

Формула (36,1) имеет вполне общий характер. При вычислении интеграла (36,1) мы будем иметь в виду, что расстояние до точки наблюдения велико по сравнению с размерами отверстия (дифракция Фраунгофера!).

Введем начало координат, поместив его в некоторой точке отверстия (рис. 99). Тогда можно, как обычно (см., например, § 15 или § 26 ч. I), написать

$$R = |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}| \approx r_0 - \boldsymbol{n}_0 \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{r}_0}{r}$ — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{r}_0$.

Величина $|\boldsymbol{r}|$, изменяющаяся в пределах отверстия, мала по сравнению с $|\boldsymbol{r}_0|$, но может быть не малой по сравнению с длиной волны. Поэтому член $(\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{r})$ можно опустить в знаменателе формулы (36,1), но его необходимо удержать в экспоненте. Соответственно имеем

$$f \approx \frac{\text{const}}{r_0} e^{-i\omega t} e^{ikr_0} \int e^{-ik\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{r}}\, dS = A \int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\, dS, \qquad (36,2)$$

где $\boldsymbol{q} = k\boldsymbol{n}_0$ и через A обозначена совокупность множителей, стоящих перед интегралом. Значение этой константы будет выражено через интенсивность падающей волны.

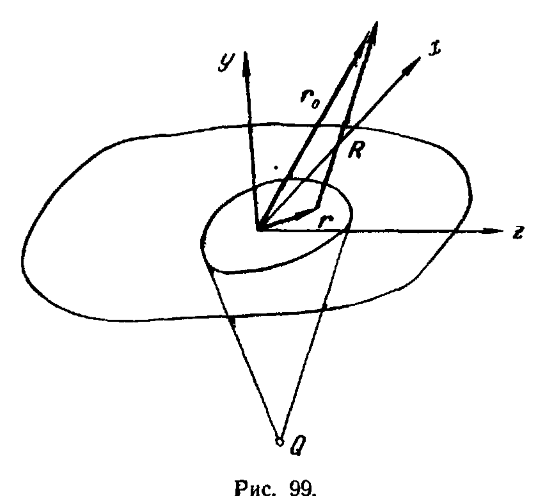


Рис. 99.

Выбрав плоскость отверстия за участок плоскости $z = 0$, величину $\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{r} = q_1 x + q_2 y = k\,\frac{x_0}{r_0}\,x + k\,\frac{y_0}{r_0}\,y = kx\cos\alpha + ky\cos\beta. \qquad (36,3)$$

Здесь $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{n}_0$.

Если волновой вектор падающей волны нормален к плоскости отверстия, а угол отклонения мал, то нетрудно заметить, что

$$\cos\alpha \approx \sin\theta_1 \approx \theta_1,$$
$$\cos\beta \approx \sin\theta_2 \approx \theta_2,$$

где θ_1 и θ_2 — углы отклонения (дифракция) в плоскостях (xz) и (yz). При этом

$$q_1 \approx k\theta_1, \quad q_2 \approx k\theta_2. \qquad (36,4)$$

Интегрирование в (36,2) ведется по площади отверстия. Если ввести функцию

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \text{ в пределах отверстия}, \\ 0 & \text{при } (x, y) \text{ за пределами отверстия}, \end{cases}$$

то можно переписать (36,2) в виде

$$f = A \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \xi(x, y) e^{-i(q_1 x + q_2 y)}\, dx\, dy, \qquad (36,5)$$

где интегрирование ведется уже по всей площади экрана (включая и отверстие).

Для определения постоянной A заметим, что (36,5) представляет интеграл Фурье от функции $\xi(x, y)$. Поэтому

$$\xi(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2 A} \int\int e^{i(q_1 x + q_2 y)} f(q_1, q_2)\, dq_1\, dq_2.$$

Из формулы (II, 9) следует

$$\int |\xi(x, y)|^2\, dx\, dy = \frac{1}{(2\pi)^2 A^2} \int |f(q_1, q_2)|^2\, dq_1\, dq_2.$$

По определению ξ интеграл слева равен единице, умноженной на площадь отверстия S. Интеграл $\int |f(q_1, q_2)|^2\, dq_1\, dq_2$ по определению представляет полную интенсивность за экраном. Последняя равна, очевидно, полной интенсивности света, проходящего через отверстие в экране, т. е.

$$\int |f|^2\, dq_1\, dq_2 = I_0 S,$$

где I_0 — интенсивность падающего света, отнесенная к 1 *см*^{2}.

Отсюда находим значение A:

$$A = \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \qquad (36,6)$$

и окончательно имеем

$$f(q_1, q_2) = \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int e^{-i(q_1 x + q_2 y)} \xi(x, y)\, dx\, dy. \qquad (36,7)$$

Формула (36,7) дает общее решение поставленной задачи — распределение волнового поля за экраном с отверстием (на большом расстоянии от него).

Распределение интенсивности дается величиной

$$dI = |f(q_1, q_2)|^2\, dq_1\, dq_2. \qquad (36,8)$$

По смыслу величин q_1 и q_2 ясно, что $|f|^2 dq_1\, dq_2$ представляет интенсивность дифрагировавшего света при данном значении

углов дифракции θ_1 и θ_2:

$$dI = |f(q_1, q_2)|^2 k^2 \, d\Omega. \qquad (36,8')$$

До сих пор мы рассматривали дифракцию от малого отверстия в экране. Теперь предположим, что свет падает на малый экран, размер и форма которого совпадает с отверстием в рассмотренном ранее экране. Такой экран называется дополнительным по отношению к отверстию. Дифракцию у краев дополнительного экрана легко найти из следующих соображений.

Совместим дополнительный экран с отверстием. Тогда позади нового экрана, ставшего сплошным, световое поле будет отсутствовать.

Последний факт можно выразить словами: в результате наложения полей, дифрагировавших от отверстия и дополнительного к нему экрана, полное поле обратилось в нуль. Отсюда следует, что поле позади дополнительного экрана можно связать с полем за отверстием соотношением

$$f_{\text{доп}} = -f,$$

или

$$|f_{\text{доп}}|^2 \, dq_1 \, dq_2 = |f|^2 \, dq_1 \, dq_2. \qquad (36,9)$$

Отверстие и дополнительный к нему экран дают тождественное распределение интенсивности дифрагировавшего света. Это положение носит название принципа Бабине.

Применим полученное общее выражение для распределения интенсивности к трем конкретным случаям, имеющим важное практическое значение.

Первым из них является дифракция на бесконечно длинной щели в непрозрачном экране.

Пусть ширина щели равна a, начало координат поместим в середину щели, направив ось y параллельно ее краям. Направление падающего света совпадает с направлением оси z. Очевидно, что дифракция происходит только от обоих краев щели, т. е. в интеграле (36,7) следует интегрировать только по координате x. В направлении y при бесконечной длине щели загибания лучей, падающих на экран, не происходит.

Поэтому мы будем все величины относить к единице длины щели. В одномерном случае вычисление, аналогичное проведенному, дает для A значение $A = \sqrt{\frac{I_0}{2\pi}}$. Формула (36,7) в одномерном случае имеет вид

$$f = \sqrt{\frac{I_0}{2\pi}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iqx} \, dx = \sqrt{\frac{2I_0}{\pi}} \, \frac{\sin\left(q\frac{a}{2}\right)}{q} = \sqrt{\frac{2I_0}{\pi}} \, \frac{\sin \frac{ka\theta}{2}}{k\theta}. \qquad (36,10)$$

Интенсивность света, дифрагировавшего под углом между θ и $\theta + d\theta$, равна

$$dI = I_0 \frac{2\sin^2 \frac{ka\theta}{2}}{\pi (k\theta)^2} dq = \frac{I_0 ka^2}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{ka\theta}{2}}{\left(\frac{k\theta a}{2}\right)^2} d\theta. \tag{36,11}$$

Величина $I_0 a$ представляет полную интенсивность света, падающего на единицу длины щели.

В результате дифракции возникает система освещенных и темных полос, параллельных щели.

Распределение интенсивности, как функция $x = \frac{ka\theta}{2}$, изображено на рис. 100.

В направлении $\theta = 0$ имеется главный максимум интенсивности; по обе стороны от него интенсивность быстро уменьшается с ростом θ. В точках $\frac{ka\theta}{2} = \frac{n+1}{2}\pi \, (n = 1, 2, \ldots)$ интенсивность имеет ряд побочных максимумов. В этих максимумах интенсивность значительно ниже, чем в главном максимуме, и убывает с ростом порядка максимума (числа n).

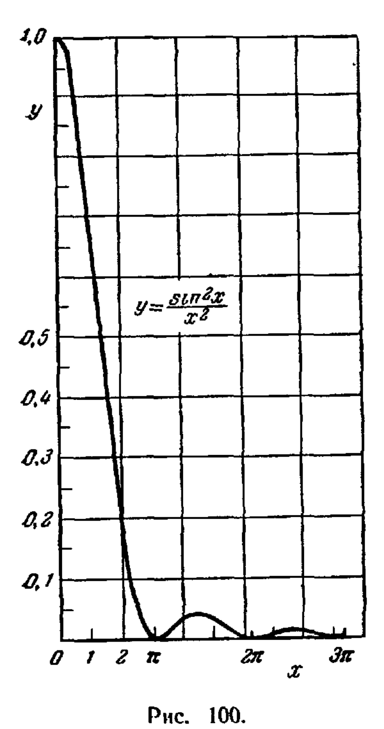


Рис. 100.

Аналогичным образом можно найти дифракцию от круглого отверстия в экране радиуса a.

Поместим начало координат в центр круга. Тогда

$$f = \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-iqr} r \, dr \, d\varphi = \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-iqr\cos\varphi} r \, dr \, d\varphi = \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \int_0^a r \, dr \int_0^{2\pi} e^{-iqr\cos\varphi} d\varphi.$$

Из теории бесселевых функций известно, что

$$\int_0^{2\pi} e^{-iqr\cos\varphi} d\varphi = 2\pi J_0(qr),$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка[1]). Поэтому

$$f=\sqrt{I_0}\int_0^a J_0(qr)\,r\,dr.$$

В теории бесселевых функций доказывается, что

$$\int_0^a J_0(qr)\,r\,dr=\frac{a}{q}J_1(qa).$$

Поэтому окончательно

$$f=\sqrt{I_0}\,\frac{a}{q}J_1(aq). \tag{36,12}$$

Интенсивность излучения, испытавшего дифракцию в телесный угол $d\Omega$, равна

$$dJ=|f|^2k^2\,d\Omega=I_0a^2\frac{J_1^2(ka\theta)}{\theta^2}\,d\Omega=(I_0a^2\pi)\frac{J_1^2(ka\theta)}{\pi\theta^2}\,d\Omega, \tag{36,13}$$

где $I_0\pi a^2$ — полная интенсивность излучения, падающего на отверстие.

В результате дифракции на круглом отверстии возникает система концентрических окружностей.

Угловое распределение дифрагировавшего излучения, даваемое функцией $\frac{J_1^2(ka\theta)}{\pi\theta^2}$, весьма сходно с распределением, изображенным на рис. 100. Высота главного максимума относительно выше, но расстояния между побочными максимумами близки к изображенным на рис. 100.

Напомним, что идентичные формулы дают распределение интенсивности при рассеянии от дополнительного экрана. При этом естественно, максимумам интенсивности при дифракции от отверстия отвечают максимумы при дифракции от непрозрачного экрана.

В заключение остановимся на дифракции при прохождении света через последовательность N тонких бесконечно длинных щелей, расположенных на равных расстояниях друг от друга (дифракционная решетка).

Пусть расстояние между серединами соседних щелей равно d, решетка ориентирована по оси x. Координаты середин щелей $x_n=nd$, где n — целые числа, $n=0, 1, 2, \ldots, N$.

---

[1]) Проще всего эта формула может быть получена разложением экспоненты в ряд и почленным интегрированием. См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1958, гл. VII.

Тогда (36,7) дает

$$f=\sqrt{\frac{I_0}{2\pi}}\sum_{n=0}^{n}e^{-iqx_n}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{-iqx}\,dx=f_1\sum_{n=0}^{N}e^{-iqnd}=f_1\frac{1-e^{-iN\,dq}}{1-e^{-i\,dq}},$$

где f_1 определено формулой (36,10).

Интенсивность излучения, дифрагировавшего от системы щелей, дается формулой

$$dI=|f|^2dq\sim I_0\left(\frac{\sin\frac{Nqd}{2}}{\sin\frac{qd}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{qa}{2}}{q\frac{a}{2}}\right)^2dq. \qquad (36,14)$$

Возникающая интерференционная картина отвечает наложению дифракций от разных щелей, но не простому их суммированию.

Важную роль в современной физике играет явление рассеяния рентгеновых лучей, а также электронов, нейтронов и т. д. от кристаллов (см. ч. V).

Ниже мы обсудим простейшую теорию дифракционного рассеяния рентгеновых лучей от кристаллов.

Пусть кристаллическая решетка образована совокупностью атомов одного сорта (т. е. идентичных по своим свойствам). Будем считать, что поглощение в решетке отсутствует.

Предположим, что на решетку падает пучок рентгеновых лучей, распространяющихся в направлении $\boldsymbol{n}_1$. Координату точки кристалла, в которой находится m-й атом решетки, можно записать в виде

$$\boldsymbol{r}_m=l\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\boldsymbol{c}, \qquad (36,15)$$

где l, n, p — целые (положительные и отрицательные) числа, а векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — единичные векторы решетки (подробнее см. § 109 ч. V; мы ограничиваемся случаем так называемой примитивной решетки).

В точку $\boldsymbol{r}_m$ приходит волна с амплитудой

$$f=f_0e^{-i\left(\omega t-\frac{\omega \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{n}_1}{c}\right)},$$

где f — произвольная компонента векторов поля и f_0 — постоянная. Атом, находящийся в точке $\boldsymbol{r}_m$, рассеивает волну, и в точку наблюдения N, находящуюся на расстоянии $\boldsymbol{R}_m$ от m-го атома, приходит волна с амплитудой

$$f_N=\frac{f_0}{R_m}e^{-i\left(\omega t-\frac{\omega \boldsymbol{r}_m\boldsymbol{n}_1}{c}-\frac{\omega R_m}{c}\right)}.$$

Полагая

$$R_m\approx r_0-\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_m,$$

где r_0 — расстояние от точки N до начала координат, находим для амплитуды волны, рассеянной m-м атомом:

$$f_N = \frac{f_0}{r_0} e^{-i\omega t} e^{ikr_0} e^{-ik(\boldsymbol{r}_m, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_1)}.$$

Если пренебречь вторичным воздействием волны, рассеянной m-м атомом, на остальные атомы решетки, то полную интенсивность в точке наблюдения можно написать в виде

$$I \sim I_0 \left| \sum e^{-ik(\boldsymbol{r}_m, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_1)} \right|^2, \qquad (36,16)$$

где суммирование ведется по всем атомам кристалла (числа l, n, p).

Учитывая выражение (36,15), можно написать

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}_m, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_1) = kl(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_1) + kn(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_1) + kp(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_1) = \\ = l(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1) + n(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1) + p(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1).$$

Тогда каждая из сумм вычисляется непосредственно. Например,

$$\sum_{l=0}^{N_1} e^{-il(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)} = \frac{1-e^{-iN_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}}{1-e^{-i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}},$$

где N_1 — число узлов вдоль первого ребра кристалла. Отсюда сразу следует, что

$$I \sim I_0 \frac{\sin^2 \frac{N_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{2}}{\sin^2 \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{2}} \frac{\sin^2 \frac{N_2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{2}}{\sin^2 \frac{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{2}} \frac{\sin^2 \frac{N_3(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{2}}{\sin^2 \frac{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)}{2}}. \qquad (36,17)$$

Формула (36,17) носит название формулы Лауэ. Она является обобщением формулы дифракционной решетки на случай трех измерений с различными периодами.

Главный максимум лежит в направлении, определяемом совокупностью равенств, именуемых условиями Брэгга:

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_1) &= \frac{2\pi}{k} h_1 = h_1\lambda, \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_1) &= \frac{2\pi}{k} h_2 = h_2\lambda, \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_1) &= \frac{2\pi}{k} h_3 = h_3\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (36,18)$$

где h_1, h_2, h_3 — целые числа.

Каждое из этих выражений является условием обращения в нуль соответствующего множителя в знаменателе формулы (36,17).

Следует подчеркнуть, что при данной длине волны λ и заданном направлении падающего пучка $\boldsymbol{n}_1$ совокупность трех уравнений (36,18) служит для определения двух независимых

компонент единичного вектора n. При этом система (36,18) имеет решение только для определенной длины волны. Говорят, что отражение рентгеновых лучей от кристалла имеет селективный (избирательный) характер. В этом — отличие между одно- и двухмерной дифракционными решетками и кристаллом.

На практике, когда известна та длина волны, которая может селективно отражаться решеткой, кристалл освещают либо сплошным спектром рентгеновых лучей, либо изменяют ориентацию рассеивающего кристалла (направление n_1). В обоих случаях кристалл сам «отбирает» условия, — длину волны или ориентацию, при которых возможно избирательное отражение — одновременное выполнение равенств (36,18).

§ 37. Отражение и преломление электромагнитных волн на границе раздела сред

До сих пор мы изучали распространение электромагнитных волн в однородной среде. Рассмотрим теперь электромагнитную волну, падающую на поверхность раздела двух диэлектрических сред, отличающихся друг от друга величинами диэлектрических проницаемостей. Для простоты выкладок мы будем считать магнитные проницаемости обеих сред равными единице.

Поверхность раздела мы будем считать плоской. Ясно, что вблизи границы раздела физические свойства сред могут отличаться от свойств в объеме, так что у поверхности раздела образуется тонкий переходный слой. Однако, если толщина последнего мала по сравнению с длиной волны, его влиянием можно пренебречь и считать границу математической поверхностью раздела, не имеющей никакой толщины.

Предположим, что на эту поверхность, которую мы выберем за плоскость $z = 0$, падает плоская монохроматическая волна. Для простоты выкладок будем считать, что вектор $\boldsymbol{k}$, характеризующий направление распространения падающей волны, лежит в плоскости (xz). Среду, в которой распространяется падающая волна, мы будем кратко именовать первой средой.

Запишем векторы электрического и магнитного полей падающей волны в первой среде в виде

$$E^{\text{пад}} = Ae^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} = Ae^{i(\omega t - kx\cos\alpha - kz\cos\gamma)},$$

$$H^{\text{пад}} = Ce^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} = Ce^{i(\omega t - kx\cos\alpha - kz\cos\gamma)},$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы волнового вектора. Поскольку волна лежит в плоскости (xz), $\cos\beta = 0$. Волновое число k связано с частотой соотношением

$$k = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}.$$

На границе раздела векторы $\boldsymbol{E}^{\text{пад}}$ и $\boldsymbol{H}^{\text{пад}}$ должны удовлетворять граничным условиям (5,2) и (5,4). Величины $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не являются независимыми, но перпендикулярны друг другу, а их абсолютные значения связаны между собой соотношением (31,31) Поэтому одновременно удовлетворить двум независимым граничным условиям можно только, допустив, что падающая волна частично проходит во вторую среду, а частично отражается от поверхности раздела. Волну, проходящую во вторую среду, мы будем называть преломленной, поскольку направление ее распространения не совпадает, вообще говоря, с направлением падающей волны.

Пусть

$$\boldsymbol{E}^{\text{отр}} = \boldsymbol{A}^{\text{отр}} e^{i\left(\omega^{\text{отр}} t - \boldsymbol{k}^{\text{отр}} \boldsymbol{r}\right)},$$

$$\boldsymbol{E}^{\text{пр}} = \boldsymbol{A}^{\text{пр}} e^{i\left(\omega^{\text{пр}} t - \boldsymbol{k}^{\text{пр}} \boldsymbol{r}\right)}$$

означают электрические векторы отраженной и проходящей волн. Полное поле в первой среде характеризуется вектором

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{отр}} = \boldsymbol{A} e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})} + \boldsymbol{A}^{\text{отр}} e^{i\left(\omega^{\text{отр}} t - \boldsymbol{k}^{\text{отр}} \boldsymbol{r}\right)}.$$

Граничное условие (5,2) на поверхности раздела двух сред дает:

$$A_{\text{tg}}^{\text{пад}} \cdot e^{i(\omega t - kx\cos\alpha)} + A_{\text{tg}}^{\text{отр}} e^{i\left(\omega^{\text{отр}} t - k^{\text{отр}} x \cos\alpha^{\text{отр}} - k^{\text{отр}} y \cos\beta^{\text{отр}}\right)} =$$
$$= A_{\text{tg}}^{\text{пр}} \cdot e^{i\left(\omega^{\text{пр}} t - k^{\text{пр}} x \cos\alpha^{\text{пр}} - k^{\text{пр}} y \cos\beta^{\text{пр}}\right)}.$$

Последнее равенство должно иметь место при произвольных значениях времени t и координат x и y. Это возможно только, если

$$\omega = \omega^{\text{отр}} = \omega^{\text{пр}}, \qquad (37,1)$$
$$k\cos\alpha = k^{\text{отр}}\cos\alpha^{\text{отр}} = k^{\text{пр}}\cos\alpha^{\text{пр}},$$
$$\cos\beta^{\text{отр}} = \cos\beta^{\text{пр}} = 0.$$

Первое условие означает, что отражение и преломление происходит без изменения частоты. Третье равенство показывает, что отраженная и преломленная волны лежат в той же плоскости, что и падающая волна. Наконец, учитывая, что $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon}\,\omega}{c}$, можно переписать второе соотношение в виде

$$\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}\cos\alpha = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}\cos\alpha^{\text{отр}},$$
$$\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}\cos\alpha = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}\cos\alpha^{\text{пр}},$$

откуда находим

$$\alpha = \alpha^{\text{отр}}, \qquad (37,2)$$

т. е. угол падения равен углу отражения, и

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha^{\text{пр}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}. \qquad (37,3)$$

Вместо направляющих косинусов $\cos\alpha$ и $\cos\alpha^{\text{пр}}$ обычно вводят $\sin\theta$ и $\sin\theta^{\text{пр}}$, где θ и $\theta^{\text{пр}}$ — углы, образуемые падающей и преломленной волнами с нормалью к плоскости $z=0$ и именуемые углами падения θ и преломления $\theta^{\text{пр}}$. Для последних находим

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta^{\text{пр}}} = n_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \qquad (37,4)$$

Здесь через n_{12} обозначен показатель преломления границы второй среды относительно первой.

Мы приходим к законам отражения и преломления света. При этом, однако, значение показателя преломления оказывается связанным с диэлектрическими проницаемостями сред. В частности, если первая среда является вакуумом и $\varepsilon_1 = 1$, то

$$n = \sqrt{\varepsilon_2}$$

называется показателем преломления данной среды.

Полученное выражение для показателя преломления оправдывает терминологию, введенную нами в § 31.

При рассмотрении явлений отражения и преломления электромагнитных волн, которые были в значительной мере изучены для света еще до установления его электромагнитной природы, принята оптическая терминология Среда с большим показателем преломления называется оптически более плотной, чем среда с меньшим показателем преломления.

Установив направления распространения отраженной и проходящей волн, перейдем к расчету их амплитуд. Учитывая равенства (37,1) из граничного условия (5,2) для амплитуд отраженной и преломленной волны, получаем

$$A_{tg} + A_{tg}^{\text{отр}} = A_{tg}^{\text{пр}}.$$

Для нахождения двух величин — $A^{\text{отр}}$ и $A^{\text{пр}}$, необходимо второе уравнение, которым служит граничное условие для магнитного поля. Мы ограничимся случаем нормального падения в плоскости (xz), который не требует громоздких выкладок. При нормальном падении имеем

$$E_x = Ae^{i(\omega t - kz)}, \quad E_y = E_z = 0;$$
$$H_y = -\sqrt{\varepsilon_1}\, Ae^{i(\omega t - kz)},$$
$$H_x = H_z = 0.$$

Для отраженной волны имеем аналогично

$$E_x^{\text{отр}} = A^{\text{отр}} e^{i(\omega t + kz)}, \qquad E_y = E_k = 0,$$

$$H_y^{\text{отр}} = \sqrt{\varepsilon_1}\, A^{\text{отр}} e^{i(\omega t + kz)}, \quad H_z = H_y = 0,$$

$H_y^{\text{отр}}$ отличается от H_y знаком, поскольку отраженная волна распространяется в противоположном направлении и проекция $H_y^{\text{отр}}$ ориентирована в положительном направлении оси y. Для проходящей волны

$$E_x^{\text{пр}} = A^{\text{пр}} e^{i(\omega t - k^{\text{пр}} z)}, \qquad E_y = E_z = 0,$$

$$H_y^{\text{пр}} = -\sqrt{\varepsilon_2}\, A^{\text{пр}} e^{i(\omega t - k^{\text{пр}} z)}, \quad H_z = H_y = 0.$$

Условия непрерывности тангенциальных слагающих векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ при $z = 0$ запишутся в виде

$$A + A^{\text{отр}} = A^{\text{пр}},$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,(A - A^{\text{отр}}) = \sqrt{\varepsilon_2}\, A^{\text{пр}}.$$

Выражая величины $A^{\text{отр}}$ и $A^{\text{пр}}$ через A, находим

$$A^{\text{отр}} = \frac{1 - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{1 + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}\, A = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\, A, \tag{37,5}$$

$$A^{\text{пр}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}\, A = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\, A. \tag{37,6}$$

Формулы (37,5) и (37,6) представляют частный случай (для нормального падения) известных формул Френеля, выведенных им в 1820 г. из общих представлений о свете, как о волновом процессе.

Зная амплитуды отраженной и преломленной волн, можно найти средние (за период) значения потока энергии, отраженного от границы раздела и проходящего во вторую среду. Они даются величинами:

$$|\sigma^{\text{отр}}| = \frac{c}{4\pi}\,[\overline{\boldsymbol{E}^{\text{отр}}\boldsymbol{H}^{\text{отр}}}] = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2 A^2 = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2 |\sigma|,$$

$$|\sigma^{\text{пр}}| = \frac{c}{4\pi}\,[\overline{\boldsymbol{E}^{\text{пр}}\boldsymbol{H}^{\text{пр}}}] = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_2}\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2 A^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2 |\sigma|,$$

где σ — вектор Пойнтинга падающей волны.

Отношение

$$R=\frac{|\sigma^{\text{отр}}|}{|\sigma|}=\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2=\left(\frac{1-n_{12}}{1+n_{12}}\right)^2 \tag{37,7}$$

называется коэффициентом отражения, а отношение

$$D=\frac{|\sigma^{\text{пр}}|}{|\sigma|}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^2=1-R \tag{37,8}$$

коэффициентом прохождения.

Формула (37,7) показывает, что при $\varepsilon_2\approx\varepsilon_1$ эффект отражения волны от границы раздела мал. Напротив, при $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ или $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$, т. е. при $n_{12} \substack{\gg \\ \ll} 1$, $R\approx 1$ и волна практически полностью отражается. Значительное отражение волны от диэлектрика с большой диэлектрической проницаемостью связано с тем, что в таком диэлектрике падающей волной возбуждается большой ток смещения. Благодаря этому возникает экранирование внешнего электрического поля, и его напряженность оказывается близкой к нулю. В пределе, при $\varepsilon_2\to\infty$, на поверхности раздела вектор электрического поля имеет узел, вектор магнитного поля — пучность. Однако при любом конечном значении ε_2 коэффициент прохождения D при нормальном падении имеет хотя бы и малую, но конечную величину.

В случае падения электромагнитной волны под косым углом к плоскости раздела сред выражения для амплитуд (формулы Френеля) несколько усложняются. Однако общая картина не изменяется, за исключением случая $n_{12}<1$, который требует специального рассмотрения.

Если на поверхность оптически менее плотной среды падает плоская волна под углом θ, то при достаточно малом значении n_{12} равенство (37,4) может иметь место только при мнимом значении угла $\theta^{\text{пр}}$. Предельное значение угла падения θ, при котором $\theta^{\text{пр}}$ может иметь еще вещественное значение, определяется условием

$$\frac{\sin\theta_0}{n_{12}}=1. \tag{37,9}$$

Угол θ_0 называется углом полного внутреннего отражения. При этом $\theta^{\text{пр}}=\frac{\pi}{2}$, т. е. преломленный луч скользит вдоль плоскости раздела сред.

При $\theta>\theta_0$ угол $\theta^{\text{пр}}$, а следовательно, величина $\sin\theta^{\text{пр}}$ оказываются мнимыми. В показателе экспоненты проходящей волны

возникает слагаемое

$$i(k^{\text{пр}} \cos\theta^{\text{пр}}) z = i\left(\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}\sqrt{1-\sin^2\theta^{\text{пр}}}\right) z =$$

$$= -\left\{\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{12}^2} - 1}\right\} z.$$

Это означает, что имеет место затухание волн в оптически менее плотной среде, происходящее по экспоненциальному закону

$$|E^{\text{пр}}| \sim e^{-\left(\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{12}^2}-1}\right) z}. \tag{37,10}$$

Эффективная глубина проникновения электромагнитного поля в оптически менее плотную среду порядка δ, где

$$\delta \sim \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{12}^2} - 1}}, \tag{37,11}$$

где $\lambda\!\!\!^{-} = \left(\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c}\right)^{-1}$ длина волны, деленная на 2π.

Поскольку в рассматриваемом идеальном диэлектрике не существует поглощения, ослабление поля в оптически менее плотной среде может быть связано только с высвечиванием электромагнитных волн обратно, в первую среду. Непосредственное вычисление подтверждает этот вывод. Коэффициент отражения R при $\theta > \theta_0$ оказывается равным единице. Описанный эффект получил название явления полного внутреннего отражения.

Мы не можем в рамках этой книги остановиться на вопросе о возникновении поляризации при определенных условиях отражения неполяризованной волны[1]).

В заключение кратко рассмотрим отражение электромагнитных волн от поверхности проводников. Электромагнитная волна, падающая на поверхность проводника, индуцирует в нем значительный ток проводимости. Свободные заряды в поле волны интенсивно ее рассеивают. В глубине проводника поле быстро затухает. Поэтому естественно ожидать, что поверхность проводника должна обладать значительными отражающими свойствами. Однако часть энергии электромагнитного поля будет диссипироваться в проводнике так, что коэффициент отражения должен иметь значение несколько меньшее единицы. Если формально в формуле для R заменить показатель преломления его

---

[1]) См., например, Д. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948; Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.

значением, даваемым формулой (33,16), то без труда найдем, учитывая, что $\varepsilon_1 = 1$ и $\sqrt{\varepsilon_2} = \sqrt{\varepsilon_{\text{мет}}} = (n - i\varkappa)$; $n \approx \varkappa \gg 1$:

$$R = \left| \frac{1 - n + i\varkappa}{1 + n - i\varkappa} \right|^2 = \frac{1 - 2n + n^2 + \varkappa^2}{1 + 2n + n^2 + \varkappa^2} \approx$$
$$\approx \frac{1 - 2n + 2n^2}{1 + 2n + 2n^2} \approx 1 - \frac{2}{n} = 1 - 2\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}. \qquad (37,12)$$

Эта формула Гегена и Рубенса хорошо согласуется с опытными данными для отражений электромагнитных волн, лежащих в диапазоне радиочастот и частот инфракрасной части спектра, от поверхности металлических проводников. При более высоких частотах соотношения классической макроскопической электродинамики оказываются неприменимыми.

Высокое значение коэффициента отражения в оптической области обусловливает характерный металлический блеск. В предельном случае проводника с бесконечно большой проводимостью коэффициент отражения $R = 1$. Это означает, что электромагнитное поле высокой частоты вовсе не проникает в глубь проводника с бесконечной проводимостью. Проводник с бесконечно большой проводимостью мы будем называть идеальным проводником. Идеальный проводник в области высокочастотных полей является аналогом проводника в электростатике.

Напишем граничные условия для векторов поля на поверхности идеального проводника. Поскольку внутри идеального проводника отсутствует электрическое и магнитное поле, из (5,2)—(5,6) следует

$$\left. \begin{aligned} &E_{tg} = 0, \quad H_n = 0, \\ &H_{tg} = \frac{4\pi}{c} i_S, \quad E_n = \frac{4\pi\omega_S}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \text{на поверхности идеального проводника,} \qquad (37,13)$$

где векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ относятся к полю в вакууме, i_S и ω_S — плотности поверхностного тока и заряда соответственно. Таким образом, на границе раздела диэлектрик — идеальный проводник вектор электрического поля направлен нормально, а вектор магнитного поля — параллельно поверхности. Хотя в природе не существует идеальных проводников, приближение идеального проводника часто достаточно полно передает характер поведения электромагнитного поля у поверхности тел с хорошей проводимостью.

§ 38. Волноводы

Важную роль в современной радиотехнике играет передача электромагнитной энергии на сравнительно небольшие расстояния. Она осуществляется путем возбуждения электромагнитного

поля в трубах с металлическими стенками различной формы и сечения, именуемых волноводами. Мы не можем в рамках этой книги останавливаться на методах возбуждения полей и ограничимся лишь изучением процесса распространения электромагнитных волн в волноводах.

Как будет ясно из дальнейшего, распространение электромагнитных волн в волноводах существенно отличается от распространения неограниченных в пространстве плоских электромагнитных волн. Поэтому вопрос о распространении волн в волноводах имеет не только практический, но и принципиальный интерес.

Чтобы не усложнять выкладок, мы ограничимся рассмотрением волновода прямоугольного сечения со стенками из идеального проводника. Пусть стороны прямоугольника равны a и b, причем для определенности будем считать, что $a > b$. Предположим, что в волновод (в плоскости $z = 0$) поступает монохроматическая плоская электромагнитная волна. Естественно допустить, что векторы поля внутри волновода зависят от времени и координаты вдоль волновода по закону

$$\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H} \sim e^{i(\omega t - k_z z)}. \tag{38,1}$$

Подставляя (38,1) в волновые уравнения, находим

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)\boldsymbol{E}, \tag{38,2}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)\boldsymbol{H}. \tag{38,3}$$

Здесь и ниже $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ являются неизвестными функциями координат x и y, поскольку их зависимость от z и t уже учтена. Связь между векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ определяется уравнениями для $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}$. Подставляя (38,1) в эти уравнения, находим

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -\frac{i\mu\omega}{c} H_x, \tag{38,4}$$

$$-ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{i\mu\omega}{c} H_y, \tag{38,5}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{i\mu\omega}{c} H_z, \tag{38,6}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + ik_z H_y = \frac{i\varepsilon\omega}{c} E_x, \tag{38,7}$$

$$-ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{i\varepsilon\omega}{c} E_y, \tag{38,8}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{i\varepsilon\omega}{c} E_z. \tag{38,9}$$

Формулы (38,4)—(38,9) позволяют выразить компоненты векторов E_x, E_y, H_x и H_y через E_z и H_z. Простое вычисление дает

$$E_x = \frac{1}{c^2k_z^2 - \varepsilon\mu\omega^2}\left(ic^2k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\omega\mu c \frac{\partial H_z}{\partial y}\right), \qquad (38,10)$$

$$E_y = \frac{1}{-\omega^2\varepsilon\mu + c^2k_k^2}\left(ic^2k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\omega\mu c \frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \qquad (38,11)$$

$$H_x = \frac{1}{-\varepsilon\mu\omega^2 + c^2k_z^2}\left(-i\varepsilon\omega c \frac{\partial E_z}{\partial y} + ic^2k_z \frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \qquad (38,12)$$

$$H_y = \frac{1}{c^2k_z^2 - \varepsilon\mu\omega^2}\left(i\varepsilon\omega c \frac{\partial E_z}{\partial x} + ic^2k_z \frac{\partial H_z}{\partial y}\right). \qquad (38,13)$$

На поверхности волновода должны выполняться граничные условия для идеального проводника (см. § 37).

Будем сперва пытаться найти решение уравнений (38,2)—(38,3) в виде поперечных плоских волн, т. е. положим

$$E_z = H_z = 0.$$

Тогда из формул (38,10)—(38,13) ясно, что компоненты поля равны нулю, если только $c^2k_z^2 - \varepsilon\mu\omega^2 \neq 0$. Если, напротив $c^2k_z^2 = \varepsilon\mu\omega^2$, как это имеет место для плоской монохроматической волны в неограниченной среде, распространяющейся со скоростью $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, то (38,2) дает

$$\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. магнитное поле удовлетворяет двухмерному уравнению Лапласа, а на всей замкнутой границе области (на сторонах прямоугольник $x = 0, a$; $y = 0, b$) магнитное поле в силу (37,13) направлено по касательной к границе. В математике показывается[1]), что единственным решением такой краевой задачи служит $H = 0$. Если магнитное поле в волне отсутствует, то, очевидно, равно нулю и электрическое поле.

Мы видим, таким образом, что поперечные электромагнитные волны не могут распространяться в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками. Следует подчеркнуть, что этот вывод не связан с формой волновода, но относится к любым волноводам, выполненным в виде простой трубы любого сечения. Именно, он означает, что в трубе с идеально проводящими стенками не могут распространяться поперечные

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.

волны. В том случае, когда границы области незамкнуты, например в случае щели между двумя бесконечными идеально проводящими плоскостями, или в случае многосвязного пространства, например в волноводе, образованном двумя концентрическими цилиндрами, наш вывод более не применим. В таких системах возможно, в принципе, распространение поперечных электромагнитных волн.

Смысл этого результата очень прост. В поперечной волне в волноводе линии магнитного поля должны быть направлены по касательной к стенкам и иметь характер замкнутых кривых. При этом линии поля не входят в идеальный проводник и не охватывают трубки тока проводимости. Продольная компонента тока смещения отсутствует, так что подобные линии магнитного поля не охватывают также и трубок тока смещения. Однако из общих соображений ясно, что линии магнитного поля, которые не охватывали бы никаких трубок с током, существовать не могут.

Это наглядное рассуждение позволяет также понять, почему в незамкнутом волноводе, выполненном в виде концентрических труб, возможно существование поперечных волн. В неограниченном пространстве линии магнитного поля могут быть незамкнутыми и уходить на бесконечность. В многосвязном волноводе они могут охватывать трубки с током, текущим по поверхности внутреннего цилиндра. В обоих случаях возможно существование магнитного и электрического полей, бегущих вдоль волновода в виде поперечных волн.

Оказывается, однако, что отсутствие в волноводе поперечных волн не означает еще невозможности распространения в нем электромагнитного поля.

Как будет сейчас показано, в волноводе возможно образование продольных волн, которые не могут существовать в неограниченном пространстве.

Под продольными волнами мы понимаем такие волны, которые имеют отличную от нуля компоненту поля в направлении распространения волны.

Из формул (38,10)—(38,13) ясно, что следует рассмотреть две независимые возможности:

$$1)\ E_z \neq 0, \quad H_z = 0,$$
$$2)\ H_z \neq 0, \quad E_z = 0.$$

В первом случае магнитное поле в волне имеет две компоненты — H_x и H_y и является чисто поперечным. Такие волны называют обычно волнами — *TM* (от англ. transverse magnetic) или поперечно-магнитного типа. Электрическое поле имеет продольную и две поперечных компоненты.

Во втором случае электрическое поле волны имеет поперечный характер и волна называется соответственно — TE (от англ. transverse electric) или поперечно-электрического типа.

В случае волн TM-типа на основании (38,2) имеем

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}=\left(k_z^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)E_z \tag{38,14}$$

и

$$E_z=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ a; \quad y=0,\ b, \tag{38,15}$$

в силу (37,13). Ниже мы покажем, что достаточно удовлетворить только этим граничным условиям. Чтобы удовлетворить уравнению (38,14) и граничным условиям (38,15), для E_z нужно написать

$$E_z=A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\,e^{i(\omega t-k_z z)}, \tag{38,16}$$

где

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\frac{\omega^2}{v^2} \tag{38,17}$$

и, кроме того,

$$k_x=\frac{\pi m}{a}; \qquad k_y=\frac{\pi n}{b}, \tag{38,18}$$

а m и n — целые числа, не равные нулю.

Найденное решение имеет вид волн, бегущих в положительном направлении оси z и стоячих в плоскостях $z=\mathrm{const}$.

Поперечно-магнитную волну, отвечающую числам m и n, обозначают обычно TM_{mn}. Если величина E_z известна, то из (38,10)—(38,13) легко найти остальные компоненты поля. Мы не будем выписывать соответствующих формул, а ограничимся лишь указанием на следующее обстоятельство: нетрудно сообразить, что граничные условия для всех компонент электрического и магнитного полей выполнены автоматически. Например, на грани $y=0$ нормальная слагающая магнитного поля

$$H_n=H_y\sim\frac{\partial E_z}{\partial x}\sim\sin\frac{\pi n}{b}y\,\Big|_{y=0}=0;$$

аналогично

$$E_{\rm tg}=E_x=E_z=0.$$

Поэтому, как мы указывали уже ранее, достаточно удовлетворить граничным условиям (38,15). Таким образом, у стенок волновода линии магнитного поля тангенциальны к поверхности. Они образуют замкнутые кривые, охватывающие продольные линии электрического поля.

Обсудим несколько подробнее формулу (38,17). Перепишем ее в виде

$$k_z=\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{\pi^2 m^2}{a^2}-\frac{\pi^2 n^2}{b^2}}. \tag{38,19}$$

При заданном значении m и n величина k_z имеет вещественное значение только при

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\omega^2}{4\pi^2v^2}\geqslant\frac{(\omega_{\text{крит}}^{m,n})^2}{4\pi^2v^2}=\left(\frac{\pi^2m^2}{a^2}+\frac{\pi^2n^2}{b^2}\right)\frac{1}{4\pi^2}=\frac{1}{\lambda_{\text{крит}}^2},\qquad(38,20)$$

где $\omega_{\text{крит}}^{m,n}$ — некоторая критическая частота и $\lambda_{\text{крит}}$ — соответствующая ей длина волны.

Если k_z оказывается мнимым, что отвечает $\omega<\omega_{\text{крит}}$, то вместо волны, бегущей вдоль оси z, мы приходим к экспоненциально затухающему выражению для E_z и соответственно остальных компонент поля. Таким образом, через волновод могут проходить только волны с $\omega>\omega_{\text{крит}}^{m,n}$ или $\lambda<\lambda_{\text{крит}}$.

Наибольшее значение длины проходящей волны $\lambda_{\text{крит}}^{\text{макс}}$ получается для волны TM_{11} ($m=1$ и $n=1$), являющейся волной TM-типа наинизшего порядка. Именно при этом

$$\lambda_{TM_{11}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Фазовая скорость TM_{mn}-волны равна, очевидно,

$$v_{\text{фаз}}=\frac{\omega}{k_z}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1-\lambda^2\left[\left(\frac{m}{2a}\right)^2+\left(\frac{n}{2b}\right)^2\right]}}=$$

$$=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{крит}}^2}}}=\frac{v}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{крит}}^2}}}.\qquad(38,21)$$

Поскольку всегда $\lambda<\lambda_{\text{крит}}$, фазовая скорость волн в волноводе всегда больше фазовой скорости света в среде — v и при $\lambda\to\lambda_{\text{крит}}$ неограниченно возрастает. В частности, если внутрь волновода не введен диэлектрик (т. е. $\varepsilon=\mu=1$), $v_{\text{фаз}}$ всегда больше скорости света в пустоте c.

Групповая скорость может быть легко найдена из формулы (38,17):

$$v_{\text{гр}}=\frac{d\omega}{dk_z}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{крит}}^2}}.\qquad(38,22)$$

Групповая скорость всегда меньше скорости $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ и стремится к нулю при приближении λ к $\lambda_{\text{крит}}$.

Из (38,21) и (38,22) ясно, что $v_{\text{фаз}}$ и $v_{\text{гр}}$ удовлетворяют общему соотношению: $v_{\text{фаз}}\cdot v_{\text{гр}}=v^2$.

Рассмотрим теперь волны поперечно-электрического (TE)-типа. Для таких волн имеем

$$\frac{\partial^2H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2H_z}{\partial y^2}=\left(k_z^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)H_z.\qquad(38,23)$$

Граничные условия для тангенциальной слагающей электрического поля с помощью (38,10) и (38,11) можно выразить через производные от H_z. Тогда вместо

$$E_x = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ b$$

имеем условие

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ b. \tag{38,24}$$

Аналогично вместо

$$E_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ a$$

имеем

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ a. \tag{38,25}$$

Решение уравнения (38,23) при граничных условиях (38,24) и (38,25) можно написать в виде волны TE-типа:

$$H_z = B\cos(k_x x)\cos(k_y y)\, e^{i(\omega t - k_z z)}, \tag{38,26}$$

где

$$k_x = \frac{\pi m}{a}; \qquad k_y = \frac{\pi n}{b}.$$

Здесь m и n — целые числа; в отличие от волн TM-типа каждое из этих чисел (но не оба одновременно) может принимать значение нуль. Формулы (38,19)—(38,22) остаются в силе для волн TE-типа. В них, однако, одно из чисел m и n можно полагать равными нулю. TE-типа волной наинизшего порядка является волна TE_{10}. Для волны TE_{10} критическая длина волны будет

$$\lambda_{\text{крит}}^{\text{макс}} = 2a.$$

Важнейшим общим выводом, который может быть сделан из изложенной теории, является то, что поперечный характер плоских волн тесно связан с неограниченными размерами среды, в которой происходит их распространение. При распространении волн в ограниченной области чисто поперечные волны могут существовать лишь в особых условиях (многосвязная область). В обычных условиях волны имеют продольную слагающую электрического или магнитного полей. Напомним, что и в неограниченном пространстве, но вблизи излучателя, электромагнитная волна имеет отличную от нуля продольную (радиальную) компоненту полей E_r и H_r (ср. §§ 25, 26 ч. I).

В приведенном выше расчете волновода простейшей формы мы не учитывали эффектов, играющих на практике важную роль. Сюда относятся прежде всего потери мощности, связанные с неидеальным характером стенок волновода и заполняющего его диэлектрика. Мы также не рассматривали и теорию волноводов

более сложной формы, а также волноводов, неоднородных по длине.

Наконец, мы не касались многочисленных проблем, связанных с разнообразными применениями волноводов, в том числе к линейным ускорителям заряженных частиц. Со всеми этими вопросами мы отсылаем читателя к обширной специальной литературе[1]).

§ 39. Прохождение быстрых частиц через вещество

Вопрос о потерях энергии и излучении быстрых частиц, движущихся в веществе, имеет большое значение в различных областях современной физики.

Как мы увидим ниже, существует несколько различных механизмов потери энергии частиц, движущихся в веществе.

Прежде всего следует напомнить, что, как мы видели в § 43 ч. I и § 26 ч. II, частицы, испытывающие соударения с атомами и отклоняющиеся полем ядер, испускают тормозное излучение. Тормозное излучение ультрарелятивистских частиц, согласно (26,15) ч. II, обратно пропорционально массе частицы и играет основную роль для легких частиц (электронов). При прохождении через вещество тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов) большую роль играют обычно другие источники потерь энергии. Заряженная частица, движущаяся в веществе, взаимодействует с атомами вещества и поляризует их. Иными словами, движущаяся частица создает некоторое поле в веществе. Это поле, с одной стороны, само действует на частицу и тормозит ее. Потеря энергии частицы, связанная с этим торможением, равна, очевидно, работе тормозящей силы. Этот вид потери энергии называется поляризационным, поскольку тормозящее поле является полем поляризации, создаваемым движущейся частицей. С другой стороны, среда, поляризованная частицей, может излучать поперечные электромагнитные волны. Для этого необходимо, чтобы поляризация, вызываемая в среде пролетающей частицей, не успевала следовать за частицей. При этом пролетевшая частица оставляет среду в поляризованном состоянии и среда излучает избыток энергии в виде поперечных электромагнитных волн. Этот источник потерь энергии называется излучением Черенкова — Вавилова или, кратко, черенковским излучением.

Подчеркнем еще раз, что излучение Черенкова — Вавилова не связано с какими-либо ускорениями, поскольку это — излучение среды, а не движущегося заряда. С другой стороны, как

---

[1]) См., например, Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Сов. радио, 1957; С. Рамо и Д. Уиннери, Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, 1948.

будет показано в дальнейшем, черенковское излучение возможно не всегда, а только при движении частицы со скоростью v, большей скорости распространения поля в среде c/n. Это ограничение выражает упомянутое условие отставания поля поляризации от пролетающей частицы. Мы перейдем к одновременному вычислению поляризационных и черенковских потерь одной частицы в макроскопически однородной и изотропной среде. Нашей целью является нахождение поля, создаваемого в среде одиночным зарядом, движущимся со скоростью $\boldsymbol{v}$.

Мы будем пренебрегать уменьшением скорости в процессе движения и считать ее постоянной по величине и направлению. Среду мы будем считать прозрачной, так что мнимая часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon^0 \to 0$. Магнитную проницаемость μ примем равной единице.

Плотность тока в среде, отвечающую равномерному движению одной частицы, можно записать в виде

$$\boldsymbol{j} = e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t). \tag{39,1}$$

Поэтому уравнения Максвелла будут иметь вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{39,2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi e\boldsymbol{v}}{c}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t). \tag{39,3}$$

Ниже мы обсудим, при каких условиях среду можно считать сплошной, пренебрегать ее атомной структурой и описывать макроскопическими величинами.

Будем пытаться искать решение уравнения Максвелла путем разложения в интеграл Фурье. Написав для векторов поля формулы (33,1)—(33,4), а для вектора $\boldsymbol{j}$ выражение

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i(\boldsymbol{kr} - \omega t)}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)\, d\boldsymbol{k}\, d\omega, \tag{39,4}$$

мы переписываем систему уравнений (39,2), (39,3) в виде

$$i[\boldsymbol{kE}(\boldsymbol{k}, \omega)] = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{39,5}$$

$$i[\boldsymbol{kB}(\boldsymbol{k}, \omega)] = -i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega) + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega). \tag{39,6}$$

Умножая (39,5) векторно на $\boldsymbol{k}$, исключая затем из (39,6) $[\boldsymbol{kB}]$ и пользуясь уравнением связи (33,4), приходим к уравнению

$$\left\{k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right\}E_j = i\frac{4\pi\omega}{c^2}j_i, \tag{39,7}$$

которое отличается от (33,15) только наличием правой части. Величина j_i в (39,7) означает фурье-компоненту плотности тока

$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)$. В изотропной среде для ε_{ij} подставляем ее значение по формуле (33,9). Тогда находим

$$\{k^2\delta_{ij} - k_ik_j\} E_j - \frac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}\left\{\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right\}E_j - \frac{\omega^2\varepsilon_\parallel}{c^2}\frac{k_ik_j}{k^2}E_j = i\frac{4\pi\omega}{c^2}j_i,$$

или, в векторном виде,

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kE})}{k^2}\right) - \frac{\omega^2\varepsilon_\parallel}{c^2}\frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kE})}{k^2} = i\frac{4\pi\omega}{c^2}\boldsymbol{j}. \qquad (39,8)$$

Умножая (39,8) скалярно на вектор $\boldsymbol{k}$, получаем

$$\boldsymbol{kE} = -i\frac{4\pi}{\omega\varepsilon_\parallel}(\boldsymbol{kj}). \qquad (39,9)$$

Подставляя (39,9) в (39,8), находим

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}\right)\boldsymbol{E} = -i\frac{4\pi\omega}{k^2}\left\{\left(k^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}\right)\frac{(\boldsymbol{kj})\boldsymbol{k}}{\omega^2\varepsilon_\parallel} + \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kj})}{c^2} - \frac{k^2\boldsymbol{j}}{c^2}\right\},$$

откуда

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{4\pi\omega i}{k^2}\left\{\frac{(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega))\boldsymbol{k}}{\omega^2\varepsilon_\parallel} + \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)) - k^2\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)}{c^2\left(k^2 - \dfrac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}\right)}\right\}. \qquad (39,10)$$

Переходя от компоненты Фурье к электрическому полю, имеем

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}d\boldsymbol{k}\,d\omega = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}, t). \qquad (39,11)$$

Первое слагаемое $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}, t)$ имеет вид

$$\boldsymbol{E}_1 = -i\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int\frac{d\boldsymbol{k}\,d\omega}{k^2}\cdot\frac{(\boldsymbol{kj})\boldsymbol{k}}{\omega\varepsilon_\parallel}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}. \qquad (39,12)$$

Подставим теперь значение $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega)$, воспользовавшись формулой (III, 8). Имеем, очевидно,

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega) = 2\pi e\boldsymbol{v}\delta(\omega - \boldsymbol{kv}). \qquad (39,13)$$

Тогда $\boldsymbol{E}_1$ приобретает вид

$$\boldsymbol{E}_1 = -i\frac{4\pi e}{(2\pi)^3}\int\frac{d\boldsymbol{k}\,d\omega}{k^2}\frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kv})}{\omega\varepsilon_\parallel}e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}\delta(\omega - \boldsymbol{kv}) =$$

$$= -i\frac{e}{2\pi^2}\int\frac{d\boldsymbol{k}}{k^2}\frac{\boldsymbol{k}}{\varepsilon_\parallel(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{kv})}e^{i(\boldsymbol{kr}-\boldsymbol{kv}t)}, \qquad (39,14)$$

где $\varepsilon_{\parallel}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})$ — значение $\varepsilon_{\parallel}(\boldsymbol{k}, \omega)$ при $\omega = \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}$. Поле $\boldsymbol{E}_1$, создаваемое пролетающей заряженной частицей в среде, оказывает на нее обратное влияние. На частицу действует сила

$$\boldsymbol{F} = e(\boldsymbol{E}_1)_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t},$$

где индекс показывает, что значение поля в каждый момент времени нужно брать в точке $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}t$, в которой находится частица. Интересующая нас потеря энергии частицы (мы будем относить ее к единице пути в вещества) равна работе этой силы на единице пути. Поскольку магнитная часть лоренцевой силы $\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]$ не производит работы, работа силы $\boldsymbol{F}$ на единице пути равна

$$\frac{dW_1}{dr} = e\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}, \boldsymbol{E}_1\right)_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t} = -\Delta E_1 =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{-\frac{ie^2}{2\pi^2 v}\int \frac{d\boldsymbol{k}}{k^2} e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}t)} \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}{\varepsilon_{\parallel}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}\right\}_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{-\frac{ie^2}{2\pi^2 v}\int\int \frac{d\boldsymbol{k}\,d\omega}{k^2} \frac{\omega\delta(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}{\varepsilon_{\parallel}(\boldsymbol{k}, \omega)}\right\}. \qquad (39,15)$$

Значок Re поставлен для того, чтобы напомнить о вещественности выражения для работы $\frac{dW_1}{dr}$. Эта работа имеет ясный физический смысл. Она представляется значением $\varepsilon_{\parallel}$ и представляет работу над частицей, производимую созданной ею продольной поляризацией. Таким образом, $\frac{dW_1}{dr}$ есть мера потери энергии частицы ΔE_1 на пути 1 *см*. Эта энергия идет на образование продольной поляризации. Несколько ниже, при вычислении (39,15), мы обсудим еще вопрос о том, какие процессы фактически происходят в среде, когда пролетающая частица создает в ней продольную поляризацию.

Обратимся теперь ко второму слагаемому в (39,11). Согласно формулам (39,13) и (39,10) имеем

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}, t) = i\frac{4\pi e}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}\,d\omega e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)}\delta(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\cdot\frac{\omega}{k^2}\frac{k^2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}{c^2\left(k^2 - \frac{\omega^2\varepsilon_{\perp}}{c^2}\right)} =$$

$$= \frac{ie}{2\pi^2 c^2}\int d\boldsymbol{k} e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}t)}\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}{k^2}\cdot\frac{k^2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}{k^2 - \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}. \qquad (39,16)$$

Соответственно, работа поля $\boldsymbol{E}_2$, совершаемая над частицей, и потеря энергии частицы ΔE_2, отнесенные к единице пути, равны

$$\frac{dW_2}{dr} = -\Delta E_2 = \operatorname{Re}\left\{\frac{ie^2}{2\pi^2 vc^2}\int e^{i(\boldsymbol{kr}-\boldsymbol{kv}t)}\,d\boldsymbol{k}\frac{(\boldsymbol{kv})\left(v^2-\frac{(\boldsymbol{kv})^2}{k^2}\right)}{k^2-\frac{(\boldsymbol{kv})^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{kv})}\right\}_{r=vt} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{ie^2}{2\pi^2 vc^2}\int d\boldsymbol{k}\,d\omega\,\frac{\omega\left(v^2-\frac{\omega^2}{k^2}\right)}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k},\,\omega)}\,\delta(\omega-\boldsymbol{kv})\right\}. \qquad (39{,}17)$$

Потеря энергии ΔE_2 определяет черенковские потери частицы. Они связаны с возбуждением в среде поперечного электромагнитного поля, т. е. с излучением поляризуемой среды.

Учет пространственной дисперсии позволил нам очень четко разделить оба типа потерь: поляризационные и черенковские. В дальнейшем мы ограничимся расчетом потерь в среде без пространственной дисперсии[1]), для чего, согласно (33,11), в полученных формулах следует положить

$$\varepsilon_{\parallel}(\boldsymbol{k},\ \omega) = \varepsilon_{\perp}(\boldsymbol{k},\ \omega) = \varepsilon(\omega)\,|_{\omega=\boldsymbol{kv}}. \qquad (39{,}18)$$

Перейдем к вычислению интегралов в формулах (39,15) и (39,17). Имеем, с учетом (39,18),

$$\Delta \boldsymbol{E}_1 = \operatorname{Re}\left\{\frac{ie^2}{2\pi^2 v}\int d\boldsymbol{k}\cdot\frac{\omega}{k^2\varepsilon(\omega)}\right\}. \qquad (39{,}19)$$

Мы указывали уже выше, что все наше рассмотрение будет относиться к прозрачным средам, точнее, к средам с исчезающе малым поглощением. Это значит, что в выражении для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega) = \varepsilon^r(\omega) + i\varepsilon^i(\omega)$ следует перейти к пределу $\varepsilon^i(\omega) \to 0$. Это позволяет существенно упростить все дальнейшие выкладки. Именно, мы можем написать

$$\operatorname{Re}\frac{i}{\varepsilon(\omega)} = \operatorname{Re}\frac{i}{\varepsilon^r(\omega)+i\varepsilon^i(\omega)} = \operatorname{Re}\frac{i(\varepsilon^r - i\varepsilon^i)}{(\varepsilon^r)^2+(\varepsilon^i)^2} = \frac{\varepsilon^i}{(\varepsilon^r)^2+(\varepsilon^i)^2}.$$

Переходя к пределу $\varepsilon^i \to +0$, мы можем воспользоваться формулой (III, 4′) и написать

$$\lim_{\varepsilon^i\to+0}\operatorname{Re}\frac{i}{\varepsilon(\omega)} = \lim_{\varepsilon^i\to+0}\left[\frac{\varepsilon^i}{(\varepsilon^r)^2+(\varepsilon^i)^2}\right] = \pi\delta[\varepsilon(\omega)]. \qquad (39{,}20)$$

[1]) Потери с учетом пространственной дисперсии см., например, В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, 1961; Шафранов, Электромагнитные волны в плазме, сб. Вопросы физики плазмы, т. II, Москва, 1963.

При этом формула для поляризационных потерь приобретает вид

$$\Delta E_1 = \frac{e^2}{2\pi v} \int \frac{\omega}{k^2} \delta[\varepsilon(\omega)]\, d\boldsymbol{k} = \frac{e^2}{2\pi v} \int \frac{(\boldsymbol{kv})}{k^2} \delta[\varepsilon(\boldsymbol{kv})]\, d\boldsymbol{k}, \qquad (39{,}21)$$

где мы воспользовались тем, что вклад в потери дает только частота $\omega = \boldsymbol{kv}$. Если явный вид $\varepsilon(\omega)$ известен, то интеграл (39,21) может быть вычислен без труда. В § 46 такое вычисление будет проделано для случая плазмы.

Заметим, что в формулу (39,21) не входит масса частицы. Это вполне естественно, поскольку потери энергии связаны с поляризацией среды. Поляризационные потери поэтому являются основным источником энергетических потерь тяжелых частиц, движущихся в веществе в широком интервале энергий. Легкие частицы, например электроны сравнительно высоких энергий, теряют основную часть энергии на тормозное излучение.

Перейдем теперь к вычислению черенковских потерь. Это вычисление может быть проведено с использованием того же самого приема. Имеем

$$\Delta E_2 = -\frac{e^2}{2\pi^2 v c^2} \operatorname{Re} \left\{ i \int d\boldsymbol{k} \frac{\left(v^2 - \frac{(\boldsymbol{kv})^2}{k^2}\right)(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v})}{k^2 - \frac{(\boldsymbol{kv})^2}{c^2}\varepsilon(\omega)} \right\}. \qquad (39{,}22)$$

Выберем направление движения частицы за ось z и введем новые переменные

$$\omega = \boldsymbol{kv} = k_z v,$$

$$q^2 = k_x^2 + k_y^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}.$$

Тогда

$$d\boldsymbol{k} = dk_x\, dk_y\, dk_z = q\, dq\, d\varphi \frac{d\omega}{v}.$$

В новых переменных имеем

$$\Delta E_2 = -\frac{e^2}{2\pi^2 v^2 c^2} \operatorname{Re} \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \omega\, d\omega \int_0^{\infty} \frac{q\, dq}{q^2 + \frac{\omega^2}{v^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{q^2 v^2}{q^2 + \omega^2\left[\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right]} \right\} =$$

$$= -\frac{e^2}{\pi c^2} \operatorname{Re} \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \omega\, d\omega \int_0^{\infty} \frac{q^3\, dq}{\left(q^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(q^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right)} \right\}.$$

В непоглощающей среде аналогично (39,20) можно написать

$$\lim_{\varepsilon' \to +0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{q^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)} \right\} = -\pi\delta\left[q^2 + \omega^2\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right],$$

откуда

$$\Delta E_2 = \frac{e^2}{\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\, d\omega \int_0^{\infty} \frac{q^3\, dq}{q^2 + \frac{\omega^2}{v^2}}\, \delta\left[q^2 + \omega^2\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right].$$

Вводя новую переменную $u = q^2$, имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{q^3\, dq}{q^2 + \frac{\omega^2}{v^2}}\, \delta\left[q^2 + \omega^2\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{u\, du}{u + \frac{\omega^2}{v^2}}\, \delta\left[u + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2}\right] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)}\right), & v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}, \\ 0, & v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}. \end{cases}$$

Поэтому окончательно мы приходим к следующему выражению для потерь энергии на поперечное электромагнитное излучение Черенкова — Вавилова, отнесенных к единице пути в веществе:

$$\Delta E_2 = \frac{e^2}{2c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)}\right) \omega\, d\omega = \frac{e^2}{c^2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)}\right) \omega\, d\omega, \qquad (39,23)$$

поскольку $\varepsilon(\omega)$ — четная функция своего аргумента (см. (32,11)).

Таким образом, мы можем указать следующие основные особенности излучения Черенкова — Вавилова:

1) оно возникает только для частиц, движущихся со скоростью, большей $v_{\text{пор}} = \frac{c}{n}$ (порог излучения);

2) оно зависит от заряда частиц, но не от их массы;

3) излучение целиком приходится на видимую и отчасти ультрафиолетовую области спектра. Для более коротких волн $n < 1$ (ср. § 34) и излучение более невозможно;

4) излучаемая на единицу пути энергия в единичном интервале частот имеет характерное спектральное распределение (39,10);

5) излучение, возникающее в данной точке траектории, распространяется по поверхности конуса с вершиной в точке и осью, совпадающей с направлением полета частицы. Угол раствора конуса θ определяется условием

$$\cos\theta = \frac{c}{nv}. \qquad (39,24)$$

В заключение подчеркнем, что потери энергии на излучение Черенкова — Вавилова весьма невелики и составляют всего около 0,1% потерь весьма быстрых частиц в веществе. Последние

определяются тормозным излучением и рядом других явлений. Важность черенковского излучения заключается в том, что его использование положено в основу новых детекторов быстрых частиц. Эти детекторы, получившие наименование черенковских счетчиков, стали в настоящее время одним из главных рабочих инструментов в области физики частиц высоких энергий Наблюдая излучение Черенкова, можно не только зарегистрировать прохождение частиц, но согласно (39,24) непосредственно определить величину и направление их скорости; согласно (39,23) определить их заряд; разделить между собой частицы с равным импульсом и разной массой (воспользовавшись существованием порога $v_{\text{пор}}=\frac{p_{\text{пор}}}{m}$) и т. д.

В заключение обсудим вопрос о границах применимости макроскопического рассмотрения. Фактически быстрые частицы взаимодействуют с отдельными атомами или, точнее, атомными электронами. Для макроскопического описания процесса пролета необходимо, чтобы за время пролета частицы мимо атома внутриатомные электроны не успели испытать заметное смещение При этом пролетающая частица двигается в квазистационарном поле многих атомов.

Таким образом, скорость частицы должна быть велика по сравнению с характерной скоростью атомных электронов.

Интересным источником потерь энергии равномерно движущейся частицы на излучение является так называемое переходное излучение. Оно возникает при переходе частицы из одной среды в другую. Для упрощения формул будем считать, что частица, равномерно двигаясь в вакууме со скоростью $v\sim c$, падает на границу среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Границу среды мы считаем плоскостью $z=0$, а падение частицы — нормальным к границе. Момент падения частицы на границу выберем за время $t=0$. Найдем вектор-потенциал поля частицы по формуле (32,10) ч. I.

Имеем, очевидно, для компоненты Фурье $\boldsymbol{A}_\omega$ на большом расстоянии от заряда

$$\boldsymbol{A}_\omega=\frac{e}{2\pi cr}\cdot e^{ikr}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{v}(t)\,e^{i[\boldsymbol{kr}(t)-\omega t]}\,dt=$$

$$=\frac{e\boldsymbol{v}}{2\pi cr}e^{ikr}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{it(kv\sqrt{\varepsilon}-\omega)}\,dt+\int_{0}^{\infty}e^{it(kv-\omega)}\,dt\right\}=$$

$$=\frac{e\boldsymbol{v}}{2\pi cr}e^{ikr}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{i\omega t\left(\frac{v\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}{c}-1\right)}dt+\int_{0}^{\infty}e^{i\omega t\left(\frac{v\cos\theta}{c}-1\right)}dt\right\}.$$

Пользуясь определением δ_+- и δ_--функций (см. Приложение III), находим

$$A_\omega = \frac{ev}{2\pi c\omega r} \cdot \frac{1}{i} \left\{ \frac{\delta_-}{1 - \frac{v\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}{c}} - \frac{\delta_+}{1 - \frac{v\cos\theta}{c}} \right\}. \qquad (39,25)$$

Излучаемая интенсивность по формуле (32,14) ч. I равна

$$\Delta E = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{v\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}{c}} - \frac{1}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \right]^2 \sin^2\theta\, d\Omega. \qquad (39,26)$$

Смысл полученного результата весьма прост; при движении в среде роль относительной скорости $\frac{v}{c}$ играет величина $\frac{v\sqrt{\varepsilon}}{c}$, определяющая оптический путь в веществе. При переходе из одной среды в другую (или в вакуум) скорость остается постоянной, но скачком изменяется величина $\frac{v\sqrt{\varepsilon}}{c}$. Это изменение эквивалентно внезапному изменению скорости, т. е. ускорению частицы. Формулы (39,25) и (39,26) показывают, что излучение направлено главным образом вперед ($\theta \approx 0$) и содержит весьма высокие частоты (высокие гармоники). Мы не останавливаемся на вычислении полной интенсивности, которую можно вычислить, интегрируя по всем углам. Заметим лишь, что полная интенсивность оказывается при этом пропорциональной энергии частицы. Аналогичное вычисление при $v \ll c$ оказывается более сложным, поскольку при этом необходимо учитывать явления отражения и преломления излучаемых электромагнитных волн на границе раздела.

ГЛАВА VI

ВЕЩЕСТВО В СОСТОЯНИИ ПЛАЗМЫ

§ 40. Общая характеристика плазмы

Большой интерес для современной физики представляет вопрос о прохождении тока через газы и поведение газов, проводящих ток, в электрических и магнитных полях.

Как известно, газы являются непроводниками тока. Если, однако, в газе создана достаточно большая ионизация, т. е. образовано достаточно много свободных электронов и ионов (положительных и отрицательных), газ становится проводником. Процесс прохождения тока через газ именуется разрядом. В зависимости от механизма, вызывающего ионизацию газа, газовый разряд именуют несамостоятельным или самостоятельным.

В первом случае основную ионизацию создают внешние источники (например, γ-излучение или высокая температура, поддерживаемая внешними источниками).

При самостоятельном разряде первоначальная ионизация вызывается электронами, вылетающими из холодного катода (таунсендовский и тлеющий разряд).

Величина плотности тока, могущего протекать через газ, зависит, в первую очередь, от числа ионов, образованных в 1 $см^3$ газа. В частности, если весь газ является полностью ионизованным, плотности тока могут быть очень велики.

Самостоятельный газовый разряд обнаруживает большее разнообразие свойств. Однако он обладает замечательной особенностью: пространство, в котором происходит газовый разряд, можно разбить на три области — приэлектродные области (катодную и анодную) и область плазмы.

Свойства приэлектродных областей зависят от механизма разряда. В катодной области происходит ионизация атомов газа электронами, вылетающими с катода. В приэлектродных областях сосредоточен объемный заряд и происходит основное падение приложенной к электродам разности потенциалов. Размеры приэлектродных областей, как правило, невелики и они занимают лишь малую часть пространства между электродами.

Основную долю межэлектродного пространства заполняет ионизованный газ, являющийся в среднем электронейтральным. Эта область разряда получила название плазмы. В плазме число положительных ионов в среднем равно числу электронов и отрицательных ионов в единице объема. Наряду с ионами и электронами в плазме может содержаться также большее или меньшее количество неионизованных атомов или молекул.

Свойства плазмы, которыми мы будем интересоваться в дальнейшем, не зависят от конкретных свойств разряда и его характера. Поведение плазмы играет важную роль в явлениях газового разряда, который находит широкое приложение в современной технике. Особый интерес к высокотемпературной плазме возник в последние годы в связи с работами по управляемым термоядерным реакциям, а также, в связи с рядом астрофизических проблем.

Как известно, для получения термоядерных реакций необходимо достигнуть таких высоких температур (выше 10^8 градусов), при которых энергия теплового движения ядерных частиц оказывается достаточной для преодоления энергетических барьеров, препятствующих проникновению ядер друг в друга. При таких температурах атомы являются нацело ионизованными и вещество представляет предельно ионизованную плазму. Требующиеся для протекания термоядерных реакций температуры имеются во внутренних областях звезд.

В лабораторных условиях до настоящего времени не удалось еще реализовать плазму необходимой температуры. Однако проводятся интенсивные исследования высокотемпературной плазмы, давшие уже ряд существенных результатов.

В астрофизических условиях вещество находится в состоянии плазмы не только во внутренних областях звезд, но также в звездных атмосферах и в облаках межзвездной материи.

§ 41. Равновесная плазма

Изучение свойств плазмы мы начнем, естественно, с рассмотрения теории равновесной плазмы.

Мы будем для простоты предполагать, что плазма содержит заряды только двух сортов: положительные ионы с зарядностью p_1 и электроны. Для общности получаемых соотношений мы будем последние также именовать ионами и приписывать им зарядность $p_2 = -1$. Тогда условие электронейтральности плазмы можно записать в виде

$$\bar{n}_1 p_1 + \bar{n}_2 p_2 = 0, \qquad (41,1)$$

где $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ — средние числа соответственно ионов и электронов в единице объема.

При рассмотрении равновесных свойств плазмы мы ограничимся приближением идеального газа. В этом приближении кулоновское взаимодействие между заряженными частицами можно считать малым по сравнению с тепловой энергией:

$$\frac{p_1 p_2 e^2}{\bar{l}} \ll kT, \tag{41,2}$$

где $\bar{l}$ — среднее расстояние между ионами. Последнее связано с числом ионов в единице объема (концентрацией плазмы) N соотношением

$$\bar{l} \approx \frac{1}{N^{1/3}}, \tag{41,3}$$

так что условие идеальности газовой плазмы можно представить в виде

$$N \ll \frac{(kT)^3}{p_1^3 p_2^3 e^6}. \tag{41,4}$$

Концентрация плазмы N связана с числами $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ соотношением

$$N = \bar{n}_1 + \bar{n}_2. \tag{41,5}$$

Если неравенство (41,4) выполнено, то плазму в нулевом приближении можно рассматривать как обычный газ, характеризуемый температурой T.

Частицы плазмы будут обладать максвелловским распределением по скоростям и равномерным распределением в пространстве. Кулоновское взаимодействие между заряженными частицами приводит к появлению в объеме некоторого среднего электрического поля, характеризуемого потенциалом $\bar{\varphi}$. В нашем приближении изменение свойств газа, вызванное этим полем, можно считать малым.

Для нахождения величины $\bar{\varphi}$ можно применить следующие рассуждения. Мысленно выделим в плазме некоторый произвольный ион, находящийся в точке O, выбранной за начало координат, и найдем полный средний потенциал электрического поля $\bar{\varphi}$ в окрестности точки O. Потенциал $\bar{\varphi}$ создается всеми ионами (включая и ион, находящийся в точке O). Усреднение проводится по всему времени наблюдения, в течение которого ионы побывают во всевозможных положениях в плазме.

Рассмотрим некоторый элемент объема dV, находящийся на расстоянии r от начала координат O. Пусть потенциал электрического поля в этом объеме равен $\overline{\varphi(r)}$. Ввиду изотропии поля, потенциал $\bar{\varphi}$ зависит только от абсолютной величины r, но не от направления радиуса-вектора. При малой концентрации плазмы к ионам, находящимся в поле, можно применить закон рас-

пределения Больцмана, написав для числа частиц в объеме dV выражения:

$$n_1\,dV = Ae^{-\frac{p_1 e\varphi}{kT}}\,dV, \tag{41,6}$$

$$n_2\,dV = Be^{-\frac{p_2 e\varphi}{kT}}\,dV, \tag{41,7}$$

где n_1 и n_2 — числа положительных и отрицательных ионов в единице объема

Постоянные A и B могут быть найдены следующим образом. При как угодно высокой температуре $T \to \infty$ поле, создаваемое ионами в плазме, не может влиять на их пространственное распределение, так как их потенциальная энергия будет пренебрежимо малой. Поэтому при $T \to \infty$ оба распределения должны переходить в равномерное распределение частиц в пространстве, т. е.

$$n_1\,dV = \bar{n}_1\,dV, \tag{41,8}$$

$$n_2\,dV = \bar{n}_2\,dV, \tag{41,9}$$

где $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ — средние числа положительных и отрицательных ионов в 1 $см^3$.

Сравнивая (41,8) и (41,9) с (41,6) и (41,7), находим

$$n_1\,dV = \bar{n}_1 e^{-\frac{p_1 e\Phi}{kT}}\,dV, \tag{41,10}$$

$$n_2\,dV = \bar{n}_2 e^{-\frac{p_2 e\Phi}{kT}}\,dV. \tag{41,11}$$

Согласно формулам (41,10) и (41,11) в объеме вблизи точки O, в которой находится выделенный нами ион, имеется заряд

$$de = \left(\bar{n}_1 p_1 e e^{-\frac{p_1 e\varphi}{kT}} + n_2 p_2 e e^{-\frac{p_2 e\Phi}{kT}}\right) dV. \tag{41,12}$$

Этот заряд обусловлен тем, что вероятность нахождения в dV иона того же знака, что и ион в точке O, несколько понижена, а иона противоположного знака — несколько повышена по сравнению с той же вероятностью без учета межионного взаимодействия. В этом смысле говорят, что вокруг иона O возникает неравномерно заряженное ионное облако.

Само собой разумеется, что фактически никакого облака вокруг каждого из ионов не существует, так как выделение иона в точке O было сделано только для удобства рассуждений, и никаких выделенных ионов в плазме не существует. Имеется лишь некоторая вероятностная корреляция (соответствие) между расположением любой пары ионов в пространстве. То же самое можно выразить другими словами: можно сказать, что каждый ион создает вокруг себя ионное облако и вместе с тем

входит в состав ионных облаков, создаваемых всеми другими ионами в плазме.

С помощью (41,12) можно получить среднюю плотность заряда в точке r:

$$\bar{\rho}(r)=\frac{de}{dV}=e\left(\bar{n}_1 p_1 e^{-\frac{p_1 e\Phi}{kT}}+\bar{n}_2 p_2 e^{-\frac{p_2 e\Phi}{kT}}\right). \tag{41,13}$$

Заметим, что уравнение (41,13) является несамосогласованным. Его следовало бы записать в виде

$$\Delta\bar{\varphi}=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\overline{\left(\bar{n}_1 p_1 e^{-\frac{p_1 e\varphi}{kT}}+n_2 e^{-\frac{p_2 e\varphi}{kT}}\right)}.$$

Поскольку $\overline{e^{\varphi}}\neq e^{\Phi}$, переход к (41,13) может быть сделан только в предположении, что энергия межионного взаимодействия мала по сравнению с kT, экспоненциальные выражения $e^{-\frac{p_1 e\Phi}{kT}}$ и $e^{-\frac{p_2 e\Phi}{kT}}$ можно разложить в ряд, написав

$$\bar{\rho}(r)\approx-\frac{e^2\left(p_1^2\bar{n}_1+p_2^2\bar{n}_2\right)}{kT}\bar{\varphi}(r). \tag{41,14}$$

Средний потенциал поля $\bar{\varphi}$ в данной точке плазмы связан со средней плотностью заряда $\bar{\rho}$ в этой точке уравнением электростатики

$$\Delta\bar{\varphi}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{41,15}$$

Поэтому для $\bar{\varphi}$ мы находим уравнение

$$\Delta\bar{\varphi}=\varkappa^2\bar{\varphi}, \tag{41,16}$$

где через $\varkappa^2$ обозначена существенно положительная величина

$$\varkappa^2=\frac{2\pi e^2\left(p_1^2\bar{n}_1+p_2^2\bar{n}_2\right)}{\varepsilon kT}. \tag{41,17}$$

Уравнение (41,16) или уравнение (41,15), в котором $\bar{\rho}$ определено по (41,13), носит название уравнения Пуассона — Больцмана и является основой теории равновесной плазмы.

Решение уравнения (41,16), удовлетворяющее требованию изотропии пространства, может быть легко получено в полярных координатах. В полярных координатах, учитывая, что $\bar{\varphi}$ не зависит от полярных углов θ и ψ, уравнение (41,6) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\bar{\varphi})=\varkappa^2\bar{\varphi}.$$

Вводя новую неизвестную функцию $f=r\bar{\varphi}$, получаем $\frac{d^2f}{dr^2}=\varkappa^2 f$.

Решение последнего уравнения имеет вид $f=C_1e^{-\varkappa r}+C_2e^{\varkappa r}$,

откуда следует, что

$$\bar{\varphi} = C_1 \frac{e^{-\varkappa r}}{r} + C_2 \frac{e^{\varkappa r}}{r}. \qquad (41,18)$$

Постоянная $C_2 = 0$, так как экспоненциально возрастающее решение, приводящее к бесконечно большому потенциалу при $r \to \infty$, должно быть отброшено. Поэтому

$$\bar{\varphi} = C_1 \frac{e^{-\varkappa r}}{r}.$$

Постоянная C_1 может быть найдена из требования, чтобы вблизи условно выделенного заряда потенциал поля совпадал с кулоновским полем заряда. Отсюда следует, что

$$\varphi_{r \to 0} = \frac{C_1}{r} \to \frac{p_1 e}{\varepsilon r},$$

так что

$$C_1 = \frac{p_1 e}{\varepsilon},$$

и окончательно

$$\bar{\varphi} = \frac{p_1 e}{\varepsilon} \frac{e^{-\varkappa r}}{r}. \qquad (41,19)$$

Формула (41,19) показывает, что потенциал поля вблизи иона убывает, в основном, по экспоненциальному закону. На расстоянии $r > \frac{1}{\varkappa}$ от иона потенциал оказывается малым. Величина $\frac{1}{\varkappa}$, характеризующая быстроту уменьшения потенциала, получила название дебаевского радиуса.

Для выяснения смысла полученного решения разложим потенциал на кулоновский потенциал выделенного иона и потенциал поля, создаваемого всеми остальными ионами $\bar{\varphi}'$:

$$\bar{\varphi} = \frac{p_1 e}{\varepsilon r} + \bar{\varphi}'. \qquad (41,20)$$

Из (41,19) находим

$$\bar{\varphi}' = \frac{p_1 e}{\varepsilon} \frac{e^{-\varkappa r} - 1}{r}. \qquad (41,21)$$

Найдем плотность заряда, отвечающую потенциалу $\bar{\varphi}'$. В силу (41,15) имеем

$$\bar{\rho}' = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \Delta \bar{\varphi}' = -\frac{p_1 e \varkappa^2}{4\pi} \frac{e^{-\varkappa r}}{r}.$$

Последняя формула показывает, что вблизи иона с зарядом $p_1 e$ образуется ионное облако, имеющее противоположный знак заряда. Плотность заряда в облаке экспоненциально убывает с

расстоянием от центрального иона. Полный заряд облака равен

$$\int_0^\infty \bar{\rho}' \, dV = -p_1 e.$$

Смысл этого результата совершенно ясен: вокруг данного иона с большей вероятностью группируются ионы противоположного знака. Полный заряд облака ионов, окружающих любой заданный ион, в точности равен заряду данного иона. Наличие вокруг иона облака ионов противоположного знака приводит к ослаблению или, как говорят, экранированию поля иона. Поэтому потенциал экранированного поля вблизи иона убывает быстрее, чем кулоновский потенциал. Величина $1/\varkappa$ представляет средний радиус ионного облака заданного иона.

Вводя в условие применимости теории (41,4) величину дебаевского радиуса $\varkappa \sim e^2N/kT$, можно переписать его в виде $N\varkappa^{-3} \gg 1$, т. е. в виде требования: среднее число ионов, находящихся в объеме сферы с дебаевским радиусом, должно быть достаточно велико по сравнению с единицей.

Тот же результат гораздо убедительней может быть получен с помощью метода коррелятивных функций. Именно, воспользуемся малостью концентрации плазмы, чтобы замкнуть уравнение (42,12) для бинарной функции. Последнее содержит тернарную функцию. При малых концентрациях приближенно

$$\rho_{12}(v) = (1 + \psi_{12}(v)), \tag{41,22}$$

где $\psi_{12} \ll 1$. Формула (41,22) означает, что взаимодействие частиц в плазме приводит к слабой корреляции. Если пренебречь вероятностью тройных соударений частиц в плазме, то тернарную функцию ρ_{12j} можно представить произведением

$$\rho_{12j} = \rho_{12} \cdot \rho_{2j} \cdot \rho_{1j} \simeq 1 + \psi_{12} + \psi_{2j} + \psi_{1j}. \tag{41,23}$$

Подставляя это в (48,12) ч. III, находим

$$\frac{\partial \psi_{12}}{\partial r_1} = -\frac{1}{kT}\frac{\partial u_{12}}{\partial r_1} - \frac{N}{VkT}\int \frac{\partial u_{1j}}{\partial r_1}(1 + \psi_{12} + \psi_{2j} + \psi_{1j})\, d\boldsymbol{r}_j. \tag{41,24}$$

Напомним, что по индексу j производится суммирование по всем (в нашем случае — двум) сортам частиц.

Очевидно, что три интеграла в правой части обратятся в нуль

$$\int \frac{\partial u_{12}(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)}{\partial r_1} d\boldsymbol{r}_j = 0,$$

$$\int \frac{\partial u_{1j}(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_j|)}{\partial r_1} \psi_{2j}(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_j|)\, d\boldsymbol{r}_j = 0,$$

$$\int \frac{\partial u_{1j}}{\partial r} \psi_{12}\, d\boldsymbol{r}_j = 0.$$

Действительно, они содержат интегрирование по углам вектора $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}_1}$, где u — изотропная функция соответствующих переменных. Поэтому окончательно

$$\frac{\partial \psi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1} = -\frac{1}{kT}\frac{\partial u_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1} - \frac{N}{VkT}\int \frac{\partial u_{1j}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\psi_{2j}\, d\boldsymbol{r}_j. \tag{41,25}$$

Возьмем дивергенцию от уравнения (41,25) по координатам $\boldsymbol{r}$ и учтем, что взаимодействие является кулоновским, так что

$$\operatorname{div}\frac{\partial u_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1} = \Delta u_{12}(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) = -p_1 p_2 \cdot 4\pi e^2 \delta(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|).$$

Тогда находим

$$\Delta\psi_{12} = \frac{4\pi p_1 p_2 e^2}{kT}\delta(r) + \frac{4\pi e^2 p_1 N}{VkT}\sum p_j \psi_{2j}.$$

Полагая $\psi_{12} = p_1 p_2 \psi(r)$, $\psi_{2j} = p_2 p_j \psi(r)$, находим окончательно

$$\Delta\psi - \varkappa^2\psi = \frac{4\pi e^2}{kT}\delta(r), \tag{41,26}$$

что совпадает с уравнением для средней плотности или потенциала (41,16). Член с δ-функцией позволяет автоматически учесть граничное условие (41,19).

Нетрудно видеть, что коррелятивная функция, удовлетворяющая (41,26), имеет вид

$$\psi_{12} = p_1 p_2\left(1 - \frac{e^2 e^{-\varkappa r}}{kTr}\right).$$

Найдем теперь термодинамические характеристики равновесной плазмы. Наличие кулоновского взаимодействия между ионами и электронами ответственно за дополнительную энергию, которую имеет плазма по сравнению с нейтральным газом при том же давлении. Эта энергия равна, очевидно, $E' = \frac{V}{2}\Sigma e n_i p_i \bar{\varphi}_i$, где n_i — среднее число частиц i-го сорта в единице объема, V — полный объем плазмы и $\bar{\varphi}_i$ — средний потенциал, создаваемый всеми ионами в месте нахождения i-го иона.

Среднее значение потенциала электрического поля при расстояниях $r < \varkappa$ (для таких расстояний выведенные выше формулы имеют количественный смысл) можно написать в виде

$$\bar{\varphi}_i = -e p_i \varkappa,$$

откуда

$$E' = -\frac{e^2 V\varkappa}{2}\Sigma n_i p_i^2 = -e^3\sqrt{\frac{\pi}{(kT)V}}(\Sigma n_i p_i^2)^{3/2}.$$

Полная энергия плазмы равна, следовательно,

$$E=\Sigma n_i V kT - e^3\sqrt{\frac{\pi}{kTV}}(\Sigma n_i p_i^2)^{3/2}.$$

Пользуясь формулой Гиббса — Гельмгольца, находим свободную энергию плазмы

$$F=-T\int\frac{E}{T^2}dT= -\Sigma n_i V kT-\frac{2e^3}{3}\sqrt{\frac{\pi}{kTV}}(\Sigma n_i p_i^2)^{3/2}.$$

Давление плазмы равно

$$p=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T=\Sigma n_i kT-\frac{e^3}{3V^{3/2}}\sqrt{\frac{\pi}{kT}}(\Sigma n_i p_i^2)^{3/2}.$$

Давление в плазме оказывается ниже, чем давление идеального газа той же плотности. Этот результат имеет простой смысл: притяжение между разноименными зарядами, которые располагаются ближе друг к другу, оказывается преобладающим над отталкиванием одноименных зарядов.

В заключение подчеркнем, что, хотя плазма является макроскопически однородной средой, в масштабе $r<1/\varkappa$ она неоднородна. Это обстоятельство имеет весьма важное значение для электромагнитных процессов в плазме.

Явление экранировки имеет очень большое значение для поведения плазмы. Совершенно очевидно, что всякий заряд, введенный в плазму, экранируется на расстоянии $1/\varkappa$.

Пусть, например, плазма находится в сосуде, ограниченном твердой стенкой. Если на стенке имеется поверхностный заряд, то создаваемое им поле будет экранироваться и проникать в плазму лишь на глубину $1/\varkappa$. Расстояние $1/\varkappa$ является, таким образом, толщиной того защитного слоя, который образуется на границе равновесной плазмы и изолирует ее от внешних влияний.

До сих пор мы считали плазму полностью равновесной. Очень часто приходится, однако, изучать плазму, находящуюся в неполном равновесии[1]). Именно, поскольку масса тяжелых ионов весьма велика по сравнению с массой электронов, обмен энергиями между ними при упругих столкновениях происходит весьма медленно. Напротив, обмен энергией электронов или ионов между собой идет существенно быстрее.

Если в некоторый начальный момент плазма находилась в неравновесном состоянии, то по прошествии времени релаксации τ установится равновесное (максвелловское) распределение у электронов и у ионов порознь. Каждую совокупность частиц можно характеризовать своей температурой, T_e и T_i соответственно. Однако выравнивание температур и установление общей

[1]) Ср. § 79 ч. III. Более подробно о неполных равновесиях см., например, В. Г. Левич, Введение в статистическую физику, Гостехиздат, 1954.

температуры T плазмы, отвечающей равновесию между электронами и ионами, требует времени релаксации $\tau_T \gg \tau$.

Наличие неполного равновесия в плазме, характеризующейся при этом двумя температурами, не очень сильно отражается на описанном выше свойстве экранирования.

§ 42. Плазма в стационарном электромагнитном поле

Если поместить плазму в стационарное внешнее электрическое поле $\boldsymbol{E}$, то в ней возникнет электрический ток, который можно вычислить.

В отсутствие внешнего электрического поля имеет место максвелловское распределение скоростей у ионов и электронов в плазме. При наложении стационарного внешнего электрического поля $\boldsymbol{E}$ начнется преимущественное движение электронов и ионов в разных направлениях. В плазме возникает ток в направлении приложенного электрического поля, плотность которого равна

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}. \qquad (42,1)$$

До сих пор мы ограничивались макроскопическим описанием и не пытались выделить смысл электропроводности σ, считая ее макроскопической характеристикой среды. Здесь, однако, необходимо, на основе весьма грубой модели оценить значение σ.

Мы будем исходить из предположения, что ионы и электроны образуют идеальный газ. Средние скорости ионов и электронов, массы и длины свободного пробега обозначим соответственно v_i, m_i, λ_i. В отличие от нейтрального газа, при наличии внешнего электрического поля, в плазме ионы и электроны испытывают ускорение на длине свободного пробега между соударениями.

В ч. VI мы дадим достаточно полную теорию. Однако для наших целей достаточно грубой оценки. Средняя скорость, приобретаемая частицей под действием поля $\boldsymbol{E}$, равна по порядку величины $u \sim \frac{e_i}{m_i} E\tau_i$, где τ_i — среднее время полета между двумя последовательными соударениями $\tau_i \sim \lambda_i / v_i$.

Систематическое движение со скоростью u приводит к переносу заряда в направлении поля. Плотность тока может быть написана в виде

$$j = \sum n_i e_i u_i \sim \left(\sum \frac{n_i e_i^2 \tau_i}{m_i} \right) \boldsymbol{E}.$$

Таким образом, с точностью до числового множителя

$$\sigma \sim \sum \frac{n_i e_i^2 \tau_i}{m_i}. \qquad (42,2)$$

Формула (42,2) представляет запись формулы для электропроводности на случай двух сортов носителей тока.

Для вычисления времени релаксации $\tau = \frac{\lambda}{v}$ необходимо детально рассмотреть взаимодействие электронов с положительными ионами и между собой. Для этого необходимо найти эффективные сечения всех процессов рассеяния в зависимости от скорости и решить соответствующее кинетическое уравнение. Такое вычисление дано в ч. VI книги.

Мы будем полагать, что значение τ рассчитано или известно из измерений. В слабых полях и при сравнительно высоких давлениях электропроводность системы, состоящей из электронов и беспорядочно расположенных ионов, имеет постоянное значение и не зависит от приложенного поля. Равновесное распределение электронов по скоростям лишь в малой степени нарушается внешним полем.

В случае сильных полей и низких давлений картина изменяется. Под влиянием приложенного поля электроны ускоряются (поскольку длина свободного пробега в разреженном газе достаточно велика) и приобретают энергию значительно большую, чем энергия теплового движения.

С другой стороны, при соударениях с ионами электроны теряют энергию. Расчет показывает, что у электронов может установиться некоторое распределение по скоростям, при котором увеличение их энергии при разгоне в поле компенсируется потерями энергии при соударениях. Такое распределение не является равновесным. Тем не менее, поскольку оно не изменяется по времени (т. е. является стационарным), можно говорить об эффективной температуре электронов, равной их средней энергии. Она оказывается порядка

$$T_{\text{эл}} \sim \frac{1}{k} \sqrt{\frac{M_{\text{ион}}}{m_{\text{эл}}}} (\lambda_{\text{эл}} eE), \tag{42,3}$$

где $M_{\text{ион}}$ и $m_{\text{эл}}$ — массы иона и электрона, и весьма большой по сравнению с температурой ионов и нейтральных молекул. При этом электропроводность

$$\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{E}}. \tag{42,4}$$

Рассмотрим теперь плазму, помещенную в постоянные электрическое и магнитное поля. Как мы увидим ниже, магнитное поле оказывает весьма существенное влияние на поведение плазмы

К системе электронов, движущихся со скоростью v, можно применить рассуждения § 23.

Именно, при движении электронов относительно магнитного поля индуцируется электрическое поле напряженности

$$\boldsymbol{E}_{\text{инд}} = \frac{\mu}{c}[\boldsymbol{vH}], \tag{42,5}$$

где μ — магнитная проницаемость среды (плазмы). При наличии электрического поля $\boldsymbol{F}$ в системе электронов возникает ток

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{\text{инд}}) = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{\mu}{c}[\boldsymbol{vH}]\right) = \sigma\boldsymbol{E} + \frac{\sigma\mu}{c}[\boldsymbol{vH}]. \tag{42,6}$$

Выражая σ через входящие в нее величины и замечая, что $\boldsymbol{j} = n_{\text{эл}}e\boldsymbol{v}$, можем переписать последнюю формулу в другом виде:

$$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E} + \alpha[\boldsymbol{jH}], \tag{42,7}$$

где

$$\alpha = \frac{e\mu\tau_{\text{эл}}}{m_{\text{эл}}c} = \frac{\omega_H\mu\tau_{\text{эл}}}{H}, \tag{42,8}$$

ω_H — циклотронная частота для электронов.

Следует заметить, что формула (42,7) остается справедливой и при учете распределения электронов по скоростям, которое сказывается лишь на числовом коэффициенте α.

Рассмотрим два случая:

1) электрическое и магнитное поля параллельны, $\boldsymbol{E}\parallel\boldsymbol{H}$,

2) поля перпендикулярны друг к другу, $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$.

В первом случае магнитное поле не влияет непосредственно на плотность тока:

$$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E},$$

так что

$$[\boldsymbol{jH}] = 0.$$

Больший интерес представляет второй случай. Для нахождения вектора $\boldsymbol{j}$ из (42,7), умножим (42,7) сперва скалярно, а затем векторно на $\boldsymbol{H}$. Тогда имеем

$$(\boldsymbol{jH}) = \sigma(\boldsymbol{EH}) + \alpha([\boldsymbol{jH}]\boldsymbol{H}) = +\alpha([\boldsymbol{jH}]\boldsymbol{H})$$

или, поскольку $([\boldsymbol{jH}]\boldsymbol{H}) = (\boldsymbol{j}[\boldsymbol{HH}]) = 0$, получаем

$$(\boldsymbol{jH}) = 0. \tag{42,9}$$

Далее,

$$[\boldsymbol{jH}] = \sigma[\boldsymbol{EH}] + \alpha[[\boldsymbol{jH}]\boldsymbol{H}] = \sigma[\boldsymbol{EH}] + \alpha\boldsymbol{H}(\boldsymbol{jH}) - \alpha\boldsymbol{j}H^2 = \\ = \sigma[\boldsymbol{EH}] - \alpha\boldsymbol{j}H^2. \tag{42,10}$$

Отсюда, подставляя (42,10) в (42,7), находим

$$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E} + \alpha\sigma[\boldsymbol{EH}] - \alpha^2H^2\boldsymbol{j},$$

или

$$\boldsymbol{j} = \frac{\sigma}{1+\alpha^2H^2}\boldsymbol{E} + \frac{\sigma\alpha}{1+\alpha^2H^2}[\boldsymbol{EH}], \tag{42,11}$$

Формула (42,11) показывает, что в магнитном поле плотность тока более не параллельна электрическому полю. Закон Ома в обычном виде места не имеет.

Из формулы (42,11) следует, что в направлении электрического поля плотность тока

$$j_{\parallel}=\frac{\sigma}{1+\alpha^2H^2}E=\sigma_{\parallel}E. \qquad (42,12)$$

Электропроводность плазмы $\sigma_{\parallel}$ в случае $\boldsymbol{H}\perp\boldsymbol{E}$ оказывается в $(1+\alpha^2H^2)$ раз меньше электропроводности в отсутствие магнитного поля.

Наряду с током в направлении электрического поля возникает ток $j_{\perp}$ в направлении, перпендикулярном $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{H}$, и равный по абсолютной величине

$$j_{\perp}=\frac{\sigma\alpha H}{1+\alpha^2H^2}E=\sigma_{\perp}E. \qquad (42,13)$$

Ток $j_{\perp}$ носит название тока Холла, а $\sigma_{\perp}=\sigma_{\parallel}\alpha H$ — проводимости Холла. При $\alpha H=\mu\tau\omega_H\gg 1$ ток Холла может существенно превышать обычный ток. Условие $\tau_{эл}\omega_H\gg 1$ можно представить в наглядном виде:

$$\tau_{эл}\omega_H=\frac{eH}{mc}\frac{\lambda}{v}\sim\frac{\lambda}{R},$$

где $R=\frac{mcv}{eH}$ — радиус окружности, описываемой электроном в магнитном поле H. Условие $\tau_{эл}\omega_H\gg 1$ выполняется в сильном магнитном поле и разреженной плазме.

Влияние магнитного поля на ток в плазме и, в частности, появление компоненты тока $j_{\perp}$ имеет простой смысл. Оно связано с описанным в § 39 ч. I характером движения заряда в скрещенных электрических и магнитных полях. Именно, в таких полях частицы совершают дрейф, скорость и направление которого определяются формулой (39,15) ч. I.

Движение зарядов в направлении, перпендикулярном $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, приводит к появлению тока с плотностью $j_{\perp}$. При выполнении обратного неравенства $\omega\tau_{эл}\ll 1$ влияние магнитного поля на проводимость становится незначительным.

На изменениях полученных выражений, связанных с движением положительных ионов, мы останавливаться не будем. Поскольку их масса велика, обычно для них выполнено неравенство $\omega\tau_{ион}\ll 1$ и магнитное поле существенного влияния на ионную часть электропроводности не оказывает.

§ 43. Магнитная изоляция и пинч-эффект

Электрические и магнитные силы, действующие на плазму, вызывают в ней важные механические эффекты. Напротив, пространственное перемещение плазмы оказывает существенное влияние на ее поведение в электромагнитных полях.

Для рассмотрения взаимного влияния поля и механического движения плазмы выпишем общие уравнения, описывающие свойства плазмы.

Электромагнитное поле в плазме описывается уравнениями Максвелла. Уравнения движения плазмы представляют уравнения гидродинамики[1]. Пренебрегая вязкостью плазмы, можно написать уравнения движения в виде

$$\delta_0 \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p,$$

где $\boldsymbol{F}$ — пондеромоторная сила, действующая на единицу объема плазмы, δ_0 — плотность и p — давление газа.

Если в плазме течет ток $\boldsymbol{j}$, то в магнитном поле

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu}{c}[\boldsymbol{jH}]. \tag{43,1}$$

Поэтому

$$\delta_0 \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \frac{\mu}{c}[\boldsymbol{jH}]. \tag{43,2}$$

В частности, в неподвижной плазме, при $\boldsymbol{v} = 0$, можно написать уравнение гидростатики

$$\operatorname{grad} p = \frac{\mu}{c}[\boldsymbol{jH}]. \tag{43,3}$$

Применим уравнение гидростатики к рассмотрению важного явления магнитной изоляции плазмы.

Рассмотрим плазму, помещенную в магнитное поле $\boldsymbol{H}$, перпендикулярное вектору тока $\boldsymbol{j}$. Тогда из уравнения (43,3) ясно, что

$$\operatorname{grad} p \neq 0,$$

и давление в плазме изменяется от точки к точке. Уравнение (43,3) можно проинтегрировать, если исключить из него плотность тока с помощью уравнения Максвелла.

Имеем из (43,3) и (22,5)

$$\operatorname{grad} p = \frac{\mu}{4\pi}[\operatorname{rot}\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}]. \tag{43,4}$$

[1] См., например, Л. Г. Лойцянский, Механика жидкостей и газов, Гостехиздат, 1950; Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.

С помощью векторного равенства (I, 48) имеем

$$[\operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}] = (\boldsymbol{H} \operatorname{grad}) \boldsymbol{H} - \operatorname{grad} \frac{H^2}{2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\mu}{4\pi} \operatorname{grad} \frac{H^2}{2} + \frac{\mu}{4\pi} (\boldsymbol{H} \operatorname{grad}) \boldsymbol{H}. \qquad (43,5)$$

Выберем направление поля за ось x и рассмотрим частный случай, когда напряженность магнитного поля не изменяется в продольном направлении $\left(\text{т. е. } \frac{\partial H}{\partial x} = 0\right)$, но может изменяться по произвольному закону в зависимости от координат y, z. Иными словами, рассмотрим поле с переменной в пространстве напряженностью $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(y, z)$. При этом, очевидно, имеем

$$(\boldsymbol{H} \operatorname{grad}) \boldsymbol{H} = H \frac{\partial H(y, z)}{\partial x} = 0,$$

и формула (43,5) дает

$$p + \frac{\mu H^2}{8\pi} = \text{const}. \qquad (43,6)$$

Величина $\frac{\mu H^2}{8\pi}$ представляет магнитное давление, т. е. силу, действующую на единицу площади воображаемой плоскости, проведенной в газе.

Формула (43,6) показывает, что полное давление в плазме, складывающееся из магнитного давления $\frac{\mu H^2}{8\pi}$ и газового давления p, должно оставаться постоянным в пространстве.

Пусть, например, плазма, находящаяся в некотором магнитном поле, не ограничена непроницаемыми стенками. Тогда соотношение (43,6) показывает, что полное давление ни в какой точке плазмы не может падать до нуля. В области пространства, не заполненном плазмой, значение H больше, чем во внутренней области, заполненной плазмой. Это означает, что плазма не может расширяться в пустоту. Магнитное поле изолирует плазму, заменяя непроницаемую стенку.

Другим важным гидростатическим эффектом является пинч-эффект или явление плазменного шнура. Это явление заключается в сжатии плазмы собственным магнитным полем тока.

Пусть плазма представляет цилиндр радиуса R (образующую которого направим по оси z), вдоль которого течет ток с плотностью j. Магнитное поле тока создает магнитное давление, которое должно уравновешиваться давлением в плазме. Проще всего найти давление в плазме, считая плотность тока j

---

[1]) Аналогичный результат можно получить в общем виде с помощью формулы (43,5).

постоянной по сечению[1]) (т. е. $j = j_0$ при $r < R$, $j = 0$ при $r > R$). Тогда (43,3) в цилиндрических координатах приобретает вид

$$\frac{dp}{d\rho} = -\frac{jH_\varphi}{c},$$

где магнитное поле H_φ выражается формулой (17,11).

Интегрирование дает

$$p = p_0 - \frac{\pi j^2 \rho^2}{c^2}, \qquad \rho < R, \tag{43,7}$$

$$p = 0, \qquad \rho > R. \tag{43,8}$$

Здесь $p_0 = nkT$ — давление и n_0 — плотность газа в центре плазменного цилиндра.

Формулы (43,7)—(43,8) показывают, что газовое давление и соответственно плотность газа в центре выше, чем на периферии цилиндра. Собственное магнитное поле сжимает и удерживает плазменный цилиндр. При этом радиус плазменного цилиндра имеет постоянное значение, а выделение джоулева тепла приводит к ее разогреву.

Явление самосжатия плазменного цилиндра, получившее название «пинч-эффекта», приводит к отрыву плазмы от стенок сосуда, в котором происходит газовый разряд, и к образованию более или менее тонкого плазменного шнура.

Примерами плазменного шнура может служить искра или молния.

Образование и сжатие плазменного шнура имеет, естественно, особенно большое значение при больших плотностях тока.

Мы ограничились здесь лишь нахождением распределения давления в предположении о стационарном характере поведения плазмы. В действительности для реализации пинч-эффекта важно нестационарное движение плазмы, приводящее к колебаниям плазменного цилиндра как целого, могущим приводить к потере устойчивости и разрыву.

Изучение полной картины нестационарных явлений, возникающих при пинч-эффекте, является весьма сложной задачей[1]).

§ 44. Магнитное поле в движущейся плазме

В ряде важных проблем существенную роль в поведении плазмы играют гидродинамические эффекты, связанные с макроскопическим движением плазмы. Для изучения подобного рода

---

[1]) По вопросам плазменного состояния вещества см. А. Спитцер, Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957; Т. Коулинг, Магнитная гидродинамика, ИЛ, 1958; Х. Альфвен, Космическая электродинамика, ИЛ, 1952; сб. статей «Управляемые термоядерные реакции», Атомиздат, 1960; Л. А. Арцимович, Управляемые термоядерные реакции, Физматгиз, 1961.

эффектов необходимо сформулировать систему уравнений для электромагнитного поля в движущейся среде.

На основании результатов § 23 можно написать

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\left[\frac{\boldsymbol{v}_0}{c}\boldsymbol{B}\right]. \qquad (44,1)$$

Кроме того, если поля во времени изменяются достаточно медленно и можно пренебречь током смещения, распределение магнитного поля определяется уравнениями (22,5). С помощью закона Ома представим (44,1) в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{B}] = -c \operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{B}]. \qquad (44,2)$$

Исключая из (44,2) и (22,5) плотность тока, имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{B}].$$

Согласно (I, 50) и учитывая (22,5), находим окончательно

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\Delta\boldsymbol{B} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{B}]. \qquad (44,3)$$

Сравнивая (44,3) с (30,1), мы видим, что в отличие от неподвижной среды, в уравнении (44,3) содержится слагаемое $\operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{B}]$. В отсутствие этого члена, уравнение (44,3) выражает затухание магнитного поля в проводящей среде на глубине скин-слоя.

Здесь нас в большей мере будет интересовать случай, когда первым слагаемым в правой части (44,3) можно пренебречь по сравнению со вторым. Для этого требуется, чтобы скорость движения плазмы v_0 и ее проводимости σ были достаточно велики[1]).

Этот случай сравнительно трудно (хотя и возможно) реализовать в лабораторных условиях. Однако при изучении явлений, происходящих в космических масштабах, реализуется именно он. Опуская в уравнении (44,3) малое слагаемое, можно переписать его в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{B}]. \qquad (44,4)$$

Соотношение (44,4) имеет важный смысл. Именно, согласно (23,6), равенство (44,4) означает, что поток магнитной индукции через контур, каждая точка которого движется вместе с жидкостью, является постоянным во времени. Наглядно условие (44,4) можно представить себе с помощью линий напряженности магнитного поля. Равенство (44,4) означает, что линии

---

[1]) Более точная формулировка может быть найдена в цитированных выше монографиях Спитцера или Коулинга.

поля движутся вместе с веществом плазмы, будучи как бы «приклеены» или «вморожены» в вещество.

Рассмотрим некоторый замкнутый «жидкий контур», т. е. замкнутый контур, соединяющий частицы жидкости, каждая из которых движется по своей линии гидродинамического тока. Из (44,4) следует, что число линий магнитного поля, переходящих через жидкий контур, остается постоянным. Жидкие частицы как бы скользят по линиям напряженности, не пересекая их в поперечном направлении.

Рассмотрим теперь движение плазмы, перпендикулярное к магнитному полю. Особенности такого движения проще всего представить себе, рассмотрев простой случай.

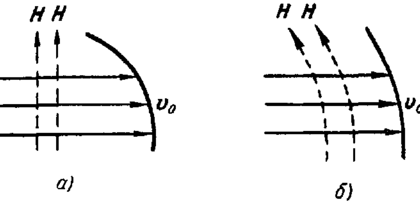


Рис. 101.

Пусть в начальный момент времени плазма покоилась, а затем была приведена в движение с профилем скорости, изображенным на рис. 101 стрелками. Линии напряженности магнитного поля в неподвижной плазме изображены на рис. 101, *а* пунктиром. Движение плазмы, «увлекающее» линии напряженности, придает им форму, представленную пунктирными линиями на рис. 101, *б*.

В неподвижной плазме магнитное поле имеет напряженность $H_x^{(0)}$. В движущейся плазме, помимо компоненты поля H_x, возникает компонента $H_y \neq 0$. Нетрудно показать, что при деформации линии магнитного поля его напряженность возрастает.

Пусть уравнение линии напряженности поля, деформированной движением, будет $y(x)$. Допустим, что искривление линии напряженности мало. Тогда можно написать

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_y}{H_x} \approx \frac{H_y}{H_x^{(0)}},$$

откуда

$$H_y = H_x^{(0)} \frac{dy}{dx}.$$

Найдем изменение энергии магнитного поля при такой деформации линий поля. Для придания большей наглядности получаемым формулам, отнесем эту энергию к одной линии магнитного поля. Для этого заметим, что через единичную площадку, перпендикулярную магнитному полю, по определению проходит H линий поля. Если

$$U = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 \, dx \, dS = \frac{\mu}{8\pi} \int (H_x^{(0)})^2 \, dx \, dS = \mu \frac{(H_x^{(0)})^2}{8\pi} S \int dx$$

— полная начальная энергия поля, то энергия, отнесенная к единичной площадке, есть $\frac{U}{S}=\frac{\mu}{8\pi}(H_x^{(0)})^2\int dx$ и соответственно энергия, приходящаяся на одну линию, равна

$$w_0=\frac{U}{SH_x^{(0)}}=\frac{1}{8\pi}\mu H_x^{(0)}\int dx.$$

После деформации та же величина может быть записана в виде

$$w=\frac{\mu}{8\pi H_x^{(0)}}\left\{\int\left[H_x^2+H_y^2\right]dx\right\}\approx$$

$$\approx\frac{\mu}{8\pi H_y^{(0)}}\left\{\int (H_x^{(0)})^2\,dx+\int (H_x^{(0)})^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx\right\}=$$

$$=w_0+\frac{\mu H_x^{(0)}}{8\pi}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Приращение энергии магнитного поля, отнесенное к одной линии поля, равно

$$\Delta w=w-w_0=\frac{\mu H_x^{(0)}}{8\pi}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \qquad (44,5)$$

Это приращение энергии происходит за счет работы, выполняемой движущейся жидкостью против упругой силы сопротивления линии напряженности.

Интересно сравнить полученное выражение с потенциальной энергией деформированной упругой струны. Если обозначить через α ее натяжение, то последняя величина может быть представлена в виде

$$\Delta U=\alpha\int\left\{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}-1\right\}dx,$$

где $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}-1$ — геометрическое удлинение струны при деформации. Считая отклонение малым, имеем [1])

$$\Delta U\approx\frac{\alpha}{2}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \qquad (44,6)$$

Сравнение (44,6) с (44,5) показывает, что линия напряженности магнитного поля в плазме ведет себя как струна с эффективным натяжением

$$\alpha_{\text{эфф}}=\frac{\mu H_x^{(0)}}{4\pi}. \qquad (44,7)$$

[1]) См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.

Если деформации линий поля нельзя считать малыми, выведенное выражение для увеличения энергии поля оказывается неприменимым. Однако общий результат сохраняется: деформация и растяжение линий напряженности магнитного поля, увлекаемых движущейся жидкостью, отвечает усилению поля.

Таким образом, движение проводящей жидкости может, в принципе, служить причиной генерации и усиления магнитного поля. С другой стороны, если жидкость помещена в достаточно сильное магнитное поле, то это поле может препятствовать движению жидкости, которая как бы отвердевает в магнитном поле. Магнитное поле затрудняет также переход от ламинарного движения проводящей жидкости к турбулентному.

Эти результаты оказалось возможным непосредственно проверить в лабораторных экспериментах.

В следующем параграфе будут рассмотрены некоторые важные следствия описанного свойства «вмороженного магнитного поля».

§ 45. Магнитогидродинамические волны

Аналогия между свойствами упругой нити и линии напряженности магнитного поля естественно наводит на мысль о возможности возникновения колебаний магнитного поля около некоторой равновесной конфигурации.

Рассмотрим плазменную жидкость, помещенную в магнитное поле напряженности $\boldsymbol{H}_0$. Поле $\boldsymbol{H}_0$ будем считать однородным и постоянным во времени. Пусть в жидкости возникает бесконечно малое возмущение в виде поля скоростей $\boldsymbol{v}$. Будем считать, что проводимость плазмы бесконечно велика, так что движение плазменной жидкости полностью увлекает с собой линии напряженности магнитного поля.

Тогда в поле скоростей напряженность магнитного поля можно представить в виде

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}, \tag{45,1}$$

где $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}, t)$ — бесконечно малое возмущение. Подставляя (45,1) в уравнение (44,4) и пренебрегая произведением бесконечно малых величин, имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}_0] = (\boldsymbol{H}_0 \operatorname{grad})\boldsymbol{v}. \tag{45,2}$$

При этом мы воспользовались формулой (I,45) и условием несжимаемости жидкости:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{45,3}$$

Уравнение движения жидкости (43,2) можно упростить, заметив, что в нашем случае бесконечно малой скорости можно написать

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\operatorname{grad})\boldsymbol{v}\approx\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t},$$

а пондеромоторную силу представить, как и при выводе (43,5), в виде

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mu}{c}[\boldsymbol{jH}]=\frac{\mu}{4\pi}[\operatorname{rot}\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{H}]\approx\frac{\mu}{4\pi}[\operatorname{rot}\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{H}_0]$$

с точностью до величин второго порядка малости. По формуле (I, 47) имеем

$$[\operatorname{rot}\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{H}_0]=(\boldsymbol{H}_0\operatorname{grad})\boldsymbol{h}-\operatorname{grad}(\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{h}).$$

При этом мы учитываем, что $\boldsymbol{H}_0$ — постоянный вектор. Поэтому уравнения движения жидкости (43,2) гласят:

$$\delta_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\operatorname{grad}\left(p+\frac{\mu(\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{h})}{4\pi}\right)+\frac{\mu}{4\pi}(\boldsymbol{H}_0\operatorname{grad})\boldsymbol{h}. \qquad (45,4)$$

Не ограничивая общности, можно выбрать направление невозмущенного поля $\boldsymbol{H}_0$ за ось x. Тогда уравнения (45,2) и (45,4) перепишутся в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}=\boldsymbol{H}_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}, \qquad (45,5)$$

$$\delta_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\operatorname{grad}\left(p+\frac{\mu H_0 h}{4\pi}\right)+\frac{\mu}{4\pi}\boldsymbol{H}_0\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x}. \qquad (45,6)$$

Легко показать, что решение системы уравнений (45,5)—(45,6) представляет систему плоских волн, распространяющихся вдоль оси x (в направлении невозмущенного поля).

Из условий (45,3) и (22,5) вытекает, что такие волны должны быть поперечными. Выбирая вектор $\boldsymbol{h}$ за ось y и проектируя уравнения (45,5)—(45,6) на оси координат, имеем

$$h_x=0, \qquad (45,7)$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial t}=H_0\frac{\partial v_y}{\partial x}, \qquad (45,8)$$

$$h_z=0, \qquad (45,9)$$

$$v_x=0, \qquad (45,10)$$

$$\delta_0\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\mu}{4\pi}H_0\frac{\partial h_y}{\partial x}, \qquad (45,11)$$

$$v_z=0. \qquad (45,12)$$

При этом мы предположили, что давление также зависит только от координаты x и вектор ∇p не имеет y-й и z-й проекций.

Дифференцируя (45,11) по t и учитывая (45,8), получаем

$$\frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_{\text{м}}^2} \frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} = 0. \tag{45,13}$$

Аналогично, дифференцируя (45,11) по t и учитывая (45,8):

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_{\text{м}}^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = 0, \tag{45,14}$$

где обозначено

$$c_{\text{м}}^2 = \frac{\mu H_0^2}{4\pi\delta_0}. \tag{45,15}$$

Уравнения (45,13) и (45,14) показывают, что возмущение, возникшее в плазме, распространяется с постоянной скоростью $c_{\text{м}}$, определяемой формулой (45,15) в виде плоских волн вдоль магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$:

$$v_y = ae^{i(kx-\omega t)}, \tag{45,16}$$

$$h_y = be^{i(kx-\omega t)}. \tag{45,17}$$

Эти волны получили название магнитогидродинамических волн Альфвена.

Мы для краткости записи считаем эти волны монохроматическими и распространяющимися в положительном направлении оси x. В общем случае можно разложить сложные волны на совокупность монохроматических волн. Замечательной особенностью магнитогидродинамических волн является то, что они распространяются в несжимаемой проводящей жидкости.

Как известно, в непроводящей жидкости могут распространяться только звуковые волны, связанные с изменением плотности среды.

Поперечный характер магнитогидродинамических волн ясен из предыдущего. Скорость их распространения определяется свойствами среды и напряженностью постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$. Связь между амплитудами магнитного поля и скорости получается подстановкой (45,16) и (45,17) в исходные уравнения:

$$|v_y| = \sqrt{\frac{\mu}{4\pi\delta_0}}\,|h_y|.$$

Само собой разумеется, что наряду с магнитным полем в магнитогидродинамической волне имеется и электрическое поле,

определяемое уравнением Максвелла (22,6):

$$E_z = |h_y| \frac{H_0 \mu^{3/2}}{c\sqrt{4\pi\delta_0}} e^{i(kx-\omega t)}.$$

Полезно заметить, что магнитогидродинамические волны могут быть получены из наглядных соображений, связанных с аналогией между векторными линиями магнитного поля и упругой струной. Как известно[1]), уравнение движения струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0,$$

где ζ — поперечное смещение и c — скорость распространения волн по струне, равная

$$c = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta_0}}.$$

Если вместо α подставить ее эффективное значение (44,7) то c совпадает со скоростью распространения магнитогидродинамических волн.

Магнитогидродинамические волны по существу являются специальным случаем электромагнитных волн в проводящей среде. Именно, при наличии достаточно сильного магнитного поля в проводящей жидкой среде происходит сильное затухание электромагнитных волн, распространяющихся во всех направлениях, кроме направления магнитного поля. Такнм образом, проводящая жидкость имеет резко выраженную анизотропию электромагнитных свойств.

Если написать скорость распространения магнитогидродинамических волн в виде

$$c_м = \frac{c_{эфф}}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c_{эфф}$ — скорость, заменяющая скорость света в аналогичной формуле, то диэлектрическая проницаемость проводящей жидкости оказывается равной

$$\varepsilon = \frac{4\pi c_{эфф}^2 \delta_0}{\mu^2 H_0^2}.$$

При $c_{эфф} \approx 100 \frac{см}{сек}$, что отвечает значениям поля $H_0 \approx 300$ *гс* и $\delta_0 \approx 1$, ε имеет порядок $3 \cdot 10^{18}$.

[1]) См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951, стр. 22.

Магнитогидродинамические волны, как и всякие электромагнитные волны, переносят энергию. Поток энергии, переносимый магнитогидродииамической волной, распространяется со скоростью $c_м$, которая в достаточио сильиом поле H_0, весьма велика по сравнению со скоростью движения вещества в плазменной жидкости $|v|$.

Таким образом, в отличие от обычной непроводящей жидкости, в плазме, находящейся в магнитном поле H_0, всегда имеется механизм, обеспечивающий быстрый перенос энергии возникающего возмущения.

Описанные выше свойства плазменного состояния определяют поведение вещества при высоких температурах, когда атомы являются в значительной мере ионизованными. Поэтому изучение плазменного состояния важной, с одной стороны, для астрофизики, а с другой — для работы в области получения управляемых термоядерных реакций.

Мы ие можем в рамках этой киити осветить указанные обширные области исследований и отсылаем читателя к специальной литературе.

§ 46. Плазма в высокочастотном электрическом поле

Выше, при рассмотрении поведения плазмы в стационарных и квазистационарных полях, мы пренебрегали токами смещения и считали плазму однородной проводящей жидкостью. Это приближение магнитной гидродинамики оказывается, однако, неудовлетворительным в области высокочастотных процессов.

При процессах, происходящих в полях высокой частоты, сказывается существенное различие в массах электронов и тяжелых ионов. В этом случае достаточно хорошим приближением часто оказывается так называемая двухжидкостная модель.

В приближении двухжидкостной модели (ее лучше было бы иазвать моделью газовой смеси) ионы и электроны считаются двумя идеальными газами, движущимися независимо друг от друга под действием соответствующих сил.

Для электронов и ионов порознь можно написать уравнения движения — уравнения гидродинамики:

$$mn\frac{dv}{dt} = -\nabla p + enE. \qquad (46,1)$$

Все величины — заряд, масса и число частиц n в 1 $см^3$ — отнесены к электронам и ионам. Для краткости записи мы опускаем индекс, характеризующий сорт частиц. Уравнение непрерывности

также записывается отдельно для электронов и ионов

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\boldsymbol{v} = 0. \tag{46,2}$$

Давление в плазме для каждого сорта частиц мы будем считать равным газовому давлению

$$p = nkT. \tag{46,3}$$

Наконец, будем считать, что колебания, которые совершают заряды под действием поля $\boldsymbol{E}$, являются незатухающими.

В части VI вопрос о затухании будет рассмотрен детально и будет показано, что в действительности в плазме происходят диссипативные процессы, играющие важную роль в ряде процессов. Однако здесь мы можем пренебречь диссипативными процессами и считать колебания адиабатическими, так что давление и плотность связаны между собой уравнением адиабаты.

С учетом этого, для ∇p в (46,1) можно написать

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_S \nabla n,$$

так что

$$mn\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_S \nabla n + en\boldsymbol{E}. \tag{46,4}$$

Будем считать, что поле $\boldsymbol{E}$ — поле электромагнитной волны в плазме, изменяется по закону

$$\boldsymbol{E} \sim e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}.$$

Будем считать, что под действием поля заряды совершают малые колебания; происходящие при этом изменения плотности в плазме также малы, и можно написать

$$n = n_0 + n', \qquad n' \ll n_0,$$

где n_0 — плотность плазмы в отсутствие внешнего поля $\boldsymbol{E}$. Будем пытаться искать решение написанной системы уравнений в виде

$$\boldsymbol{v} \sim n' \sim p' \sim e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}, \tag{46,5}$$

пренебрегая квадратами указанных малых величин. Тогда имеем

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{46,6}$$

$$mn_0\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_S \nabla n' + en_0\boldsymbol{E}. \tag{46,7}$$

Подставляя в (46,6) и (46,7) экспоненциальные функции, находим

$$n' = \frac{n_0}{\omega}(\boldsymbol{kv}), \tag{46,8}$$

$$\boldsymbol{v} = i\frac{e\boldsymbol{E}}{m\omega} + \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_S \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{kv})}{m\omega^2}. \tag{46,9}$$

Если выбрать направление вектора $\boldsymbol{k}$ за ось z, то в изотропной плазме вектор скорости можно представить в виде $\boldsymbol{v} = (v_\parallel, \boldsymbol{v}_\perp)$, где $v_\parallel$ — компонента вектора в направлении распространения волны и $\boldsymbol{v}_\perp$ — вектор скорости в плоскости (xy). Из (46,9) имеем

$$\boldsymbol{v}_\perp = i\frac{e}{m\omega}\boldsymbol{E}_\perp, \qquad v_\parallel = \frac{ieE_z}{m\omega} + \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_S \frac{k^2}{m\omega^2} v_\parallel, \tag{46,10}$$

или

$$v_\parallel = \frac{ieE_z}{m\omega\left(1 - \dfrac{k^2}{n_0\gamma_S m\omega^2}\right)}, \tag{46,11}$$

где

$$\gamma_S = \frac{1}{n_0}\left(\frac{\partial n}{\partial p}\right)_S$$

— согласно (31,10) ч. III, коэффициент адиабатической сжимаемости.

Зная скорость, приобретаемую зарядом в поле волны, мы можем написать среднюю плотность тока в виде

$$\boldsymbol{j} = \sum e n_0 \boldsymbol{v}.$$

Суммирование ведется по всем сортам частиц. Учитывая (46,10) и (46,11), находим

$$\boldsymbol{j}_\perp = i\sum \frac{e^2 n_0}{m\omega}\boldsymbol{E}_\perp, \tag{46,12}$$

$$j_\parallel = i\sum \frac{e^2 n_0}{m\omega^2\left(1 - \dfrac{k^2}{n_0\gamma_S m\omega^2}\right)} E_\parallel. \tag{46,13}$$

Пользуясь общей формулой (31,12), находим для компонент тензора диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_\perp = 1 - \sum \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2}, \tag{46,14}$$

$$\varepsilon_\parallel = 1 - \sum \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2\left(1 - \dfrac{k^2}{n_0\gamma_S m\omega^2}\right)}. \tag{46,15}$$

Мы видим, что в изотропной плазме имеет место явление пространственной дисперсии: ее диэлектрические свойства описываются тензором ε_{ij}, зависящим от ω и k и разным в направлении распространения и в перпендикулярном направлении.

Мы можем теперь воспользоваться полученными формулами для нахождения конкретного закона дисперсии в плазме, воспользовавшись дисперсионными уравнениями (33,17) и (33,18). Введем, прежде всего, важные величины

$$\omega_L^{\text{эл}} = \frac{4\pi e^2 n_0^{\text{эл}}}{m}, \tag{46,16}$$

именуемые плазменной или лангмюровской частотой для электронов, и

$$\omega_L^{\text{ион}} = \frac{4\pi e^2 n_0^{\text{ион}} Z^2}{m_{\text{ион}}}, \tag{46,17}$$

представляющую ионную плазменную частоту, которая меньше электронной в отношении $\frac{m}{m_{\text{ион}}}$. При обычной концентрации электронов в плазме $\left(n_0^{\text{эл}} \sim 10^{15}\ \textit{см}^{-3},\ \omega_L \sim 6 \cdot 10^{11}\ \textit{сек}^{-1}\right)$ диэлектрическая проницаемость плазмы оказывается всегда меньшей единицы. Тогда имеем

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \simeq 1 - \frac{\left(\omega_L^{\text{эл}}\right)^2}{\omega^2}, \tag{46,18}$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\left(\omega_L^{\text{эл}}\right)^2}{\omega^2\left(1 - \frac{k^2}{n_0\gamma_S m\omega^2}\right)} - \frac{\left(\omega_L^{\text{ион}}\right)^2}{\omega^2\left(1 - \frac{k^2}{n_0\gamma_S m\omega^2}\right)}. \tag{46,19}$$

С учетом этих значений (33,17) дает

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{(\omega^{\text{эл}})^2}{\omega^2}\right) - k^2 = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \left(\omega_L^{\text{эл}}\right)^2 + c^2k^2. \tag{46,20}$$

Формула (46,20) определяет закон дисперсии поперечных электромагнитных волн в плазме. При $\omega > \omega_L^{\text{эл}}$ каждой частоте отвечает распространение двух волн с различной поляризацией.

При $\omega < \omega_L^{\text{эл}}$ значения волнового числа k оказываются мнимыми. Это означает, что волны испытывают затухание,

подобное обычному скин-эффекту. Коэффициент затухания равен

$$\varkappa = \sqrt{\frac{(\omega_L^{\text{эл}})^2}{\omega^2} - 1}.$$

Рассмотрим теперь продольную волну в плазме. Если частота $\omega_L^{\text{эл}}$ велика по сравнению с ионной плазменной частотой, $\omega \gg \omega_L^{\text{ион}}$, то из (33,18) и (46,19) находим

$$\varepsilon_{\parallel} \simeq 1 - \frac{(\omega_L^{\text{эл}})^2}{\omega^2\left(1 - \frac{k^2}{\gamma_S n_0^{\text{эл}} m \omega^2}\right)} = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = (\omega_L^{\text{эл}})^2 + \frac{k^2}{\gamma_S n_0^{\text{эл}} m}. \qquad (46,21)$$

Из формулы (46,21) следует, что частота продольных волн всегда близка к плазменной. Они могут распространяться только при $\omega > \omega_L^{\text{эл}}$. Продольные волны в плазме имеют простой смысл. В нашем приближении, когда мы положили $\omega_L^{\text{ион}} \to 0$, т. е. $m_{\text{ион}} \to \infty$, тяжелые ионы неподвижны. В равновесии электроны распределены относительно ионов в виде электронных облаков, рассмотренных в § 41.

При нарушении равновесия электроны смещаются относительно неподвижных ионов и совершают колебания с плазменной частотой $\omega_L^{\text{эл}}$. Второе слагаемое связано с волнами адиабатического сжатия газовой плазмы. Эти волны подобны звуковым, однако, в отличие от газа нейтральных частиц, сжатие и разрежение сопровождаются разделением зарядов.

Величина γ_S, может быть легко найдена из уравнения адиабаты

$$p/n^k = \text{const},$$

если принять, что $k=3$. Значение показателя адиабаты отвечает одной степени свободы — движению вдоль направления распространения волны. Тогда

$$\frac{1}{\gamma_S m n_0} = 3\overline{v^2},$$

так что

$$\omega^2 = (\omega_L^{\text{эл}})^2 + 3\overline{v^2}k^2, \qquad (46,22)$$

где $\sqrt{\overline{v^2}}$ — среднеквадратичная скорость теплового движения

частиц. При уменьшении длины волны второе слагаемое в (46,22) возрастает. Однако при $v^2k^2 \sim (\omega_L^{эл})^2$, что, как легко видеть, отвечает $\lambda \sim \frac{1}{\varkappa}$, фазовая скорость волн оказывается сравнимой с тепловой скоростью электронов. При этом наступает резкое затухание продольных плазменных волн. При $\omega < \omega_L^{эл}$, как видно из (46,21), значения k оказываются мнимыми, что отвечает затуханию волн. Глубина проникновения оказывается, как видно из (46,21), равной дебаевской длине. Таким образом, плазменные колебания обладают частотами, близкими к плазменной частоте $\omega_L^{эл}$. Все другие частоты либо не проникают в плазму, либо быстро затухают[1]).

Мы не будем останавливаться на волнах, отвечающих колебаниям ионов.

Рассмотрим теперь явления, возникающие в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле. Чтобы не усложнять выкладок, мы ограничимся случаем волн, у которых направление распространения совпадает с внешним полем $\boldsymbol{H}_0$ Полагая $\mu = 1$, вместо (46,1) можно написать

$$mn_0 \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = en_0\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}_0]\right) - \nabla p.$$

Мы считаем, что внешнее магнитное поле велико по сравнению с полем электромагнитной волны.

Для дальнейшего нам понадобится учет поляризации волны. Будем считать ее поляризованной по кругу, так что

$$\boldsymbol{E} = A(\boldsymbol{e}_1 \pm i\boldsymbol{e}_2)\, e^{i(kz - \omega t)},$$

где единичные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ направлены по осям x и y, соответственно, а направление распространения принято за ось z. Повторяя все предыдущие выкладки, без труда получим вместо (46,10)

$$\boldsymbol{v}_\perp = i\,\frac{eE_\perp}{m(\omega \pm \omega_c)}, \qquad (46,23)$$

где ω_c — циклотронная частота $\frac{eH_0}{mc}$. Соответственно вместо (46,18) находим

$$\varepsilon_\perp = 1 - \frac{(\omega_L)^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}. \qquad (46,24)$$

Мы видим, что значение диэлектрической проницаемости $\varepsilon_\perp$, или

---

[1]) См. Вопросы теории плазмы, вып 3, Москва, 1963. Шафранов «Электромагнитные волны в плазме», в которой весьма обстоятельно рассмотрен весь круг вопросов, связанных с электромагнитными процессами в плазме.

коэффициента преломления $n = \sqrt{\varepsilon_\perp}$, оказывается зависящей от направления поляризации. Правой (знак плюс) и левой (знак минус) поляризации отвечают разные значения показателя преломления. Иными словами n имеет разные значения в зависимости от взаимоотношения между направлением вращения вектора $\boldsymbol{E}$ в волне и движения электрона по круговой орбите в магнитном поле. Это явление носит название двоякого лучепреломления. Явление двоякого лучепреломления характерно для анизотропных сред (например, кристаллов). Мы видим, что во внешнем магнитном поле в области высоких частот, так же как и в постоянных полях, плазма приобретает анизотропные свойства.

При $\omega \simeq \omega_c$ для левой поляризации коэффициент преломления становится очень велик, что отвечает отражению волны от плазмы. При этом волна с правой поляризацией продолжает проникать в плазму.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Предполагая векторный анализ известным читателю, приводим сводку основных использованных в тексте формул.

Векторная алгебра

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}_0 a,$$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы (орты), направленные по осям x, y, z, $\boldsymbol{a}_0$ — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{a}$.

$$(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{ba}) = ab\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z; \qquad (\text{I}, 1)$$

$$[\boldsymbol{ab}] \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -[\boldsymbol{ba}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}, \qquad (\text{I}, 2)$$

$$|[\boldsymbol{ab}]| = ab\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}), \qquad (\text{I}, 2')$$

$$(\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]) = (\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]) = (\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]), \qquad (\text{I}, 3)$$

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}), \qquad (\text{I}, 4)$$

$$[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}] = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc}), \qquad (\text{I}, 5)$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})\} + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})\} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}[\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]] + \frac{1}{2}\{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})\}. \qquad (\text{I}, 6)$$

Из (I, 5) легко выводится основная формула сферической тригонометрии. Пусть $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ — единичные радиусы-векторы вершин сферического треугольника со сторонами a, b и углами α, β, γ. Полагая в (I, 5) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r}_1$, находим

$$[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2][\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3] = (\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3) - (\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_3). \qquad (\text{I}, 5')$$

По определению

$$r_1 r_2 = \cos\gamma; \quad r_2 r_3 = \cos\alpha; \quad r_3 r_1 = \cos\beta,$$
$$|[r_1 r_2]| = \sin\gamma; \quad |[r_1 r_3]| = \sin\beta;$$
$$[r_1 r_3][r_1 r_2] = \sin\beta\sin\gamma\cos\delta,$$

где δ — угол между плоскостями OAB и OAC.

Подстановка этих выражений в (I, 5′) дает основную формулу сферической тригонометрии:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\delta. \qquad (I,5'')$$

Полярными называются такие векторы, которые не изменяются при инверсии координатных осей $\boldsymbol{r} \to (-\boldsymbol{r})$. К полярным векторам принадлежат такие векторы как скорость, сила и т. п.

Аксиальными, или псевдовекторами, называются векторы, изменяющие свой знак при инверсии, т. е.

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{r}).$$

Аксиальным вектором является вектор, выражающий векторное произведение двух полярных векторов.

Векторный анализ

Дифференцирование вектора, зависящего от скалярного аргумента:

$$\frac{d\boldsymbol{a}(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\boldsymbol{a}_0(x)\,a(x) = \boldsymbol{a}_0\frac{da}{dx} + a\frac{d\boldsymbol{a}_0}{dx} = \boldsymbol{a}_0\frac{da}{dx} + \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{b} = a\omega\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_0 \perp \boldsymbol{a}_0$ и $\omega = \left|\frac{d\boldsymbol{a}_0}{dx}\right|$ — быстрота изменения угла φ, определяющего ориентацию вектора $\boldsymbol{a}$.

Полная производная от $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ по времени равна

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$
$$= \frac{\partial A}{\partial t} + v_x\frac{\partial A}{\partial x} + v_y\frac{\partial A}{\partial y} + v_z\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A}. \qquad (I,7)$$

Скалярное поле

Скалярное поле $\varphi(\boldsymbol{r})$ характеризуется заданием скаляра φ в каждой точке пространства. Быстрота пространственного изменения скаляра $\varphi(\boldsymbol{r})$ характеризуется производной по данному направлению $\boldsymbol{l}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{i}) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{j}) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k}) =$$
$$= |\boldsymbol{l}|\,|\mathrm{grad}\,\varphi|\cos(\boldsymbol{l}, \mathrm{grad}\,\varphi), \qquad (I,8)$$

где градиент скаляра φ

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{I, 9}$$

представляет вектор, направленный в сторону быстрейшего возрастания φ и равный производной от φ в этом направлении.

Модуль градиента равен

$$|\operatorname{grad}\varphi|=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \tag{I, 10}$$

Дифференциальный оператор Гамильтона «набла» ∇ определяется соотношением

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{I, 11}$$

Значок ∇ не помечается шрифтом, так как это принято для векторов. Оператор Гамильтона есть символ, показывающий, какие операции нужно выполнить над стоящими после него функциями координат. Например, $\nabla\varphi$ означает, что от функции φ следует взять частные производные и построить вектор, компоненты которого равны этим частным производным.

С помощью (I, 11) можно формально записать (I, 9) в виде

$$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi\equiv\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{I, 12}$$

Из определения (I, 11) следует

$$\nabla r=\boldsymbol{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{I, 13}$$

$$\operatorname{grad}\varphi(r)=\frac{d\varphi}{dr}\operatorname{grad}r=\frac{d\varphi}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{I, 14}$$

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi, \tag{I, 15}$$

$$\operatorname{grad}\varphi\psi=\psi\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{grad}\psi, \tag{I, 16}$$

$$\operatorname{grad}f(\varphi)=\frac{df}{d\varphi}\operatorname{grad}\varphi. \tag{I, 17}$$

При вычислении градиента от функций, зависящих от расстояния r между двумя данными точками,

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

нужно различать градиенты по координатам точек (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0).

Имеем

$$\operatorname{grad} r = \frac{\boldsymbol{i}(x - x_0) + \boldsymbol{j}(y - y_0) + \boldsymbol{k}(z - z_0)}{r},$$

$$\operatorname{grad}_0 r = -\frac{\boldsymbol{i}(x - x_0) + \boldsymbol{j}(y - y_0) + \boldsymbol{k}(z - z_0)}{r}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad}_0 \varphi(r) = -\operatorname{grad} \varphi(r). \tag{I, 18}$$

Линейный интеграл вектора $\boldsymbol{a}$ по контуру определен соотношением

$$\int_L \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l} = \int (a_x\, dl_x + a_y\, dl_y + a_z\, dl_z).$$

Циркуляцией именуется интеграл по замкнутому контуру

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l}.$$

Если вектор $\boldsymbol{a}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \varphi,$$

то он называется потенциальным вектором, а φ — потенциалом. Циркуляция потенциального вектора равна нулю:

$$\oint \operatorname{grad} \varphi\, d\boldsymbol{l} = 0, \tag{I, 19}$$

$$\int_L \operatorname{grad} \varphi\, d\boldsymbol{l} = \varphi(\boldsymbol{r}_1) - \varphi(\boldsymbol{r}_2). \tag{I, 20}$$

Геометрическое изображение скалярного поля осуществляется нанесением линий равного потенциала: $\varphi = \text{const}$. Вектор $\operatorname{grad} \varphi$ направлен по нормали к поверхности $\varphi = \text{const}$. Чем быстрее происходит изменение функции φ, тем больше $\operatorname{grad} \varphi$ и тем ближе друг к другу расположены линии равного потенциала.

Поверхностным интегралом от функции $\varphi(\boldsymbol{r})$ называется

$$\int \varphi(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{S} = \int \varphi \boldsymbol{n}\, dS = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i\, \Delta \boldsymbol{S}_i.$$

Интеграл по замкнутой поверхности обозначается

$$\oint \varphi\, d\boldsymbol{S}.$$

Рассмотрим интеграл по поверхности бесконечно малого параллелепипеда с объемом $V \to 0$. Будем считать, что сторонами параллелепипеда являются бесконечно малые площадки $(dx\, dy)$,

$(dx\,dz)$, $(dy\,dz)$ на координатных поверхностях (xy), (xz) и (yz), взятые у начала координат.

Имеем, очевидно,

$$\oint\limits_{V\to 0} \varphi\, d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{i}\{\varphi(0+dx)\,dy\,dz - \varphi(0)\,dy\,dz\} + \\ + \boldsymbol{j}\{\varphi(0+dy)\,dx\,dz - \varphi(0)\,dx\,dz\} + \\ + \boldsymbol{k}\{\varphi(0+dz)\,dx\,dy - \varphi(0)\,dx\,dy\} = \\ = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)V,$$

откуда находим равенство

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \lim_{V\to 0}\frac{\oint \varphi\boldsymbol{n}\,dS}{V}. \qquad (I, 21)$$

Формула (I, 21) позволяет дать второе интегральное определение оператора Гамильтона:

$$\nabla = \lim_{V\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{n}\,dS}{V}, \qquad (I, 22)$$

идентичное с (I, 11).

Подчеркнем, что поскольку поверхность интегрирования стягивается в точку при стремлении V к нулю, интегральный оператор (I, 22) не зависит от формы этой поверхности.

Из (I, 21) следует интегральное соотношение

$$\oint \varphi\, d\boldsymbol{S} = \int \operatorname{grad}\varphi\, dV, \qquad (I, 23)$$

связывающее поверхностный интеграл от скаляра φ с объемным интегралом от вектора $\operatorname{grad}\varphi$. Объем интегрирования правой части (I, 23) охватывается поверхностью S, по которой выполняется поверхностное интегрирование в левой части (I, 23).

Для доказательства формулы (I, 23) разобьем конечный объем на бесконечно малые объемы, для каждого из которых справедлива формула (I, 21). Проведем суммирование по всем этим объемам. Интегрирование по всем внутренним поверхностям, образующим границы между объемами, производится дважды. При этом направления внешних нормалей будут противоположными и интегралы по внутренним поверхностям будут взаимно сокращаться. Останутся лишь интегралы по всем внешним поверхностям, образующие в сумме интеграл по поверхности, охватывающей объем V.

Векторное поле

Векторным полем называется область пространства, в каждой точке которой задано значение вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Графическое изображение векторного поля осуществляется с помощью векторных линий. Вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0)$ является вектором касательной к векторной линии в точке $\boldsymbol{r}_0$. При этом векторные линии проводятся так, что густота линий пропорциональна абсолютному значению $|\boldsymbol{a}|$.

В векторном поле можно определить поток вектора через площадку, характеризуемую вектором $d\boldsymbol{S}$ в виде

$$dj = \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}. \qquad (\text{I}, 24)$$

Поверхностным интегралом от вектора $\boldsymbol{a}$ именуется величина

$$j = \int_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\, dS = \int a_n\, dS =$$

$$= \int a_x\, dy\, dz + \int a_y\, dx\, dz + \int a_z\, dx\, dy, \qquad (\text{I}, 25)$$

где $dy\, dz = dS \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i})$ и т. д.

Поверхностный интеграл представляет поток вектора $\boldsymbol{a}$ через поверхность S.

Если поверхность S замкнута, то поверхностный интеграл обозначается через $\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}$. Для поверхностного интеграла по замкнутой поверхности имеет место теорема Гаусса — Остроградского

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV. \qquad (\text{I}, 26)$$

В (I, 26) интегрирование ведется по объему, охватываемому поверхностью интегрирования в поверхностном интеграле.

Доказательство проводится путем разбиения объема на бесконечно малые объемы. Оно может быть проведено формально с помощью определения (I, 22) оператора Гамильтона. Именно,

$$\nabla \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint (\boldsymbol{a}\boldsymbol{n})\, dS}{V}, \qquad (\text{I}, 27)$$

откуда, как и при выводе (I, 23), суммируя элементарные объемы, получаем

$$\int (\nabla \boldsymbol{a})\, dV = \oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}.$$

Пользуясь определением (I, 11), приходим к теореме (I, 26).

Скалярная величина, допускающая два тождественных представления,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \qquad (I, 28)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{an}\, dS}{V}, \qquad (I, 29)$$

основанных на разных формах оператора Гамильтона, именуется дивергенцией или расхождением вектора $\boldsymbol{a}$. Теорему Гаусса — Остроградского можно переписать в виде

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dV. \qquad (I, 30)$$

Дивергенция играет важнейшую роль в теории векторного поля (см. § 2 ч. I книги).

Из выражения (I, 29) следует, что $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ представляет поток вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ через бесконечно малую поверхность, окружающую данную точку поля $\boldsymbol{r}$, отнесенный к единице объема.

Векторное поле называется соленоидальным, если в каждой точке поля

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0.$$

Это означает, что поток вектора через поперечное сечение трубки, образованной группой векторных линий, имеет постоянное значение вдоль трубки. В тех точках поля, в которых $\operatorname{div} \boldsymbol{a} \neq 0$, имеются источники ($\operatorname{div} \boldsymbol{a} > 0$) или стоки ($\operatorname{div} \boldsymbol{a} < 0$) поля. Численное значение $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ называют мощностью или обильностью источников поля.

Имеют место очевидные формулы:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \operatorname{div} \boldsymbol{a}_1 + \operatorname{div} \boldsymbol{a}_2, \\ &\operatorname{div} c\boldsymbol{a} = c \operatorname{div} \boldsymbol{a}, \quad (c = \text{const}), \\ &\operatorname{div} \varphi(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{div}_0 \varphi(r), \end{aligned} \qquad (I, 31)$$

где

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2};$$

индекс 0 означает дифференцирование по координатам x_0, y_0, z_0.

Пусть $\boldsymbol{a}(u)$ — вектор, зависящий только от скалярной величины u. Тогда

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(u) = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{du} \nabla u\right) = (\dot{\boldsymbol{a}} \operatorname{grad} u), \qquad (I, 32)$$

где точкой обозначено дифференцирование по аргументу u.

Наряду с операцией $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$, отвечающей скалярному произведению векторов ∇ и $\boldsymbol{a}$, можно рассмотреть операцию образования вектора

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = [\nabla \boldsymbol{a}]. \qquad (I, 33)$$

Вектор, представляющий векторное произведение оператора Гамильтона ∇ и вектора $\boldsymbol{a}$, носит название ротора или вихря вектора $\boldsymbol{a}$.

Вычисление по формуле (I, 2) с учетом (I, 11) дает

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \qquad (I, 34)$$

Пользуясь теперь интегральным выражением оператора Гамильтона, имеем другое представление вектора:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint [\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}]\, dS}{V}. \qquad (I, 35)$$

Из определения (I, 35), аналогично (I, 23) и (I, 30), следует

$$\int \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, dV = \oint [d\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}]. \qquad (I, 36)$$

Рассмотрим теперь проекцию вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ на произвольное направление, характеризуемое единичным вектором $\boldsymbol{N}$. Из того же определения (I, 35) следует

$$\boldsymbol{N} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\boldsymbol{N} \oint [\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}]\, dS}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{a}\, [\boldsymbol{N}\boldsymbol{n}]\, dS}{V}.$$

Поскольку результат, получающийся после перехода к пределу, не зависит от формы поверхности, ее можно выбрать произвольно. Если направить ось z вдоль $\boldsymbol{N}$ и в качестве поверхности взять цилиндр с основанием S и высотой h, то

$$\oint \boldsymbol{a} [\boldsymbol{n}\boldsymbol{N}]\, dS = \oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l} h.$$

В выражении справа интегрирование ведется по боковой поверхности цилиндра, поскольку на его основаниях $\boldsymbol{n} \| \boldsymbol{N}$ и их векторное произведение обращается в нуль. Через $d\boldsymbol{l}$ обозначен

элемент длины на боковой поверхности, перпендикулярный к векторам $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{N}$.

Отсюда следует

$$\boldsymbol{N} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{h}{Sh} \oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l}.$$

Разбивая произвольный объем на указанные малые объемы и производя суммирование по ним, находим, что поверхностные интегралы по внутренним поверхностям и линейные интегралы по сторонам соприкасающихся ячеек взаимно сокращаются, так что

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l} = \int \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}. \qquad (I, 37)$$

Формула (I, 37), связывающая линейный интеграл от вектора $\boldsymbol{a}$ по произвольному замкнутому контуру с поверхностным интегралом от $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$, носит название теоремы Стокса.

Из вывода теоремы ясно, что интегрирование ведется по произвольной поверхности, опирающейся на контур интегрирования.

Из теоремы Стокса становится ясным геометрический смысл понятия ротора. Для того чтобы интеграл по замкнутому контуру от вектора $\boldsymbol{a}$ был отличен от нуля, необходимо, чтобы некоторые (хотя бы векторные) линии имели характер замкнутых кривых. Такими являются, например, линии вектора скорости вращения твердого тела или линии тока текущей жидкости, совершающей вихревое движение. Отсюда и название ротор или вихрь.

Из теоремы Стокса следует:

1) Если $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \varphi$, то $\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l} = 0$. Следовательно,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \qquad (I, 38)$$

т. е. если $\boldsymbol{a}$ — потенциальный вектор, то поле вектора $\boldsymbol{a}$ является безвихревым. Наоборот, всякий вектор, поле которого является безвихревым — вектор потенциальный.

2) Если вектор $\boldsymbol{a}$ является соленоидальным, так что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0,$$

то его можно представить в виде вихря некоторого вектора:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \boldsymbol{c}.$$

Наоборот, поле вектора $\boldsymbol{a}$, ротор которого отличен от нуля, имеет соленоидальный характер:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0.$$

Источники и стоки в вихревом поле отсутствуют. Доказатель-

ство этих утверждений проводится прямым вычислением. Например,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \nabla[\nabla\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{a}[\nabla\nabla] = 0.$$

Образование скаляра $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ и вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ являются основными операциями дифференцирования вектора.

Расхождение и вихрь вектора $\boldsymbol{a}$ определяют само векторное поле (см. § 2 ч. I).

При вычислении дивергенции и вихря от вектора $\boldsymbol{a}(u)$, зависящего от скалярного аргумента u, получается

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(u) = (\nabla\boldsymbol{a}(u)) = \left(\nabla u\,\frac{d\boldsymbol{a}}{du}\right) = (\operatorname{grad}u,\ \dot{\boldsymbol{a}}), \qquad (I, 39)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(u) = \left[\nabla u\,\frac{d\boldsymbol{a}}{du}\right] = [\operatorname{grad}u,\ \dot{\boldsymbol{a}}], \qquad (I, 40)$$

где точка означает дифференцирование по скаляру u.

Вычисление производных от произведения и повторных производных. Эти операции осуществляются проще всего с помощью оператора Гамильтона. При этом должны соблюдаться два правила:

1. Оператор Гамильтона должен поочередно действовать на каждую расположенную за ним скалярную и векторную величины.

2 С оператором Гамильтона следует обращаться, как с обычным вектором, но его нельзя переставлять местами с той величиной, на которую он действует, и выносить последнюю за знак ∇. Для ясности при выполнении промежуточных преобразований мы будем указывать величину, на которую действует оператор Гамильтона, индексом внизу, например ∇_φ или ∇_a.

Важнейшие примеры:

1. $$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \nabla\varphi\psi = \varphi\nabla_\psi\psi + \psi\nabla_\varphi\varphi = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi. \qquad (I, 41)$$

2. $$\operatorname{div}\psi\boldsymbol{a} = \nabla\varphi\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\nabla_\varphi\varphi + \varphi\nabla_a\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}. \qquad (I, 42)$$

В частности,

$$\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \equiv \operatorname{div}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}\operatorname{grad}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\operatorname{div}\boldsymbol{r} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r},$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = [\nabla,\ \varphi\boldsymbol{a}] = \varphi[\nabla_a\boldsymbol{a}] + [\nabla_\varphi\varphi,\ \boldsymbol{a}] = \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a} + [\operatorname{grad}\varphi,\ \boldsymbol{a}]. \qquad (I, 43)$$

3. $$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = \nabla[\boldsymbol{ab}] = \nabla_a[\boldsymbol{ab}] + \nabla_b[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{b}[\nabla_a\boldsymbol{a}] - \nabla_b[\boldsymbol{ba}] =$$
$$= \boldsymbol{b}[\nabla_a\boldsymbol{a}] - \boldsymbol{a}[\nabla_b\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}. \qquad (I, 44)$$

Мы произвели циклическую перестановку векторов. Во втором слагаемом предварительно изменен порядок векторного умножения. В противном случае при циклической перестановке

было бы нарушено правило 2: вектор $\boldsymbol{b}$ был бы передвинут за знак ∇_b.

4. $$\operatorname{rot}[\boldsymbol{ab}] = [\nabla[\boldsymbol{ab}]] = [\nabla_a[\boldsymbol{ab}]] + [\nabla_b[\boldsymbol{ab}]] = (\nabla_a \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\nabla_a \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + (\nabla_b \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\nabla_b \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}\nabla_a)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}(\nabla_a \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}(\nabla_b \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\nabla_b)\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}\operatorname{grad})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\operatorname{grad})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}. \quad (I, 45)$$

Здесь $(\boldsymbol{a}\operatorname{grad}) \equiv (\boldsymbol{a}\nabla)$ — скалярный дифференциальный оператор

$$(\boldsymbol{a}\nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (I, 46)$$

5. $$\operatorname{grad}(\boldsymbol{ab}) = \nabla_a(\boldsymbol{ab}) + \nabla_b(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{b}\nabla_a)\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{b}[\nabla_a \boldsymbol{a}]] + (\boldsymbol{a}\nabla_b)\boldsymbol{b} + [\boldsymbol{a}[\nabla_b \boldsymbol{b}]] = (\boldsymbol{b}\operatorname{grad})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\operatorname{grad})\boldsymbol{b} + [\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}]. \quad (I, 47)$$

6. $$\operatorname{grad}\frac{a^2}{2} = (\boldsymbol{a}\operatorname{grad})\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]. \quad (I, 48)$$

7. $$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = (\nabla\nabla)\varphi = \Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi. \quad (I, 49)$$

8. $$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = [\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]] = \nabla(\nabla\boldsymbol{a}) - (\nabla\nabla)\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}. \quad (I, 50)$$

9. $$(\nabla\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = (\nabla_a \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + (\nabla_b \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\nabla_b)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\operatorname{grad})\boldsymbol{b}. \quad (I, 51)$$

Из интегрального представления оператора Гамильтона следует формула

$$(\nabla\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint(\boldsymbol{na})\boldsymbol{b}\,dS,$$

из которой непосредственно получается

$$\int(\nabla\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\,dV = \oint(\boldsymbol{na})\boldsymbol{b}\,dS \quad (I, 52)$$

или, в силу (I, 51),

$$\oint(\boldsymbol{na})\boldsymbol{b}\,dS = \int(\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a})\,dV + \int(\boldsymbol{a}\operatorname{grad})\boldsymbol{b}\,dV. \quad (I, 53)$$

Получим и другое интегральное равенство:

$$\int[\boldsymbol{b}[\nabla\boldsymbol{a}]]\,dV + \int[[\boldsymbol{a}\nabla]\boldsymbol{b}]\,dV = -\oint[[\boldsymbol{na}]\boldsymbol{b}]\,dS. \quad (I, 54)$$

Из интегрального представления оператора Гамильтона следует формула

$$[[\nabla\boldsymbol{a}]\boldsymbol{b}] = \lim_{V\to 0}\oint[[\boldsymbol{na}]\boldsymbol{b}]\,dS,$$

откуда

$$\int [[\nabla a] b]\, dV = \oint [[na] b]\, dS. \qquad (I, 55)$$

С другой стороны, имеем

$$[[\nabla a] b] = [[\nabla_a a] b] + [[\nabla_b a] b] = -[b \operatorname{rot} a] - [[a\nabla] b].$$

Подставляя это в (I, 55), приходим к (I, 54).

Представление векторных операций в криволинейных координатах.

Наряду с декартовыми координатами часто удобно пользоваться криволинейными координатами q_1, q_2 и q_3. Каждой точке r отвечает совокупность величин q_1, q_2 и q_3, т. е.

$$r = r(q_1, q_2, q_3). \qquad (I, 56)$$

Поскольку векторные операции не связываются с какой-либо конкретной системой координатных осей, соотношения векторного анализа остаются справедливыми в любом координатном представлении. Однако конкретное выражение векторных операций в криволинейных координатах, естественно, не совпадает с декартовым.

В рамках этой книги будут использоваться только ортогональные координаты. Назовем три поверхности,

$$q_i = q_i(x, y, z) = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (I, 57)$$

координатными поверхностями, а линии их пересечения координатными линиями. Очевидно, что совокупность трех координатных поверхностей является обобщением координатного трехгранника в декартовой системе координат. Направления координатных линий характеризуются единичными векторами e_1, e_2, e_3. Ортогональными системами координат именуют такие, в которых векторы e_1, e_2 и e_3 взаимно перпендикулярны.

Производная по координатам q_i равна

$$\frac{\partial r}{\partial q_i} = \frac{\partial r(q_1, q_2, q_3)}{dq_i} = H_i e_i \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (I, 58)$$

Вектор $\frac{\partial r}{\partial q_i}$ направлен по касательной к координатной линии q_i, и его величина H_i является функцией координат q_1, q_2, q_3. Очевидно,

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial q_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2. \qquad (I, 59)$$

Три величины H_i ($i = 1, 2, 3$) носят название коэффициентов Ляме. С их помощью можно написать

$$dr = H_1\, dq_1 e_1 + H_2\, dq_2 e_2 + H_3\, dq_3 e_3 \qquad (I, 60)$$

или, в проекциях,

$$(d\boldsymbol{r})_1 = H_1\, dq_1; \quad (d\boldsymbol{r})_2 = H_2\, dq_2; \quad (d\boldsymbol{r})_3 = H_3\, dq_3. \qquad (\text{I}, 61)$$

Возводя (I, 60) в квадрат, находим квадрат длины в криволинейных ортогональных координатах

$$(d\boldsymbol{r})^2 = ds^2 = H_1^2\, dq_1^2 + H_2^2\, dq_2^2 + H_3^2\, dq_3^2. \qquad (\text{I}, 62)$$

Элемент площади легко найти, рассматривая бесконечно малый параллелепипед, образованный координатными поверхностями. Площади его граней

$$dS_1 = H_2 H_3\, dq_2\, dq_3; \quad dS_2 = H_1 H_3\, dq_1\, dq_3; \quad dS_3 = H_1 H_2\, dq_1\, dq_2. \qquad (\text{I}, 63)$$

Объем параллелепипеда равен

$$dV = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3. \qquad (\text{I}; 64)$$

Важнейшими ортогональными координатами являются цилиндрические и сферические координаты.

В сферических координатах

$$q_1 = r; \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \psi. \qquad (\text{I}, 65)$$

Очевидно, имеем

$$(d\boldsymbol{r})_r = dr, \quad (d\boldsymbol{r})_\theta = r\, d\theta, \quad (d\boldsymbol{r})_\psi = r \sin\theta\, d\psi. \qquad (\text{I}, 66)$$

Сравнение с (I, 61) дает

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\psi = r\sin\theta; \qquad (\text{I}, 67)$$
$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

В цилиндрической системе координат

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \psi, \quad q_3 = z, \qquad (\text{I}, 68)$$
$$(d\boldsymbol{r})_\rho = d\rho, \quad (d\boldsymbol{r})_\psi = \rho\, d\psi, \quad (d\boldsymbol{r})_z = dz,$$

и из (I, 61)

$$H_\rho = 1, \quad H_\psi = \rho, \quad H_z = 1, \qquad (\text{I}, 69)$$
$$dV = \rho\, d\rho\, d\psi\, dz.$$

Выражения для векторных операций получаются из их определений с учетом выписанных соотношений:

1. $$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}. \qquad (\text{I}, 70)$$

В частности, в сферической и цилиндрической системах координат соответственно имеем

$$\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\boldsymbol{e}_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}, \qquad (I,71)$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\boldsymbol{e}_\psi}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (I,72)$$

2. $\operatorname{div}\boldsymbol{a} =$

$$= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2)\right\}. \qquad (I,73)$$

В сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(r^2a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\psi}{\partial\psi}, \qquad (I,74)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\psi}{\partial\psi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (I,75)$$

3. $$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_1 = \frac{1}{H_2H_3}\left\{\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}\right\}. \qquad (I,76)$$

Остальные проекции получаются циклической перестановкой координат 1, 2, 3.

В сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(a_\psi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\psi}, \qquad (I,77)$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\psi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\psi)}{\partial r}, \qquad (I,78)$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}, \qquad (I,79)$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\psi} - \frac{\partial a_\psi}{\partial z}, \qquad (I,80)$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_\psi = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho}, \qquad (I,81)$$

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(a_\psi\rho)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\psi}. \qquad (I,82)$$

4. Оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right\}. \qquad (I, 83)$$

В сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}, \qquad (I, 84)$$

$$\Delta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (I, 85)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начало тензорного исчисления изд. АН СССР, 1953, и др. издания.
2. Я. И. Френкель, Курс теоретической механики, Гостехиздат, 1940.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Интеграл Фурье

Всякая периодическая в области $l = \frac{2\pi}{\omega}$ функция, т. е. функция, удовлетворяющая условию

$$f(t+l) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(t),$$

может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t}.$$

Коэффициенты Фурье даются формулой

$$f_n(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-in\omega\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Разложение в ряд Фурье означает, что произвольная периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ может быть представлена в виде наложения (спектра) бесконечного числа монохроматических функций с периодами $\frac{2\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{2\omega}, \ldots, \frac{2\pi}{n\omega}$ или частотами: ω, 2ω, ..., $n\omega$ и т. д.

Условия, при которых возможно разложение в ряд Фурье, обычно выполняются в физических приложениях.

Переходя к пределу, когда период неограниченно возрастает, (т. е. $\omega \to 0$), а частоты сближаются между собой, можно получить разложение в интеграл Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \qquad \text{(II, 1)}$$

Функция $F(\omega)$, именуемая компонентой Фурье от функции $f(t)$, дается формулой

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \qquad \text{(II, 2)}$$

Разложение в интеграл Фурье возможно, если свойства $f(t)$ обеспечивают сходимость (II, 1)—(II, 2). Обычно в физических приложениях $f(t)$ стремится к нулю при $t \to \pm\infty$, что обеспечивает сходимость этих выражений.

Интеграл Фурье можно записать в более симметричном виде:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega)\, d\omega, \qquad \text{(II, 3)}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt. \qquad \text{(II, 4)}$$

Если $f(t)$ — вещественная функция, то $F(\omega)$ — комплексная функция, причем

$$F^*(\omega)=F(-\omega). \qquad \text{(II, 5)}$$

Формулы (II, 3) и (II, 4) можно объединить в виде выражения

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau} f(\tau), \qquad \text{(II, 6)}$$

также называемого часто интегралом Фурье.

Формула (II, 3) показывает, что $f(t)$ представляет собой сумму монохроматических слагающих $e^{i\omega t}$, которые берутся с весами (амплитудами) $\frac{F(\omega)\, d\omega}{\sqrt{2\pi}}$.

Комплексную амплитуду $F(\omega)$ можно написать в виде

$$F(\omega)=A(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}, \qquad \text{(II, 7)}$$

где $A(\omega)$ — модуль и $\varphi(\omega)$ — фаза функции $F(\omega)$, являющиеся вещественными функциями частоты ω. В таком представлении для интеграла Фурье имеем

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{i(\omega t+\varphi(\omega))}\, d\omega. \qquad \text{(II, 8)}$$

Докажем важное равенство, иногда именуемое соотношением Парсеваля для интеграла Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega. \qquad \text{(II, 9)}$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\, dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{i(\omega t + \varphi(\omega))}\, d\omega \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt \right\} d\omega.$$

Но, по определению (II, 4),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt = F^*(\omega) = A(\omega)\, e^{-i\varphi(\omega)}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega))^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega,$$

что и требовалось доказать.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Дельта-функция и ее свойства

δ-функция была введена Дираком[1]) и оказалась весьма полезной при рассмотрении различных вопросов теоретической физики. δ-функция определяется соотношениями

$$\delta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$
$$\delta(x) = \infty \quad \text{при} \quad x = 0$$

так, что

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = 1, \quad \text{где} \quad a < 0 < b. \qquad \text{(III, 1)}$$

Из определения (III, 1) сразу следует основное свойство δ-функции:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0), \quad a < 0 < b, \qquad \text{(III, 2)}$$

а $f(x)$ — произвольная непрерывная функция x.

Действительно, благодаря свойствам δ-функции в интеграле (III, 2) играет роль лишь окрестность точки $x = 0$. Тогда функцию $f(x)$ можно в точке $x = 0$ вынести за знак интеграла, а оставшийся интеграл в силу (III, 1) равен единице. Интеграл (III, 2) можно переписать также в виде

$$\int f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0). \qquad \text{(III, 3)}$$

Область интегрирования в (III, 3) должна включать точку $x = x_0$, иначе интеграл обращается в нуль:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = 0, \quad \begin{cases} x_0 > b, \\ x_0 < a. \end{cases} \qquad \text{(III, 3')}$$

---

[1]) П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, ГИТТЛ, 1937.

δ-функция не может входить ни в какие окончательные выражения. Всегда, когда пишется δ-функция, то имеется в виду в дальнейшем интегрирование по тем переменным, от которых она зависит; δ-функцию можно рассматривать как предел последовательности аналитических функций.

В частности, такими свойствами обладает выражение

$$F(\alpha, x) = \frac{\sin \alpha x}{\pi x},$$

которое ведет себя при $\alpha \to \infty$ как $\delta(x)$. Действительно, при $x = 0$ $F(\alpha, x)|_{x=0} = \frac{\alpha}{\pi}$ и расходится при $\alpha \to \infty$. При $x \neq 0$ $F(\alpha, x)$ сильно осциллирует около нулевого значения, причем с затухающей амплитудой. Наконец,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x}\, dx = 1$$

при любом α. Мы видим, следовательно, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} = \delta(x). \tag{III, 4}$$

Другие примеры δ-функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}; \tag{III, 4'}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \to 0} \alpha e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}; \tag{III, 4''}$$

$$\delta(x) = -\lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + 1\right)^2}. \tag{III, 4'''}$$

Через δ-функцию выражается часто встречающийся интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dk,$$

который следует понимать, как

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ikx}\, dk = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{2}{x} \sin \alpha x.$$

Сравнивая с (III, 4), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk = 2\pi\,\delta(x). \tag{III, 5}$$

δ-функция может быть определена и как производная от некоторой разрывной функции $\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned} &\varepsilon(x) = 0, \quad x < 0; \\ &\varepsilon(x) = 1, \quad x > 0. \end{aligned} \tag{III, 6}$$

Очевидно, $\varepsilon'(x) = 0$ при $x \neq 0$. Покажем, что имеет место и равенство (III, 2):

$$\int_a^b f(x)\,\varepsilon'(x)\,dx = f(x)\,\varepsilon(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b \varepsilon(x)\,f'(x)\,dx =$$

$$= f(b) - \int_0^b f'(x)\,dx = f(0).$$

Следовательно,

$$\varepsilon'(x) = \delta(x). \tag{III, 7}$$

Выпишем некоторые основные свойства δ-функции:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta(-x) = \delta(x), \qquad \delta'(-x) = -\delta'(x), \\
&x\delta(x) = 0, \qquad x\delta'(x) = -\delta(x), \\
&\delta(ax) = \frac{1}{a}\,\delta(x), \quad a > 0, \\
&\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}\,[\delta(x-a) + \delta(x+a)], \\
&\int \delta(a-x)\,\delta(x-b)\,dx = \delta(a-b), \\
&f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\,\delta(x-a), \\
&\int f(x)\,\delta'(x-a)\,dx = -f'(a), \\
&\delta(f)\,df = \delta(x)\,dx, \qquad \delta[f(x)] = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|}\,\delta(x - x_0), \\
&\text{где } x_0 \text{ определено условием } f(x_0) = 0, \\
&\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i(\boldsymbol{kr} - \omega t)}\,\delta(\omega - \boldsymbol{kv})\,d\boldsymbol{k}\,d\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{III, 8}$$

Так как δ-функция имеет смысл, если только имеется в виду интегрирование по ее аргументу, то и эти равенства означают, что, умножая левую часть каждого из этих равенств на непрерывную функцию $f(x)$ и интегрируя по x, мы придем к тем же результатам, какие дадут и правые части равенств. Докажем, например, третье соотношение. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int f(x)\, x\delta(x)\, dx = f(x)\, x\,|_{x=0} = 0$$

и соотношение доказано.

δ-функция оказывается часто полезной при рассмотрении интегралов Фурье. Так, если мы имеем разложение некоторой функции $f(x)$ в интеграл Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k)\, e^{ikx}\, dk, \qquad \text{(III, 9)}$$

то, пользуясь (III, 5), мы сразу получаем выражение для обращенного интеграла Фурье. Действительно, умножая левую и правую части равенства (III, 9) на $e^{-ik'x}$ и интегрируя по x, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ik'x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, e^{i(k-k')x}\, dk\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, dk \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, 2\pi\,\delta(k-k')\, dk = 2\pi c(k').$$

Следовательно, имеем

$$c(k') = \frac{1}{2\pi}\int f(x)\, e^{-ik'x}\, dx. \qquad \text{(III, 10)}$$

Аналогичные соотношения возникают и в более сложных случаях. Формулу (III, 5) можно рассматривать, как разложение δ-функции в интеграл Фурье.

Рассмотрим теперь разложение δ-функции по полиномам Лежандра:

$$\delta(1-\zeta) = \sum_l B_l P_l(\zeta).$$

Коэффициенты B_l найдем, умножая левую и правую части равенства на $P_{l'}(\zeta)$ и интегрируя по ζ. Учитывая, что

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'}(\zeta)\, P_l(\zeta)\, d\zeta = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'}$$

и

$$P_l(1) = 1,$$

получаем

$$B_l = \frac{1}{2}(2l+1).$$

Окончательно имеем

$$\delta(1-\zeta) = \frac{1}{2}\sum_l (2l+1) P_l(\zeta). \qquad \text{(III, 11)}$$

Докажем, наконец, следующее соотношение:

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}), \qquad \text{(III, 12)}$$

где

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z).$$

Для этого разложим функцию $\frac{1}{r}$ в трехмерный интеграл Фурье:

$$\frac{1}{r} = \int c(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{kr}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z. \qquad \text{(III, 13)}$$

Соответственно для функции $c(\boldsymbol{k}) \equiv c(k_x, k_y, k_z)$ имеем, пользуясь (III, 10),

$$c(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{r}\, e^{-i\boldsymbol{kr}}\, dV. \qquad \text{(III, 14)}$$

В формуле (III, 14) интегрируем сначала по углу, выбирая полярную ось в направлении вектора $\boldsymbol{k}$:

$$c(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{1}{r} r^2\, dr \int_0^\pi e^{-ikr\cos\vartheta}\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{i}{k}\int_0^\infty (e^{-ikr} - e^{ikr})\, dr.$$

Последний интеграл берется обычно добавлением в подынтегральное выражение множителя $e^{-\alpha r}$ и последующим устремлением в полученном результате α к нулю ($\alpha \to 0$). Окончательно получим

$$c(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2}.$$

Подставляя $c(\boldsymbol{k})$ в (III, 13), имеем

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{(2\pi)^2}\int \frac{1}{k^2}\, e^{i\boldsymbol{kr}}\, d\boldsymbol{k}.$$

Беря лапласиан от левой и правой частей, получим

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{kr}} \, d\mathbf{k}$$

и, следовательно (см. III, 5),

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} (2\pi)^3 \delta(x) \delta(y) \delta(z) = -4\pi \delta(\mathbf{r}). \qquad \text{(III, 15)}$$

В заключение отметим, что, как следует из (III, 1), δ-функция является размерной функцией, причем ее размерность обратна размерности ее аргумента.

Важная знаковая функция $\operatorname{sgn} x$ определена как

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \qquad \text{(III, 16)}$$

Ее фурье-образ

$$F_{\operatorname{sgn}}(\omega) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x e^{-\alpha |x|} e^{i\omega x} \, dx =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{i}{\pi} \frac{\omega}{\omega^2 + \alpha^2} = P\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{(III, 17)}$$

где P означает главное значение функции $\frac{1}{x}$;

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad \text{(III, 18)}$$

$$\int f(x) P\left(\frac{1}{x}\right) dx = \fint \frac{f(x)}{x} \, dx, \qquad \text{(III, 19)}$$

где $\fint$ — главное значение интеграла.

Обратное преобразование дает интегральное представление знаковой функции

$$\operatorname{sgn} x = \frac{i}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\omega} \, d\omega. \qquad \text{(III, 20)}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

I. Вычисление некоторых интегралов

1) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ (интеграл Пуассона),

$$I = 2\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt.$$

Имеем тождество

$$I^2 = \frac{4}{\alpha}\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt\int\limits_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{4}{\alpha}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(u^2+t^2)}\,dt$$

Вводя полярные координаты

$$r^2 = u^2 + t^2,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{u}{t},$$

$$dt\,du = r\,dr\,d\varphi,$$

имеем

$$I^2 = \frac{4}{\alpha}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{\alpha},$$

откуда

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

2) $$I_{2n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}x^{2n}\,dx.$$

Дифференцируя I по параметру α, находим

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}},$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^4\,dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}},$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n}\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}.$$

3) $I_{2n+1} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n+1}\,dx,$

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x\,dx = \frac{1}{2\alpha}.$$

Дифференцируя I_1 по параметру α, получаем

$$I_{2n+1} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n+1}\,dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}.$$

4) $$\int_0^{\infty} \ln(1-e^{-x})\,dx = x\ln(1-e^{-x})\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1} = -\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1}.$$

Аналогично

$$\int_0^{\infty} x^2 \ln(1-e^{-x})\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(1-e^{-x})\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = -\frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{x^3\,dx}{e^x-1}.$$

Вычисление последних интегралов производится с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд:

$$\frac{1}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x},$$

откуда следует

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty xe^{-(n+1)x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x^3e^{-(n+1)x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{6}{(n+1)^4} = \frac{6\cdot\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

5) $$I = \int_{-\infty}^\infty x^2 \frac{d}{dx}\frac{1}{e^{-x}+1}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2e^{-x}\,dx}{(e^{-x}+1)^2} = 2\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x}\,dx}{(e^{-x}+1)^2}.$$

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд, имеем

$$I = 2\int_0^\infty x^2(e^{-x} - 2e^{-2x} + 3e^{-3x} - \ldots)\,dx =$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots\right) = 4\cdot\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{3}.$$

II. Формула Стирлинга

При больших значениях числа N имеет место формула Стирлинга:

$$N! \approx N^N e^{-N}(2\pi N)^{\frac{1}{2}}.$$

С точностью до множителя $\sqrt{2\pi}$ она получается из простого вычисления. Именно,

$$\ln N! = \sum_{n=1}^N \ln n,$$

и далее, по формуле Эйлера — Маклорена,

$$\sum_{n=1}^N \ln n \approx \int_1^N \ln x\,dx + \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^N + C = N\ln N - N + \frac{1}{2}\ln N + C.$$

Более точное вычисление приводит к значению $C = \sqrt{2\pi}$.

Вениамин Григорьевич Левич

Курс теоретической физики

Том I

М., 1969 г., 912 стр. с илл.

Редакторы *Л. Ф. Верес, В. И. Рыдник*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 6/VIII 1969 г.
Подписано к печати 26/XI 1969 г.
Бумага $60\times 90^{1}/_{16}$
Физ. печ. л. 57. Условн. печ. л. 57. Уч.-изд. л. 54,23. Тираж 50 000 экз. Т-15959.
Цена книги 2 р. 02 к. Заказ № 252.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.